Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Э. А. Назирова, Я. Т. Султанаев, Об индексах дефекта сингулярных дифференциальных операторов в вырожденном случае, *Матем. заметки*, 2002, том 71, выпуск 1, 144–147

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm638>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 14:02:58

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ОБ ИНДЕКСАХ ДЕФЕКТА СИНГУЛЯРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ВЫРОЖДЕННОМ СЛУЧАЕ

Э. А. Назирова, Я. Т. Султанаев

1. Одной из центральных задач спектральной теории сингулярных обыкновенных дифференциальных операторов является исследование спектральных свойств минимального дифференциального оператора L_0 , порожденного в $L^2[0, \infty)$ дифференциальным выражением

$$ly = (-1)^n y^{(2n)} + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k (p_{n-k}(x) y^{(k)})^{(k)} \quad (1)$$

в зависимости от поведения коэффициентов $p_k(x)$. Практически полностью исследованным является случай одинакового роста корней соответствующего характеристического уравнения (см. библиографию в [1]). Если же корни характеристического уравнения ведут себя на бесконечности по-разному, задача становится существенно сложнее и называется *вырожденной*. Настоящая статья посвящена исследованию вырожденного случая.

Пусть

$$ly = (-1)^n y^{(2n)} + \sum_{k=l}^{n-1} (-1)^k (p_{n-k}(x) y^{(k)})^{(k)}. \quad (2)$$

Тогда уравнению $ly = \lambda y$, $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$, соответствует характеристический многочлен

$$F(x, \lambda, \mu) = \mu^{2n} + \sum_{k=1}^{n-l} (-1)^k p_k(x) \mu^{2n-2k} - (-1)^n \lambda. \quad (3)$$

Если теперь $|p_k(x)| \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow \infty$, то часть корней характеристического многочлена (3) стремится к нулю при $x \rightarrow \infty$; обозначим их $\mu_1(x, \lambda), \dots, \mu_{2l}(x, \lambda)$, а остальные корни $\mu_{2l+1}(x, \lambda), \dots, \mu_{2n}(x, \lambda)$ неограниченно растут. Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнены следующие условия: существуют положительные постоянные a, b, c, c_k, C_k такие, что при достаточно большом $x_0 > 0$ и при $x \geq x_0$

1) для любой пары i, j , $i, j = 2l+1, \dots, 2n$, имеет место оценка

$$a \leq \left| \frac{\mu_i(x, \lambda)}{\mu_j(x, \lambda)} \right| \leq b;$$

Работа первого автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 01-01-00996а, работа второго автора выполнена при поддержке проекта "Ведущие научные школы", грант № 96-15-96091.

- 2) при $x > x_0$ $|p_{n-l}| \geq cx^{2l+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$;
 3) при $x > x_0$ p'_{n-l} сохраняет знак и при $x \rightarrow \infty$

$$|p'_k(x)| \leq c_k |p'_{n-l}| \cdot |p_{n-l}^{-1+k/(n-l)}|;$$

- 4) при $x > x_0$ для $l = 1, \dots, n-l$

$$|p''_k| \leq C_k p'^2_{n-l}(x) |p_{n-l}^{-2+k/(n-l)}(x)|;$$

- 5) для $x \geq x_0$ и $i, j = 2l+1, \dots, 2n$, $i \neq j$, $\operatorname{Re}(\mu_j(x, \lambda) - \mu_k(x, \lambda))$ не меняет знак.

Тогда уравнение (1) имеет $2n$ линейно независимых решений $y_1(x, \lambda), \dots, y_{2n}(x, \lambda)$ таких, что при $x \rightarrow \infty$ справедливы следующие асимптотические формулы:

$$\begin{aligned} y_i^{[k]}(x, \lambda) &\sim \alpha_i(x, \lambda) \mu_i^k(x, \lambda) p_{n-l}^{(-1)^i(2n-2i+1)}(x), \\ y_i^{[n+k]}(x, \lambda) &\sim \alpha_i(x, \lambda) \mu_i^{n-k}(x, \lambda) \sum_{m=0}^k (-1)^m p_{k-m}(x) \mu_i^{2m}(x, \lambda) p_{n-l}^{(-1)^i(2n-2i+1)}(x), \\ i &= 1, \dots, 2l, \quad k = 1, \dots, n-1, \\ y_i^{[k]}(x, \lambda) &\sim \alpha_i(x, \lambda) \mu_i^k(x, \lambda) \exp \int_{x_0}^x \mu_i(t, \lambda) dt, \\ y_i^{[n+k]}(x, \lambda) &\sim \alpha_i(x, \lambda) \mu_i^{n-k}(x, \lambda) \sum_{m=0}^k (-1)^m p_{k-m}(x) \mu_i^{2m}(x, \lambda) \exp \int_{x_0}^x \mu_i(t, \lambda) dt, \\ i &= 2l+1, \dots, 2n, \quad k = 1, \dots, n-1, \end{aligned}$$

$$\text{где } \alpha_i(x, \lambda) = [\partial F(x, \lambda, \mu_i) / \partial \mu]^{-1/2}.$$

Наметим идею доказательства теоремы 1. Как и в работах [1], [2], вводится вектор Y , состоящий из квазипроизводных функции y , соответствующих дифференциальному выражению (2) (см. [3]). Полученная система первого порядка $Y' = A(x, \lambda)Y$ с помощью подходящего невырожденного преобразования приводится к L -диагональному виду: $Z' = \Lambda Z + DZ$, где Λ – диагональная матрица, а D – суммируемая на $[0, \infty)$ матрица.

Заметим, что асимптотические формулы для убывающих корней характеристического уравнения отличаются от формул для растущих корней, совпадающих с формулами М. В. Федорюка. Дело в том, что в формулах для $y^{[k]}(x, \lambda)$, $i = 1, \dots, 2l$, в экспонентах вместо $\mu_i(x, \lambda)$ участвуют некие их специальным образом подобранные регуляризации (см. [2], [4]). Что касается условий на коэффициенты $p_k(x)$, то они означают, что все $p_k(x)$ удовлетворяют условиям регулярности роста Титчмарша–Левитана, и выполняются, если, например, коэффициенты являются степенными функциями, экспонентами или квазимногочленами.

Асимптотическое поведение решений уравнения $ly = \lambda y$ при $x \rightarrow \infty$, где ly определяется соотношением (2), исследовалось различными авторами [4]–[8].

В [5] и [6] рассматривался случай $n = 2$, когда коэффициенты являются степенными функциями и основной вклад в асимптотические формулы вносит функция $p_1(x)$. В [4] изучалось уравнение (2), $l = 1$, коэффициенты которого суть степенные функции, удовлетворяющие условиям подчинения $p_{r+1}(x)p_{r-1}(x) = o(p_r^2(x))$ при $x \rightarrow \infty$ для всех r . При этом предполагалось, что $p_n(x)$ имеет степенной рост на бесконечности. В нашем случае на коэффициенты накладываются более общие требования регулярности Титчмарша–Левитана.

2. Асимптотические формулы теоремы 1 позволяют в некоторых случаях судить об индексах дефекта оператора L_0 .

ПРИМЕР 1. Пусть $p_{n-l}(x)$ – положительная дважды непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая условиям 2)–4), $\lambda = i$. Пусть для $k = 1, \dots, n-l-1$

$$p_k(x) = d_k p_{n-l}^{k/(n-l)}(x),$$

где d_k – вещественные постоянные. Понятно, что $p_k(x)$ также удовлетворяют условиям теоремы 1. Сделаем в уравнении (3) замену $\mu = s p_{n-l}^{1/(2n-2l)}(x)$. Тогда придем к уравнению

$$s^{2l} \left[s^{2n-2l} + \sum_{k=1}^{n-l} (-1)^k d_k s^{2n-2k-2l} \right] = (-1)^n \frac{i}{p_{n-l}^{n/(n-2)}(x)}.$$

Так как в правой части стоит бесконечно малая при $x \rightarrow \infty$ функция, то ровно $2l$ корней последнего уравнения стремятся к нулю; обозначим их $s_1, \dots, s_{2l}$, а остальные корни ведут себя при $x \rightarrow \infty$ как корни однородного уравнения

$$s^{2n-2l} + \sum_{k=1}^{n-l} (-1)^k d_k s^{2n-2k-2l} = 0, \quad c_{n-l} = 1. \quad (4)$$

Уравнение (4) имеет ровно $2n-2l$ решений $s_i, i = 2l+1, \dots, 2n$. Таким образом, растущие корни уравнения (3) при $x \rightarrow \infty$ удовлетворяют соотношению

$$\mu_i(x, \lambda) \sim s_i p_{n-l}^{1/(2n-2l)}(x), \quad i = 2l+1, \dots, 2n.$$

Предположим, что ровно $2r$ из них чисто мнимые. Тогда вещественная часть половины из оставшихся $(2n-2l-2r)$ корней положительна, а у другой половины отрицательна.

Из асимптотических формул теоремы 1 следует, что решения, соответствующие корням с положительной вещественной частью, не суммируемы с квадратом на $[0, \infty)$, а соответствующие корням с отрицательной вещественной частью суммируемы с квадратом на $[0, \infty)$. Что касается решений, соответствующих чисто мнимым корням уравнения (3), то в этом случае требуется более точное исследование их поведения на бесконечности.

Положим $s_j = s_j^0 + s_j^1 p_{n-l}^\beta$ и подставим в уравнение (3). Получим $\beta = -2n/(2n-2l)$, откуда

$$\mu_j(x, \lambda) \sim s_i^0 p_{n-l}^{1/(2n-2l)}(x) (1 + O(p_{n-l}^\beta)), \quad j = 2l+1, \dots, 2n.$$

Так как $\operatorname{Re}(s_1^j) \neq 0$, то суммируемость с квадратом y_j при $j = 2l+1, 2l+2$ будет зависеть от сходимости или расходимости интеграла

$$\int_{x_0}^{\infty} p_{n-l}^{(1-2n)/(2n-2l)}(t) dt.$$

Последний интеграл сходится в силу условия 2). Таким образом, приходим к следующей теореме.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $p_k(x) = d_k p_{n-l}^{k/(n-l)}(x)$, $k = 1, \dots, n-l-1$, p_{n-l} – положительная функция, причем выполнены условия 1)–5). Тогда индексы дефекта минимального дифференциального оператора L_0 , порожденного в $L_2(0, \infty)$ выражением (2) на положительной полуоси, равны $(n+r, n+r)$.

ПРИМЕР 2. Пусть p_{n-l} – положительная функция, начиная с некоторого x_0 , и $p_k(x) = 0$, $k = 1, \dots, n-l-1$, $\lambda = i$. Перепишем характеристическое уравнение в виде

$$s^{2n} + (-1)^{n-l} s^{2l} = (-1)^n i p_{n-l}^{-2n/(2n-2l)}, \quad (5)$$

где $s =: \mu/p_{n-l}^{1/(2n-2l)}$. Очевидно, что ровно $2l$ корней уравнения (5) стремятся к нулю при $x \rightarrow \infty$, причем $\operatorname{Re}(s_i) \neq 0$, так как

$$s_i = \sqrt[2l]{i(-1)^l p_{n-l}^{-n/l(2n-2l)}}, \quad i = 1, \dots, 2l.$$

Из асимптотических формул теоремы 1 для решений y_i , $i = 1, \dots, 2l$, следует, что ровно половина из них является суммируемой с квадратом на $[x_0, \infty)$, другая половина не суммируема с квадратом на $[x_0, \infty)$. Остальные s_j , $j = 2l + 1, \dots, 2n$, ведут себя как корни уравнения

$$s^{2n-2l} + (-1)^{n-l} = 0, \quad (6)$$

$$s_i = \sqrt[n-l+1]{(-1)^{n-l+1}}, \quad i = 2l + 1, \dots, 2n.$$

Предположим, что $(n - l + 1)$ – четное число. Тогда $n - l$ – нечетное и $s_i = \sqrt[n-l+1]{(\pm 1)}$ для $i = 2l + 1, \dots, 2n$. Следовательно, половина корней (6) имеет положительную вещественную часть, половина – отрицательную. В этом случае, так как функции $\mu_i(x, \lambda)$ для $i = 2l + 1, \dots, 2n$ не суммируемы, индексы дефекта минимального дифференциального оператора, соответствующего выражению (2), суть (n, n) .

В другом случае $n - l$ – четное число и $s_j = \sqrt[n-l]{(\pm i)}$ для $j = 2l + 1, \dots, 2n$. Получаем, что и в этом случае половина корней имеет положительную вещественную часть, половина – отрицательную. Таким образом, доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $p_k = 0$, $k = 1, \dots, n - l - 1$, p_{n-l} – положительная функция, для которой выполнены условия 1)–4). Тогда индексы дефекта минимального дифференциального оператора L_0 , порожденного в $L_2(0, \infty)$ выражением (1), суть (n, n) .

Пусть теперь $p_{n-l}(x)$ – отрицательная функция, начиная с некоторого x_0 . Тогда уравнение на s_j , $j = 2l + 1, \dots, 2n$, примет вид

$$s^{2n-2l} - (-1)^{n-l} = 0, \quad (7)$$

$$s_i = \sqrt[n-l]{(-1)^{n-l}}, \quad i = 2l + 1, \dots, 2n.$$

Теперь при любой четности $(n - l)$ уравнение (7) имеет ровно два мнимых корня, и для рассмотрения соответствующих им решений нужно повторить рассуждения примера 1. Таким образом, справедлива

ТЕОРЕМА 4. Пусть $p_k = 0$, $k = 1, \dots, n - l - 1$, p_{n-l} – отрицательная функция, для которой выполнены условия 1)–4). Тогда индексы дефекта минимального дифференциального оператора L_0 , порожденного в $L_2(0, \infty)$ выражением (2), суть $(n + 1, n + 1)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Федорюк М. В. // Тр. ММО. 1966. Т. 15. С. 296–345.
2. Султанаев Я. Т. // Тр. семинара им. Петровского. 1988. № 13. С. 36–55.
3. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.
4. Eastham M. S. P., Grudniewicz C. G. M. // J. London Math. Soc. Ser. 2. 1981. V. 24. № 2. Р. 256–271.
5. Grudniewicz C. G. M. // Proc. Roy. Soc. Edinb. Sec. A. 1980. V. 87. Р. 53–63.
6. Аникеева Л. И. // УМН. 1977. Т. 32. № 2. С. 179–180.
7. Аникеева Л. И. // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1976. № 6. С. 44–52.
8. Федорюк М. В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1983.

Башкирский государственный университет, г. Уфа
 E-mail: NazirovaEA@ic.bashedu.ru,
 SultanayevYT@bsu.bashedu.ru

Поступило
 01.06.2001