Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Коняев, Однозначность восстановления параметров секционных операторов на простых комплексных алгебрах Ли, *Матем. заметки*, 2011, том 90, выпуск 3, 384–393

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm6376>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 13:59:57

Однозначность восстановления параметров секционных операторов на простых комплексных алгебрах Ли

А. Ю. Коняев

Секционным оператором на простой комплексной алгебре Ли $\mathfrak{g}$ называется самосопряженный оператор $\phi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, удовлетворяющий тождеству $[\phi x, a] = [x, b]$ для фиксированных $a, b \in \mathfrak{g}$, $a \neq 0$. В различных разделах геометрии возникает вопрос об однозначности восстановления параметров данного конкретного оператора. Главный результат работы следующий: если a, b непропорциональны, a – регулярный полупростой, то всякая пара параметров p, q секционного оператора получается из a, b умножением на ненулевой скаляр, т.е. параметры в некотором смысле восстанавливаются однозначно. Как следствие, подалгебры Мищенко–Фоменко для регулярных полупростых элементов в алгебре Пуассона–Ли совпадают только для пропорциональных значений параметров.

Библиография: 9 названий.

1. Введение. Термин “секционный оператор” был введен Фоменко для общих алгебр Ли и симметрических пространств и впервые появился в совместной работе Трофимова и Фоменко [1]. Частными случаями таких операторов являются оператор, обнаруженный Манаковым для уравнений движения многомерного твердого тела [2], а также многопараметрические серии операторов $\phi(a, b, D)$, введенные Мищенко и Фоменко для полупростых алгебр Ли [3]–[5]. Общие секционные операторы Фоменко были введены для произвольного линейного конечномерного представления произвольной конечномерной алгебры Ли [6]. Оказалось, что семейства секционных операторов для алгебры Ли $\mathfrak{g}$ часто порождают интересные динамические системы на орбитах коприсоединенного представления. Фоменко показал, (см. [1]), что в случае симметрического пространства максимального ранга, секционные операторы тесно связаны с тензором кривизны симметрического пространства. При этом само название “секционные операторы” было обусловлено их алгебраическими свойствами. Затем довольно неожиданно оказалось, – это было обнаружено Болсиновым [7], – что секционные операторы напрямую связаны также с секционной кривизной римановых метрик в интересной проблеме изучения геодезических

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 07-01-00648-а).

эквивалентных метрик (т.е. метрик с общими геодезическими). Так что изначально термин “секционные” (операторы) оказался выбранным очень удачно.

Прежде чем перейти непосредственно к определениям, необходимо сделать несколько замечаний. Во-первых, секционные операторы можно определять для произвольных алгебр Ли, однако в нашем случае мы будем рассматривать только комплексные простые алгебры, которые условимся обозначать через $\mathfrak{g}$. Во-вторых, существует несколько различных классов (или серий) секционных операторов. Подчеркнем, что изучаемые нами операторы относятся к так называемым операторам комплексной серии, в то время как в работе [7] используются операторы нормальной серии (в работе Манакова [2] также фигурировали операторы нормальной серии для алгебры Ли $\mathfrak{sl}(n+1)$).

Итак, самосопряженный относительно формы Киллинга оператор $\phi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ называется *секционным оператором комплексной серии* (далее мы будем говорить просто “секционным”), если он удовлетворяет равенству

$$[\phi x, a] = [x, b] \quad (1.1)$$

для любого $x \in \mathfrak{g}$ и фиксированных элементов $a, b \in \mathfrak{g}$, $a \neq 0$, которые мы будем называть параметрами оператора и записывать в виде пары a, b . Данные определения в общем виде с незначительными ограничениями давались в книге [6] (там же можно найти определения операторов других серий, в том числе и нормальной серии).

Легко видеть, что параметры секционного оператора, вообще говоря, определены неоднозначно. Например, из линейности коммутатора вытекает, что a и b можно одновременно умножать на некоторый ненулевой скаляр. В работе [7] был доказан замечательный факт: если оператор ϕ , относящийся к классу секционных операторов нормальной серии на $\mathfrak{sl}(n+1)$, допускает две различные непропорциональные пары параметров, то он скалярный. Из этого, в частности, следует, что метрика g , допускающая две различные проективно эквивалентные метрики g_1 и g_2 в некотором смысле общего положения, имеет постоянную кривизну.

В данной работе аналогичный результат доказывается для операторов комплексной серии. Данный факт оказывается тесно связан с некоторыми фундаментальными свойствами системы корней простой комплексной алгебры Ли.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\phi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ – секционный оператор с параметрами a, b , причем a – регулярный полупростой элемент $\mathfrak{g}$ и $b \neq \lambda a$. Тогда всякая другая пара параметров p, q для оператора ϕ получается из данной одновременным умножением элементов a, b на некоторый ненулевой скаляр, т.е. $p = \mu a$, $q = \mu b$ для некоторого $\mu \neq 0$.

2. Некоторые предварительные результаты. Условимся считать, что ранг изучаемой простой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ равен n . Будем обозначать систему корней в евклидовом пространстве E^n со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$, соответствующую алгебре Ли $\mathfrak{g}$, через Δ , а сами корни – греческими буквами. Подмножество корней $M \subseteq \Delta$ будем называть *линейным*, если для него выполнены свойства

- 1) если корень α лежит в M , то и $-\alpha$ лежит в M ;
- 2) если $\alpha, \beta \in M$ и $\alpha + \beta$ корень, то $\alpha + \beta$ лежит в M .

Если M не является линейным подмножеством, то будем обозначать через $\mathcal{L}(M)$ минимальное линейное подмножество Δ , содержащее M .

Что касается самой алгебры Ли $\mathfrak{g}$, то считаем, что в ней фиксирован базис Вейля [8]. Через $\mathfrak{h}$ обозначаем подалгебру Картана, а через e_α – корневой вектор, соответствующий корню α .

Для дальнейшей работы нам понадобится некоторое сугубо геометрическое свойство неприводимой системы корней. Напомним, что система корней Δ называется *неприводимой*, если ее нельзя представить как объединение двух непересекающихся подмножеств, ортогональных друг другу.

Для начала сформулируем утверждение из книги Хамфриса [8].

ЛЕММА 1. Пусть α, β – два непропорциональных корня. Если $(\alpha, \beta) < 0$, т.е. угол между корнями тупой, то $\alpha + \beta$ является корнем. Если $(\alpha, \beta) > 0$, то $\alpha - \beta$ является корнем.

Через Π_γ будем обозначать множество корней, ортогональных фиксированному вектору γ в пространстве E^n , а через $\Delta \setminus \Pi_\gamma$ – подмножество корней, не попавших в Π_γ .

ЛЕММА 2. Для любого ненулевого вектора $\gamma \in E^n$ линейное подмножество $\mathcal{L}(\Delta \setminus \Pi_\gamma)$ совпадает с Δ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разумеется, если в множество Π_γ не попал ни один корень из Δ , то $\Delta \setminus \Pi_\gamma = \Delta$ и утверждение леммы очевидно.

Определим подмножество Q в Π_γ как множество корней $\xi \in \Pi_\gamma$, ортогональных всем векторам из $\Delta \setminus \Pi_\gamma$.

Так как система Δ неприводима, в множестве Π_γ найдется корень $\beta \notin Q$. Другими словами, для него можно найти $\alpha \in \Delta \setminus \Pi_\gamma$ такой, что $(\alpha, \beta) \neq 0$. Без ограничения общности считаем, что $(\alpha, \beta) < 0$, откуда по лемме 1 вытекает, что $\alpha + \beta$ – корень, причем лежащий в $\Delta \setminus \Pi_\gamma$ так как $(\alpha + \beta, \gamma) = (\alpha, \gamma) \neq 0$. Так как $-\alpha \in \Delta \setminus \Pi_\gamma$, корень $(\alpha + \beta) + (-\alpha) = \beta$ лежит в $\mathcal{L}(\Delta \setminus \Pi_\gamma)$.

Из этого, в частности, следует, что β ортогонален Q . Легко видеть, что, если множество корней M ортогонально некоторому вектору, то ему ортогональна и линейная система $\mathcal{L}(M)$. Таким образом, мы разбили нашу систему корней на два ортогональных друг другу множества – $\mathcal{L}(\Delta \setminus \Pi_\gamma)$ и Q . Нам известно, что система корней неприводима, и $\Delta \setminus \Pi_\gamma$ непусто, так как по определению система корней порождает все евклидово пространство E^n . Таким образом, Q обязано быть пустым и $\mathcal{L}(\Delta \setminus \Pi_\gamma) = \Delta$.

Следующая лемма устанавливает взаимосвязь между параметрами a, b секционного оператора, причем априори никаких условий на элемент a не накладывается. Через $\mathfrak{g}^a$ будем обозначать централизатор a , т.е. множество таких элементов x алгебры Ли $\mathfrak{g}$, что $[x, a] = 0$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть задан секционный оператор с параметрами a, b . Тогда b лежит в центре $\mathfrak{g}^a$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для начала нам потребуется лемма, которая, вообще говоря, представляет самостоятельный интерес.

ЛЕММА 3. Если ϕ – секционный оператор, удовлетворяющий равенству (1.1), то он коммутирует с ad_a .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть x, y – произвольные элементы алгебры Ли $\mathfrak{g}$. В силу самосопряженности оператора ϕ получаем

$$(y, [a, \phi x]) = (y, [b, x]) = ([y, b], x) = ([\phi y, a], x) = (\phi y, [a, x]) = (y, \phi[a, x]),$$

где скобкой в данном случае обозначается скалярное умножение, задаваемое на $\mathfrak{g}$ формой Киллинга. Так как эта форма невырождена, то

$$[a, \phi x] = \phi[a, x].$$

Теперь заметим, что из данной леммы вытекает, что тождество (1.1) для оператора ϕ можно переписать следующим образом:

$$\phi[x, a] = [x, b]. \quad (2.1)$$

Из этого следует, что всякий элемент, коммутирующий с a , коммутирует и с b , т.е. b лежит в центре подалгебры $\mathfrak{g}^a$.

Пусть теперь ϕ секционный оператор с параметрами a, b , где a – полупростой, но необязательно регулярный элемент. Считая, без ограничения общности, что a лежит в картановской подалгебре $\mathfrak{h}$, получаем что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ в этом случае раскладывается в прямую сумму централизатора $\mathfrak{g}^a$ элемента a , который является редуктивной алгеброй Ли, и его ортогонального относительно формы Киллинга дополнения $V = \mathfrak{g}^{a\perp}$. Ортогональное дополнение порождается корневыми векторами e_α , для которых $\alpha(a) \neq 0$. В частности, для регулярного a имеем $\mathfrak{g}^a = \mathfrak{h}$, а пространство V натянуто на все корневые векторы.

ТЕОРЕМА 3. Пусть a – произвольный элемент картановской подалгебры $\mathfrak{h}$.

1) Если ϕ – секционный оператор с параметрами a, b , то элемент b лежит в $\mathfrak{h}$ и удовлетворяет свойству: если $\alpha(a) = 0$ для некоторого корня α , то $\alpha(b) = 0$.

2) Если ϕ – секционный оператор с параметрами a, b , то пространства V и $\mathfrak{g}^a$ инвариантны относительно ϕ . Более того, пусть $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in V$, $x_2 \in \mathfrak{g}^a$. Тогда $\phi x = \text{ad}_a^{-1} \text{ad}_b x_1 + D x_2$, где

$$\text{ad}_a^{-1} \text{ad}_b: V \rightarrow V, \quad D: \mathfrak{g}^a \rightarrow \mathfrak{g}^a, \quad (2.2)$$

и D – некоторый самосопряженный оператор на $\mathfrak{g}^a$.

3) Для любой пары a, b , в которой b лежит в центре $\mathfrak{g}^a$, формула из пункта 2 задает секционный оператор с параметрами a, b .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первый пункт теоремы очевиден – он представляет собой переформулировку теоремы 2 для случая, когда $a \in \mathfrak{h}$.

Из первого пункта следует, что пространство V инвариантно относительно ad_b и ad_a , причем $\text{ad}_a: V \rightarrow V$ обратим, поэтому корректно определен оператор $\text{ad}_b \text{ad}_a^{-1}: V \rightarrow V$. Так как $V = \text{ad}_a \mathfrak{g}$ и $\text{ad}_b \mathfrak{g} \subset V$, из тождества (2.1) следует инвариантность V относительно ϕ . Из самосопряженности оператора ϕ вытекает, что $V^\perp = \mathfrak{g}^a$

также инвариантно относительно данного оператора. Для произвольного корневого вектора e_α получаем, что

$$\phi e_\alpha = \frac{\alpha(b)}{\alpha(a)} e_\alpha = ad_a^{-1} ad_b e_\alpha.$$

В частности, корневые вектора, попавшие в V , являются собственными векторами для оператора ϕ . Второй пункт доказан.

Рассмотрим теперь произвольный оператор, задаваемый формулой (2.2). Из нее немедленно вытекает, что подобный оператор удовлетворяет тождеству (1.1) на V . Теперь рассмотрим произвольный вектор x из $\mathfrak{g}^a$. Из-за того, что b лежит в центре $\mathfrak{g}^a$, получаем что тождество (1.1) превращается в равенство $0 = 0$. Третий пункт теоремы доказан.

Формула описанного в теореме типа впервые появилась в работе [5]. Отметим в заключение, что для неполупростого a столь удобного представления не существует, так как ортогональное дополнение к $\mathfrak{g}^a$ пересекается с $\mathfrak{g}^a$.

3. Основные теоремы. Доказательство главной теоремы раздела мы разобьем на два утверждения.

Первое – интересное геометрическое свойство неприводимой системы корней. Рассмотрим набор чисел $\Lambda = \{\lambda_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$, в котором элементы занумерованы корнями из Δ . Для этого набора на картановской подалгебре $\mathfrak{h}$ можно записать систему линейных уравнений

$$\alpha(b) - \lambda_\alpha \alpha(a) = 0, \quad (3.1)$$

решением которой будет пара элементов $a, b \in \mathfrak{h}$. Легко видеть, что система избыточна – количество уравнений превосходит количество неизвестных (которых, в данном случае, $2n$ штук).

Напомним, что элемент a в картановской подалгебре регулярен [8] тогда и только тогда, когда $\alpha(a) \neq 0$ для всех корней $\alpha \in \Delta$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть не все числа из набора Λ равны между собой и система (3.1) совместна, причем в решении $\{a, b\}$ элемент a регулярен. Тогда всякое другое решение p, q данной системы получается из a, b умножением на скаляр, т.е. $p = \mu a$, $q = \mu b$, где $\mu \in \mathbb{C}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства нам потребуются следующие леммы.

ЛЕММА 4. Пусть $(\alpha, \beta) \neq 0$ и $\lambda_\alpha \neq \lambda_\beta$. Тогда $\beta(a)$ однозначно определяется из системы (3.1) по $\alpha(a)$ и числам из набора Λ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ. Без ограничения общности считаем, что $(\alpha, \beta) < 0$, поэтому по лемме 1 $\alpha + \beta$ – корень. Из системы (3.1) получаем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \alpha(b) - \lambda_\alpha \alpha(a) &= 0, \\ \beta(b) - \lambda_\beta \beta(a) &= 0, \\ (\alpha + \beta)(b) - \lambda_{\alpha+\beta}(\alpha + \beta)(a) &= 0. \end{aligned}$$

Вычитая из третьего уравнения первые два, получаем

$$(\lambda_{\alpha+\beta} - \lambda_\alpha)\alpha(a) + (\lambda_{\alpha+\beta} - \lambda_\beta)\beta(a) = 0. \quad (3.2)$$

Так как $\alpha(a) \neq 0$, то $(\lambda_{\alpha+\beta} - \lambda_\beta) \neq 0$ (в противном случае получается равенство чисел λ_α , λ_β и $\lambda_{\alpha+\beta}$, что противоречит условию леммы). Таким образом, $\beta(a)$ однозначно определяется из полученного уравнения. Лемма доказана.

Заметим, что корень β из данной леммы всегда существует. Действительно, предположим противное. Тогда для любого корня $\beta \in \Delta \setminus \Pi_\alpha$ верно, что $\lambda_\alpha = \lambda_\beta$.

Кроме этого, так как $\alpha(a) \neq 0$, $\alpha(b) \neq 0$, из равенства $\lambda_{\alpha+\beta} - \lambda_\alpha = 0$, из уравнения (3.2) немедленно получаем $\lambda_{\alpha+\beta} - \lambda_\beta = 0$.

Также из системы (3.1) получаем, что $\lambda_\alpha = \lambda_{-\alpha}$, поэтому множество корней β , для которых $\lambda_\alpha = \lambda_\beta$, линейно. Таким образом, из леммы 2 получаем, что все числа из Λ равны между собой, что противоречит условию теоремы.

ЛЕММА 5. Пусть $(\alpha, \gamma) \neq 0$ и $\lambda_\alpha = \lambda_\gamma$. Тогда $\gamma(a)$ однозначно определяется по $\alpha(a)$ и числам из набора Λ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся тем, что корень β , удовлетворяющий условию леммы 4 существует. Если $(\beta, \gamma) \neq 0$, то доказываемое утверждение получается, если лемму 4 применить сначала к α , β , а потом к β , γ .

Если $(\gamma, \beta) = 0$, то вместо корня γ необходимо рассмотреть $\gamma \pm \alpha$ и применить предыдущие рассуждения.

Теперь перейдем непосредственно к доказательству теоремы. Рассмотрим произвольное решение p , q системы (3.1). Возьмем вместо пары p , q пару p' , q' , где $p' = a + \epsilon p$, $q' = b + \epsilon q$. Легко видеть, что в силу линейности и однородности системы она также будет решением, причем для достаточно малого ϵ p' будет регулярным. Выберем некоторый корень α_0 , для которого $\alpha_0(p) \neq 0$. Домножим p' , q' на скаляр μ так, чтобы $\alpha_0(a) = \alpha_0(\mu p')$. Применяя доказанные выше леммы, получаем, что значения всех корней на $\mu p'$ и a определяются однозначно по набору Λ и значению α_0 . Таким образом, значения корней на $\mu p'$ и a совпадают, т.е. совпадают сами элементы. В свою очередь $\alpha(\mu q') = \lambda_\alpha \alpha(\mu p') = \lambda_\alpha \alpha(a) = \lambda(b)$. Отсюда $p = (\mu - \epsilon)a$, $q = (\mu - \epsilon)b$. Теорема доказана.

Второе утверждение, необходимое для доказательства, непосредственно связано с явным видом секционного оператора, описанным в предыдущем разделе.

ТЕОРЕМА 5. Пусть задан секционный оператор ϕ с параметрами a , b , где a – регулярный элемент из картановской подалгебры $\mathfrak{h}$, и $b \neq \lambda a$. Тогда множество таких $r \in \mathfrak{g}$, что оператор ad_r коммутирует с ϕ , совпадает с $\mathfrak{h}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим сразу, что по теореме 3 элемент b лежит в картановской подалгебре. Кроме этого из общего вида оператора ϕ , описанного в той же теореме, получаем, что ad_r коммутирует с ϕ для любого $r \in \mathfrak{h}$.

Докажем теперь утверждение в обратную сторону. Напомним, что V в случае регулярного a обозначает линейное подпространство в $\mathfrak{g}$, натянутое на все корневые вектора. Из теоремы 3 нам известно, что V и $\mathfrak{h}$ – инвариантные пространства для ϕ . Кроме того нам известно, что V распадается в прямую сумму собственных пространств, причем, так как $b \neq \lambda a$, не все собственные значения ϕ на V одинаковы. Будем обозначать через V_i подпространство, соответствующее собственному значению λ_i , а через Δ_i обозначим множество корней, корневые вектора которых попали в V_i . Считаем, что $\lambda_i \neq \lambda_j$. Из регулярности a и теоремы 3 немедленно вытекает, что Δ_i – линейные подмножества системы корней.

V_i – собственные пространства оператора ϕ на V , однако из-за наличия в определении оператора свободного параметра D собственное пространство, соответствующее собственному значению λ_i , может оказаться строго больше V_i . При этом, однако, так как картановская подалгебра $\mathfrak{h}$ инвариантна относительно ϕ , данное пространство целиком лежит в $V_i \oplus \mathfrak{h}$, по построению совпадающим с централизатором $b - \lambda_i a$. Рассмотрим $x \in V_i$. Если пара операторов коммутирует (в данном случае это ϕ и ad_r), то собственные подпространства одного инвариантны относительно другого, т.е. $\text{ad}_r x$ заведомо лежит в $V_i \oplus \mathfrak{h}$, т.е. $[b - \lambda_i a, \text{ad}_r x] = 0$. Благодаря этому равенству из тождества Якоби получаем

$$0 = \text{ad}_r[b - \lambda_i a, x] = [\text{ad}_r(b - \lambda_i a), x].$$

Теперь запишем r в базисе Вейля: $r = h_r + \sum_{\alpha \in \Delta} r_\alpha e_\alpha$, $h_r \in \mathfrak{h}$. Предыдущее равенство переписывается тогда в виде

$$[\text{ad}_r(b - \lambda_i a), x] = \sum_{\alpha \in \Delta \setminus \Delta_i} r_\alpha (\alpha(b) - \lambda_i \alpha(a)) [e_\alpha, x] = 0. \quad (3.3)$$

Пусть, без ограничения общности, r_α отличен от нуля для некоторого $\alpha \in \Delta_1$. Отсюда вытекает, что для этого корня выражение $\alpha(b) - \lambda_i \alpha(a)$ отлично от нуля.

Теперь положим $x = e_\beta$, где $\beta \in \Delta_i$, $i > 1$. Так как в выражении (3.3) все элементы $[e_\alpha, e_\beta]$ различны по свойству базиса Вейля [8], из равенства нулю этого выражения вытекает равенство нулю всех коммутаторов $[e_\alpha, e_\beta]$. Из этого же свойства базиса Вейля получаем, что $\alpha + \beta$ не корень, т.е. по утверждению 1 $(\alpha, \beta) = 0$. Отсюда вытекает, что Δ_1 содержит $\Delta \setminus \Pi_\alpha$, а по лемме 2 в силу линейности и всю Δ . Оператор ϕ на V в этом случае есть умножение на скаляр, т.е. $b = \lambda a$, что противоречит условию теоремы.

Теперь все готово, чтобы сформулировать и доказать основной результат данной работы.

ТЕОРЕМА 6. Пусть ϕ – секционный оператор с параметрами a, b , причем a – регулярный полупростой элемент $\mathfrak{h}$ и $b \neq \lambda a$. Тогда всякая другая пара параметров p, q для оператора ϕ получается из данной одновременным умножением элементов a, b на некоторый ненулевой скаляр, т.е. $p = \mu a$, $q = \mu b$ для некоторого $\mu \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим систему (3.1), где в качестве Λ взяты собственные значения оператора ϕ , т.е. корню α соответствует $\phi(e_\alpha) = \lambda_\alpha e_\alpha$ (так как $b \neq \lambda a$, не все числа набора Λ равны между собой). По формуле (2.2) получаем, что

$$\lambda_\alpha = \frac{\alpha(b)}{\alpha(a)},$$

что можно переписать в виде $\alpha(b) - \lambda_\alpha \alpha(a)$. Таким образом, пара a, b – решение системы (3.1).

Теперь заметим, что из леммы 3 вытекает, что ad_p коммутирует с ϕ , откуда по теореме 5 немедленно получаем, что $p \in \mathfrak{h}$. В свою очередь, из теоремы 3 мы получаем, что q лежит в центре централизатора $\mathfrak{g}^p$, т.е. также лежит в картановской подалгебре $\mathfrak{h}$. При этом алгебра распадается в прямую сумму $\mathfrak{g}^p$ и $V = \mathfrak{g}^{p^\perp}$. Из

второго пункта теоремы 3 получаем, что на пространстве V выполнено равенство $ad_a^{-1}ad_b = ad_p^{-1}ad_q$. Отсюда получаем, что пара p, q удовлетворяет системе (3.1), как и a, b , и из теоремы 4 немедленно вытекает доказываемое утверждение.

В заключение отметим, что для полупростых алгебр Ли данная теорема уже не является верной. Действительно, рассмотрим прямую сумму простых алгебр $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ и пару $a = a_1 + a_2, b = b_1 + b_2$ из картановской подалгебры $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2$, где a_i, b_i лежат в $\mathfrak{h}_i$ соответственно. Считаем теперь, что a_1, a_2 регулярные (откуда немедленно вытекает, что a также регулярен), $b_2 \neq 0$, а $b_1 = 0$. Рассмотрим определенный на $\mathfrak{g}$ секционный оператор ϕ с параметрами a, b (см. [6]). Легко видеть, что добавление к a элемента картановской подалгебры $\mathfrak{h}_1$ не меняет тождество (1.1), а полученный элемент непропорционален a .

4. Параметры подалгебр Мищенко–Фоменко. Рассмотрим алгебру $P(\mathfrak{g})$ многочленов от элементов алгебры $\mathfrak{g}$. Эта алгебра может интерпретироваться как алгебра полиномиальных функций на двойственном пространстве $\mathfrak{g}^*$. Помимо естественной структуры кольца над $\mathbb{C}$ алгебра $P(\mathfrak{g})$ снабжена скобкой Пуассона, которая на линейных функциях задается по формуле $\{x, y\} = [x, y]; x, y \in \mathfrak{g}^{**}$ (так как имеется естественное отождествление $\mathfrak{g}^{**}$ и $\mathfrak{g}$), а на остальные многочлены продолжается по тождеству Лейбница. Полученная алгебра носит название алгебры Пуассона–Ли. Форма Киллинга позволяет отождествить алгебру и коалгебру, поэтому элементы $P(\mathfrak{g})$ могут рассматриваться как полиномиальные функции на $\mathfrak{g}$.

Существует процедура (одна из возможных интерпретаций – метод сдвига аргумента [5] на простых комплексных алгебрах Ли $\mathfrak{g}$), которая позволяет сопоставить каждому элементу $a \in \mathfrak{g}$ (подчеркнем, что априори никакие условия на элемент не накладываются) коммутативную в смысле скобки Пуассона–Ли подалгебру $\mathcal{F}_a \subset P(\mathfrak{g})$, именуемую подалгеброй Мищенко–Фоменко. Опишем ее.

Рассмотрим кольцо полиномиальных инвариантов присоединенного представления простой комплексной алгебры $\mathfrak{g}$. Известно, что оно свободно порождено однородными полиномами и количество алгебраически независимых порождающих совпадает с рангом $\mathfrak{g}$. Выберем в данном кольце базис $I_1, \dots, I_n$ и для каждого элемента из этого базиса построим функции f_{ij} по правилу

$$I_i(a + \lambda x) = \sum_j \lambda^j f_{ij}(x). \quad (4.1)$$

Данные функции являются однородными полиномами и из работы [5] известно, что они коммутируют для произвольного элемента a относительно стандартной скобки Пуассона–Ли. Рассмотрим подалгебру в $P(\mathfrak{g})$, порожденную полиномами f_{ij} (т.е. алгебру, состоящую из всевозможных полиномов от f_{ij}). Легко видеть, что эта подалгебра коммутативна. Кроме этого, так как порождающие кольца инвариантов выражаются друг через друга полиномиальным образом, определение подалгебры Мищенко–Фоменко не зависит от выбора порождающих I_i , т.е. определяется элементом a . Отметим также, что в силу все той же свободной порожденности кольца инвариантов верно, что для любого инвариантного многочлена I коэффициенты g_j разложения $I(a + \lambda x) = \sum_j \lambda^j g_j$ лежат в $\mathcal{F}_a$.

ЛЕММА 6. Произвольная однородная квадратичная функция f из подалгебры Мищенко–Фоменко $\mathcal{F}_a$ имеет вид $f = (\phi x, x)$, где ϕ – некоторый секционный оператор

с параметрами a, b . В частности, квадратичные функции f_{i2} задаются секционными операторами ϕ_i с параметрами $a, \text{grad } I_i(a)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем сначала, что утверждение леммы выполняется для функции f_{i2} . Рассмотрим характеристическое тождество инвариантов присоединенного представления (см. [5]) $[\text{grad } I_i(x), x] = 0$, верное по построению для любого i . Подставим вместо x выражение $a + \lambda x$ и разложим правую часть получившегося равенства по λ :

$$0 = [\text{grad } f_{i1}, a] + \lambda([\text{grad } f_{i1}, x] + [\text{grad } f_{i2}, a]) + \dots \quad (4.2)$$

В силу полиномиальности инвариантов в правой части равенства стоит многочлен от λ , и, так как это тождество выполнено для всех λ , все его коэффициенты – тождественные нули, т.е. $[\text{grad } f_{i1}, x] + [\text{grad } f_{i2}, a] = 0$ (впервые тождества такого плана на простых комплексных алгебрах Ли рассматривались в работе [5]). Учитывая, что по построению в нашем разложении в ряд (4.1) $\text{grad } f_{i1} = \text{grad } I_i(a)$, а $\text{grad } f_{i2}$ в силу квадратичности и однородности имеет вид $\phi_i x$, где ϕ_i – некоторый оператор, действующий на $\mathfrak{g}$, получаем, что данное тождество переписывается в следующем виде:

$$[\phi_i x, a] = [x, \text{grad } I_i(a)].$$

Таким образом, оператор ϕ_i является секционным с параметрами $a, \text{grad } I_i(a)$ и для f_{i2} лемма доказана.

Теперь рассмотрим произвольную однородную квадратичную функцию $f \in \mathcal{F}_a$ и ее разложение $f = f_1 + f_2$, где f_1 – сумма f_{i2} с постоянными коэффициентами, а f_2 – квадратичный полином от f_{i1} . Рассмотрим выражение $[\text{grad } f, a] = [\text{grad } f_1, a] + [\text{grad } f_2, a]$. Из разложения (4.2) и тождества Лейбница вытекает $[\text{grad } f_2, a] = 0$. Таким образом, получаем, что ϕ является секционным с параметрами a, b , где b – линейная комбинация $\text{grad } I_i(a)$ с теми же коэффициентами, с которыми f_{i2} входят в разложение f . Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 7. Пусть подалгебры Мищенко–Фоменко $\mathcal{F}_a$ и $\mathcal{F}_p$ для произвольной простой комплексной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ совпадают, причем a – регулярный полупростой элемент. Тогда $p = \mu a$ для некоторого ненулевого μ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим два случая. Первый – ранг $\mathfrak{g}$ больше единицы. Для всех операторов ϕ_i пространство V (обозначение из теоремы 3) является инвариантным. Покажем, что среди данных операторов есть такие, что их ограничение на V не является скалярным. Пусть это не так и ϕ_i и ϕ_j оба являются операторами умножения на скаляры на V . Тогда найдется такое μ , что $\phi_i = \mu \phi_j$. В этом случае для произвольного $x \in \mathfrak{g}$ выполнено равенство $[x, \text{grad } I_i(a) - \mu \text{grad } I_j(a)] = 0$, а значит, в силу простоты алгебры градиенты $\text{grad } I_i(a)$ и $\text{grad } I_j(a)$ пропорциональны. В частности, зависимы дифференциалы dI_i , откуда немедленно следует [9], что a – сингулярный элемент алгебры $\mathfrak{g}$, что противоречит условию теоремы.

Выберем теперь среди $f_{i2} \in \mathcal{F}_a$ такую квадратичную функцию, что соответствующий оператор ϕ_i не является оператором умножения на скаляр. Эта однородная квадратичная функция лежит в $\mathcal{F}_p$, а значит, по лемме 6 оператор ϕ_i является секционным с параметрами p, q . Применяя теперь теорему 6, получаем требуемое.

Рассмотрим теперь случай, когда индекс алгебры Ли $\mathfrak{g}$ равен единице. Из классификации простых комплексных алгебр (см., например, [8]) вытекает, что $\mathfrak{g}$ – это в точности $\mathfrak{sl}(2)$. Из совпадения $\mathcal{F}_a$ и $\mathcal{F}_p$ вытекает, что совпадают подпространства линейных функций в этих подалгебрах алгебры Пуассона–Ли. В данном случае они одномерны и натянуты на (a, x) и (p, x) , откуда тривиальным образом следует утверждение теоремы. Таким образом, теоремы полностью доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. В. Трофимов, А. Т. Фоменко, “Групповые неинвариантные симплектические структуры и гамильтоновы потоки на симметрических пространствах”, Тр. сем. вект. и тенз. анализ., **21**, Изд-во Моск. ун-та, М., 1983, 23–83.
- [2] С. В. Манаков, “Замечание об интегрировании уравнений Эйлера динамики n -мерного твердого тела”, *Функц. анализ и его прил.*, **10:4** (1976), 93–94.
- [3] А. С. Мищенко, А. Т. Фоменко, “Интегрируемость уравнений Эйлера на полупростых алгебрах Ли”, Тр. сем. вект. и тенз. анализ., **19**, Изд-во Моск. ун-та, М., 1979, 3–94.
- [4] А. С. Мищенко, А. Т. Фоменко, “Интегрирование уравнений Эйлера на полупростых алгебрах Ли”, *Докл. АН СССР*, **231:3** (1976), 536–538.
- [5] А. С. Мищенко, А. Т. Фоменко, “Уравнения Эйлера на конечномерных группах Ли”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **42:2** (1978), 396–415.
- [6] А. Т. Фоменко, *Симплектическая геометрия. Методы и приложения*, Изд-во Моск. ун-та, М., 1988.
- [7] A. V. Bolsinov, V. Kiosak, V. S. Matveev, “A Fubini theorem for pseudo-Riemannian geodesically equivalent metrics”, *J. Lond. Math. Soc.* (2), **80:2** (2009), 341–356.
- [8] Дж. Хамфрис, *Введение в теорию алгебр Ли и их представлений*, МЦНМО, М., 2003.
- [9] B. Kostant, “Lie group representations on polynomial rings”, *Amer. J. Math.*, **85:3** (1963), 327–404.

А. Ю. Коняев

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: maodzund@bk.ru

Поступило

02.11.2007

Исправленный вариант

24.08.2010