Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Г. Крыжевич, Об асимптотических свойствах решений систем с малой нелинейностью в окрестности особой точки, *Матем. заметки*, 2004, том 75, выпуск 5, 683–692

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm64>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 16:56:28

УДК 517.926.4

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ С МАЛОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ В ОКРЕСТНОСТИ ОСОБОЙ ТОЧКИ

С. Г. Крыжевич

Рассматриваются классы так называемых слабо гиперболических линейных систем, включающие в себя как правильные, так и гиперболические (экспоненциально-дихотомичные) системы. Получены результаты об условной устойчивости решений, обобщающие ряд классических теорем. Показывается существование устойчивых поверхностей, точкам которых соответствуют решения исходной системы с отрицательными показателями Ляпунова. Исследуется поведение решений, начинающихся вне устойчивых поверхностей. Используются методы, схожие с теми, что применяются в теории гиперболических систем.

Библиография: 7 названий.

Изучается задача о поведении решений нелинейной системы в окрестности точки покоя. Рассмотрим систему

$$\dot{x} = A(t)x \quad (0.1)$$

размерности n с кусочно-непрерывными при $t \geq t_0$ матрицами коэффициентов и систему

$$\dot{x} = A(t)x + f(t, x), \quad (0.2)$$

получаемую из (0.1) добавлением нелинейных возмущений $f(t, x)$, удовлетворяющих условию $f(t, 0) \equiv 0$.

Пусть пространство решений системы (0.1), экспоненциально стремящихся к нулю при $t \rightarrow +\infty$, имеет размерность k . Возникает вопрос: при каких условиях на матрицу A и нелинейность f для системы (0.2) найдется k -мерное многообразие начальных данных при $t = t_0$, которым соответствуют решения, экспоненциально стремящиеся к нулю при $t \rightarrow \infty$. В случае, когда система (0.1) правильна, а нелинейность f аналитична и ее ряд Тейлора начинается с членов второго порядка малости, существование устойчивого многообразия было установлено А. М. Ляпуновым [1]. Для систем с гиперболическим линейным приближением и возмущением f , удовлетворяющим в окрестности нуля условию Липшица с малой константой, аналогичный результат был установлен О. Перроном [2] (см. также [3, гл. 1]). Д. М. Гробман [4] получил аналогичный результат для систем с правильной линейной частью и экспоненциально стремящейся к нулю

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-01-00683, программы "Ведущие научные школы", грант № 00-15-96021, а также Министерства Образования России и Правительства Санкт-Петербурга, грант № PD03-1.1-142.

нелинейностью. В статьях [5] и [6] автору удалось, введя новые классы слабо гиперболических линейных систем, включающие в себя гиперболические и правильные системы, доказать теоремы об условной устойчивости по первому приближению, обобщающие результаты Ляпунова, Перрона и Гробмана. Формулировки этих теорем приведены в разделах 1 и 2 настоящей статьи.

Основные результаты содержатся в разделе 3. В статье Перрона показано, что все решения системы с гиперболической линейной частью, начинающиеся вне устойчивого многообразия, покидают с течением времени достаточно малую окрестность начала координат. Оказывается, при различных предположениях на нелинейное возмущение f , аналогичные результаты можно получить и для систем со слабо гиперболической линейной частью. Это дает мощный инструмент для вычисления характеристических показателей решений нелинейных систем.

1. Определение и свойства слабо гиперболических систем. Обозначим символом $\|\cdot\|$ некоторую векторную норму в $\mathbb{R}^n$ и соответствующую ей матричную норму. Условимся считать, что $\|x\| = \max(|x_i|)$, где $x = \text{col}(x_1, \dots, x_n)$. Обозначим также через $\chi(\cdot)$ характеристический показатель Ляпунова определенный для функций, вектор-функций и матриц по следующей формуле [7]:

$$\chi(f) = \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln \|f(t)\|.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Назовем систему (0.1) *слабо гиперболической с константами* $\lambda > 0$ и $\varepsilon \geq 0$, если существует такое число $K > 0$, что для любой измеримой вектор-функции $g: [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$, удовлетворяющей при почти всех $t \geq t_0$ оценке

$$\|g(t)\| \leq \exp(-\lambda(1 + \varepsilon)t),$$

у линейной неоднородной системы

$$\dot{x} = A(t)x + g(t) \tag{1.1}$$

существует решение $\varphi(t)$ такое, что

$$\|\varphi(t)\| \leq K \exp(-\lambda t) \quad \text{при } t \geq t_0. \tag{1.2}$$

Обозначим введенный выше класс систем через $\text{WH}(\lambda, \varepsilon)$.

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть система (0.1) гиперболическа (экспоненциально-дихотомична). Тогда существует такое число $\lambda_0 > 0$, что эта система принадлежит классу $\text{WH}(\lambda, 0)$ при любом выборе $\lambda \in (0, \lambda_0)$.

ТЕОРЕМА 1.2. Если система (0.1) имеет коэффициент неправильности Гробмана, меньший $\lambda\varepsilon$ для некоторых положительных λ и ε , то данная система принадлежит классу $\text{WH}(\lambda, \varepsilon)$.

Для любого числа $\mu > 0$ обозначим через $\exp(-\mu t)\mathbb{L}^\infty$ пространство вектор-функций, представимых в виде произведения ограниченной измеримой вектор-функции на $\exp(-\mu t)$. Введем норму в пространствах $\exp(-\mu t)\mathbb{L}^\infty$ по формуле

$$\|g\| = \text{ess sup}_{t \geq t_0} (\exp(\mu t) \|g(t)\|).$$

ТЕОРЕМА 1.3. Пусть система (0.1) слабо гиперболична с некоторыми константами λ и ε . Тогда существуют число $C > 0$ и непрерывный линейный оператор

$$\mathcal{L}: \exp(-\lambda(1+\varepsilon)t)\mathbb{L}^\infty \rightarrow \exp(-\lambda t)\mathbb{L}^\infty$$

такие, что если выполняется неравенство

$$\|g(t)\| \leq \exp(-\lambda(1+\varepsilon)t), \quad (1.3)$$

то функция $\mathcal{L}g(t)$ является решением системы (1.1) и

$$\|\mathcal{L}g(t)\| \leq C \exp(-\lambda t). \quad (1.4)$$

2. Условная устойчивость нулевых решений систем со слабо гиперболической линейной частью. Выберем некоторый мультииндекс $l = (l_1, \dots, l_n)$ и вектор $x = \text{col}(x_1, \dots, x_n)$. Введем следующие обозначения:

$$|l| = \sum_{i=1}^n l_i, \quad l! = l_1! \cdots l_n!, \quad x^l = x_1^{l_1} \cdots x_n^{l_n}, \quad \frac{\partial^{|l|} f}{\partial x^l} = \frac{\partial^{|l|} f}{\partial x_1^{l_1} \cdots \partial x_n^{l_n}}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Пусть U – некоторая окрестность начала координат в $\mathbb{R}^n$,

$$f: [t_0, \infty) \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$$

– отображение, непрерывное по t и C^1 -гладкое по x , $\alpha > 1$ – вещественное число и N – наибольшее натуральное число, строго меньшее α . Будем говорить, что отображение f имеет порядок малости α по x , если в окрестности U выполнены следующие условия:

- 1) $f(t, 0) = 0$ для любых $t \geq t_0$;
- 2) $f \in C_x^N$ и для любого мультииндекса l такого, что $|l| \leq N$, выполнено

$$\frac{\partial^{|l|} f}{\partial x^l}(t, 0) = 0;$$

- 3) существует число $L > 0$ такое, что для любого мультииндекса l , для которого $|l| = N$, и произвольного $t \geq t_0$ выполнено условие Гёльдера: для любых $x_1, x_2 \in U$

$$\left\| \frac{\partial^{|l|} f}{\partial x^l}(t, x_1) - \frac{\partial^{|l|} f}{\partial x^l}(t, x_2) \right\| \leq L \|x_1 - x_2\|^{\alpha-N}. \quad (2.1)$$

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть числа λ , σ и ε положительны, а система (0.1) принадлежит классу $WH(\lambda, \varepsilon)$. Предположим, что для системы (0.2), определенной на множестве

$$\Omega = \{t, x: t \geq t_0, \|x\| < \sigma\},$$

выполнены следующие условия:

- 1) отображение f имеет порядок малости не менее $1 + \varepsilon$ по x в некоторой окрестности U начала координат в $\mathbb{R}^n$;
- 2) если $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ – характеристические показатели системы (0.1), то для некоторого $0 \leq k \leq n$ справедливы неравенства

$$\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_k < -\lambda < \lambda_{k+1} \leq \dots \leq \lambda_n. \quad (2.2)$$

Если системы (0.1) и (0.2) удовлетворяют перечисленным выше условиям, а M – наибольшее натуральное число, строго меньшее $1 + \varepsilon$, то существует C^M -гладкое и взаимно однозначное отображение g окрестности нуля из $\mathbb{R}^k$ в $\mathbb{R}^n$ такое, что

- 1) $g(0) = 0$;
- 2) если $\Phi(t) = (X_1(t), \dots, X_n(t))$ – нормальная фундаментальная система решений (0.1) такая, что характеристические показатели вектор-функций

$$X_1(t), \dots, X_n(t)$$

равны $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ соответственно, а J – матрица Якоби отображения g в точке 0, то $J = (X_1(t_0), \dots, X_k(t_0))$;

- 3) для любого x_0 , для которого $\|x_0\| < \sigma$, и для которого существует вектор $y_0 \in \mathbb{R}^k$ такой, что $x_0 = g(y_0)$, решение системы (0.2) с начальными данными $x(t_0) = x_0$ имеет при $t \rightarrow +\infty$ характеристический показатель, не превосходящий $-\lambda$.

Полностью доказательство этого утверждения, равно как и теоремы 2.2, изложено в работе [6]. Отметим, однако, некоторые моменты доказательства, необходимые для дальнейших рассуждений.

Построим приближенные решения системы (0.2) по следующему алгоритму. Возьмем некоторый достаточно малый по норме вектор $y = \text{col}(y_1, \dots, y_k) \in \mathbb{R}^k$ и введем в рассмотрение последовательность вектор-функций

$$\{X^{(m)}(t, y)\} = X^{(1)}(t, y), X^{(2)}(t, y), \dots, X^{(m)}(t, y), \dots$$

Первый ее член представим в виде линейной комбинации столбцов матрицы $\Phi(t)$ с характеристическими показателями, меньшими числа $-\lambda$:

$$X^{(1)}(t, y) = \sum_{r=1}^k y_r X_r(t).$$

Вектор-функции $X^{(m)}(t, y)$ последовательно определяются по формулам

$$X^{(m+1)}(t, y) = X^{(1)}(t, y) + \mathcal{L}[f(\cdot, X^{(m)}(\cdot, y))](t). \quad (2.3)$$

В предположении $X^{(0)}(t, y) \equiv 0$ была доказана следующая лемма.

ЛЕММА 2.1. Пусть

$$D = \sup_{t \geq t_0} \max_{i \leq k} \|X_i(t)\| \exp(\lambda t). \quad (2.4)$$

Для любого $q \in (0, 1)$ существует $\delta > 0$ такое, что если $\|y\| \leq \delta$, то последовательные приближения $X^{(2)}(t, y), X^{(3)}(t, y), \dots, X^{(m)}(t, y), \dots$, получаемые по формулам (2.3), определены и имеют характеристические показатели, не большие $-\lambda$. Для любых $m \geq 1, t \geq t_0$ и произвольных векторов y таких, что $\|y\| \leq \delta$, верна оценка

$$\|X^{(m)}(t, y) - X^{(m-1)}(t, y)\| \leq Dq^{m-1} \exp(-\lambda t) \|y\|, \quad m \geq 2. \quad (2.5)$$

Итак, последовательность $X^{(m)}(t, y)$ сходится к непрерывной функции $X^*(t, y)$ равномерно по всем $t \in [t_0, \infty)$, причем при достаточно малых по норме y функции $X^*(\cdot, y)$ являются решениями системы (0.2) с характеристическими показателями, не превосходящими $-\lambda$. Отображение g из условия теоремы можно определить по формуле $g(t) = X^*(t_0, y)$.

Рассмотрим систему (0.2) с таким возмущением $f(t, x)$, что $f(t, 0) \equiv 0$, и вместо рассмотренного выше условия малости на множестве Ω из условия теоремы 2.1 выполнено условие Липшица

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq L(t) \|x_1 - x_2\| \quad (2.6)$$

для любых $t \geq t_0, x_1, x_2 \in U$.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть $\lambda > 0, \varepsilon \geq 0$, система (0.1) принадлежит классу $WH(\lambda, \varepsilon)$, и число k таково, что ее характеристические показатели удовлетворяют (2.2). Пусть, кроме того, для возмущения f выполнено условие (2.6), причем

$$L(t) < l \exp(-\lambda \varepsilon t). \quad (2.7)$$

Тогда найдется такое $l_0 > 0$, что для всех $0 < l \leq l_0$ существует непрерывное отображение h некоторой окрестности нуля из $\mathbb{R}^k$ в $\mathbb{R}^n$ такое, что

- 1) $h(0) = 0$;
- 2) $\|h(y_1) - h(y_2)\| \leq Dl \|y_1 - y_2\|$, причем константа D зависит только от свойств системы (0.1);
- 3) если $J = (X_1(t_0), \dots, X_k(t_0))$, то для любого x_0 такого, что $\|x_0\| < \sigma$, для которого существует такое $y_0 \in \mathbb{R}^k$, что $x_0 = g(y_0) = Jy_0 + h(y_0)$, решение системы (0.2) с начальными данными $x(t_0) = x_0$ имеет при $t \rightarrow +\infty$ характеристический показатель, не превосходящий $-\lambda$.

В основе доказательства лежит метод последовательных приближений (2.3). Оказывается, что при малых l все последовательные приближения определены и при любых t удовлетворяют оценкам

$$\|X^{(m)}(t, y)\| \leq D \|y\| \exp(-\lambda t), \quad (2.8)$$

где

$$D = 2C \sup_{\substack{t \geq t_0 \\ 0 \neq y \in \mathbb{R}^k}} \frac{\|X^{(1)}(t, y)\|}{\|y\|} \exp(\lambda t). \quad (2.9)$$

3. Поведение решений возмущенной системы, начинающихся вне устойчивого многообразия. Пусть система (0.1) принадлежит классу $WH(\lambda, \varepsilon)$. Обозначим через $U^+(s)$ пространство значений при $t = s$ решений системы (0.1), имеющих характеристический показатель, меньший $-\lambda$. Пусть, кроме того, для системы (0.2) выполнены условия теоремы 2.1 или теоремы 2.2, причем система (0.2) во всей своей области определения удовлетворяет условию существования и единственности решений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Определим для системы (0.2), пользуясь обозначениями теоремы 2.1, *многообразие, устойчивое в положительном направлении*, по формуле

$$W_{loc}^s(t_0, \lambda, \varepsilon) = \{x_0 \in \mathbb{R}^n : \|x_0\| < \sigma, \quad x_0 = g(y_0) \text{ для некоторого } y_0\}.$$

Обозначим для любых $t, \tau \geq t_0$, $x_0 \in U$ символом $x(t, \tau, x_0)$ решение системы (0.2) с начальными данными $x(\tau) = x_0$. Определим *глобальное устойчивое многообразие* системы (0.2) по формуле

$$W^s(t_0, \lambda, \varepsilon) = \bigcup_{t \geq t_0} \{x_0 \in \mathbb{R}^n : x(t, t_0, x_0) \in W_{loc}^s(t, \lambda, \varepsilon)\}.$$

Рассмотрим для произвольного $t \geq t_0$ отображение $g_t: V_t \rightarrow \mathbb{R}^n$, определенное по формуле

$$g_t(y) = X^*(t, y),$$

существующее в силу теоремы 2.1 или теоремы 2.2.

Заметим, что из построения отображений g_t следует, что

$$g_t(y) = x(t, \tau, g_{t_0}(y))$$

для любых $t \geq \tau \geq t_0$, $y \in \mathbb{R}^k$, для которых определена правая часть этого равенства. Таким образом, можно доопределить отображение $g = g_{t_0}$ следующим образом. Выбираем для фиксированного $y \in \mathbb{R}^k$ число T столь большим, что отображения $g_t(y)$ были определены для любых $t \geq T$ (если такое число T для этого y существует). Положим

$$g(y) = x(t_0, T, g_T(y)),$$

если выражение в правой части этого равенства определено (данное решение может покинуть с убыванием времени множество U , где определена система (0.2)). Аналогичным образом можно доопределить отображения g_t для любого $t \geq t_0$.

Исследуем поведение решений, не проходящих при $t = t_0$ через $W^s(t_0, \lambda, \varepsilon)$. В последующих рассуждениях будем использовать те же идеи, что применяются при исследовании гиперболических систем.

ЛЕММА 3.1. Пусть для системы (0.2) выполнены условия теоремы 2.2, где число l достаточно мало. Тогда для любого числа $\tau \geq t_0$ и любого вектора $c \in U^+(\tau)$ система

$$x(t) = \Phi(t, \tau)c + \mathcal{L}[f(\cdot, x(\cdot))](t) \quad (3.1)$$

имеет не более одного решения $\varphi(t)$, для которого функция $\exp(\lambda t)\|\varphi(t)\|$ ограничена при $t \geq \tau$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ – два решения (3.1), удовлетворяющих условиям леммы. Введем обозначение

$$\alpha = \sup_{t \geq \tau} \exp(\lambda t) \|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|.$$

По условию $0 \leq \alpha < +\infty$. Поскольку $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ – решения системы (3.1), выполнено $\varphi_i(t) = \Phi(t, \tau)c + \mathcal{L}[f(\cdot, \varphi_i(\cdot))(t)]$ при $i \in \{1, 2\}$, откуда следует, что

$$\varphi_1(t) - \varphi_2(t) = \mathcal{L}[f(\cdot, \varphi_1(\cdot)) - f(\cdot, \varphi_2(\cdot))](t).$$

Из формул (2.6) и (2.7) следует, что для любого $t \geq \tau$

$$\|f(t, \varphi_1(t)) - f(t, \varphi_2(t))\| \leq l \exp(-\lambda \varepsilon t) \|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\| \leq l \alpha \exp(-\lambda(1 + \varepsilon)t),$$

откуда вытекает, что $\|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\| \leq Cl \alpha \exp(-\lambda t)$, где C – норма оператора $\mathcal{L}$. Но если число l было выбрано таким, что $Cl \leq 1/2$, то $\|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\| \exp(\lambda t) \leq \alpha/2$. Переходя в последнем неравенстве к супремуму по $t \geq \tau$, получаем, что $\alpha \leq \alpha/2$ и, следовательно, $\alpha = 0$, так как $\alpha \geq 0$. Значит, $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$, что и требовалось доказать.

ЛЕММА 3.2. Для любой системы (0.2), удовлетворяющей условиям теоремы 2.1, существует $\beta > 0$ такое, что для любых $\tau \geq t_0$ и $c \in U^+(\tau)$ система (3.1) имеет не более одного решения $\varphi(t)$, для которого

$$\|\varphi(t)\| \leq \beta \exp(-\lambda t). \quad (3.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ и α по аналогии с доказательством предыдущей леммы. Отметим, что, так как $\|\varphi_i(t)\| \leq \beta \exp(-\lambda t)$, справедливо неравенство

$$\alpha \leq 2\beta. \quad (3.3)$$

Из формулы Тейлора для вектор-функции f получаем

$$\begin{aligned} \|f(t, \varphi_1(t)) - f(t, \varphi_2(t))\| &\leq \sum_{r=1}^{M-1} \sum_{|l|=r} \frac{n^{M-r}}{l!} L \|\varphi_2(t)\|^{1+\varepsilon-r} \|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|^r \\ &\quad + \sum_{|l|=M} \frac{1}{l!} L \max\{\|\varphi_1(t)\|, \|\varphi_2(t)\|\}^{1+\varepsilon-M} \|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|^M \\ &\leq \sum_{r=1}^M \sum_{|l|=r} L \frac{n^{M-r}}{l!} \beta^{1+\varepsilon-r} \alpha^r \exp(-\lambda(1 + \varepsilon)t) \\ &\quad \text{по формуле (3.3)} \\ &\leq \beta^\varepsilon \alpha L \sum_{r=1}^M n^{M-r} 2^{r-1} \sum_{|l|=M} \frac{1}{l!} \exp(-\lambda(1 + \varepsilon)t), \end{aligned} \quad (3.4)$$

откуда

$$\|\mathcal{L}[f(\cdot, \varphi_1(\cdot)) - f(\cdot, \varphi_2(\cdot))](t)\| \leq \tilde{C} \beta^\varepsilon \alpha \exp(-\lambda t), \quad (3.5)$$

где

$$\tilde{C} = CL \sum_{r=1}^M n^{M-r} 2^{r-1} \sum_{|l|=M} \frac{1}{l!}. \quad (3.6)$$

Тогда, выбирая достаточно малое β , получаем $\|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\| \leq \alpha \exp(-\lambda t)/2$, откуда, как и при доказательстве леммы 3.1, следует, что $\varphi_1(t) \equiv \varphi_2(t)$. Лемма 3.2 доказана.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть для системы (0.2) выполнены условия теоремы 2.1 или теоремы 2.2. Тогда существуют $\delta, \beta > 0$ такие, что любое решение $\psi(t)$ системы (0.2), начинающееся при $t = t_0$ в $U_\delta - \delta$ -окрестности нуля в $\mathbb{R}^n$, и вне поверхности $W^s(t_0, \lambda, \varepsilon)$, не удовлетворяет при некотором $t \geq t_0$ оценке

$$\|\psi(t)\| < \beta \exp(-\lambda t) \quad (3.7)$$

или не продолжимо на луч $[t_0, +\infty)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\psi(t)$ – некоторое решение системы (0.2), удовлетворяющее оценке (3.7) при всех $t \geq t_0$. Тогда справедливо тождество $\dot{\psi}(t) = A(t)\psi(t) + f(t, \psi(t))$, откуда следует, что $\psi(t)$ есть решение линейной неоднородной системы

$$\dot{x} = A(t)x + f(t, \psi(t)). \quad (3.8)$$

Поскольку справедливо (3.7), из (3.8) следует, что найдется такой вектор $c_0 \in U^+(t_0)$, что $\psi(t) = \Phi(t, t_0)c_0 + \mathcal{L}[f(\cdot, \psi(\cdot))](t)$. Таким образом, $\psi(t)$ является решением системы (3.1) для $\tau = t_0, c = C_0$.

Положим $y_0 = J^{-1}c_0$. В данном случае $J: \mathbb{R}^k \rightarrow U^+(t_0)$ рассматривается как обратимый линейный оператор, представляющий собой умножение первых k столбцов матрицы $\Phi(t_0)$ на k -мерный вектор.

Заметим, что число, обозначенное буквой D и определенное при доказательстве теоремы 2.1 по формуле (2.4) (равно как и то, что определялось при доказательстве теоремы 2.2 по формуле (2.9)), экспоненциально убывает с ростом t_0 . Кроме того, вектор-функция $\Phi(t, t_0)c_0$ стремится к нулю с ростом t . Повторяя рассуждения теоремы 2.1 и теоремы 2.2, можно показать, что существует число $\tau \geq t_0$ такое, что при $t \geq \tau$ и y , близких к y_0 , сходимость метода последовательных приближений будет обеспечена (она может быть обусловлена не только малостью вектора y , но и малостью значения D вкупе с малостью начального приближения).

Положим $c = J_\tau(y_0)$. Тогда система (3.1) имеет решение $\varphi(t)$, определенное при $t \geq \tau$ и удовлетворяющее условию (3.2), причем $\varphi(\tau) = g_\tau(y_0)$. Но $\psi(t)$ при $t \geq \tau$ также является решением (3.1). Из леммы 3.2 (если нелинейная система удовлетворяет условиям теоремы 2.1) или леммы 3.1 (если мы находимся в условиях теоремы 2.2) следует, что $\psi(t) \equiv \varphi(t)$ при $t \geq \tau$. Тогда по определению устойчивого многообразия $\psi(t_0) \in W^s(t_0, \lambda, \varepsilon)$. Теорема доказана.

Из теоремы 3.1 вытекает следующий результат.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть для системы (0.2) выполнены условия теоремы 2.1 и, кроме того, справедливо одно из следующих утверждений:

- 1) система линейного приближения (0.1) принадлежит классу $WH(\bar{\lambda}, \varepsilon)$ для некоторого $\bar{\lambda} \in (\lambda, -\lambda_k)$;
- 2) отображение f имеет порядок малости $1 + \bar{\varepsilon}$ для некоторого $\bar{\varepsilon} > \varepsilon$.

Тогда существует $\delta > 0$ такое, что если решение $\psi(t)$ системы (0.2) начинается при $t = t_0$ в U_δ вне поверхности $W^s(t_0, \lambda, \varepsilon)$ и продолжимо на луч $[t_0, +\infty)$, то функция $\exp(\lambda t)\|\psi(t)\|$ не ограничена при $t \geq t_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим сначала, что выполнено утверждение п. 1). Как следует из доказательства леммы 3.2 (формулы (3.5) и (3.6)), число β в условии леммы 3.1 может быть выбрано независимо от значения t_0 . Таким образом, можно выбрать сколь угодно большое t , для которого оценка (3.7) несправедлива. Заменяя λ на $\bar{\lambda}$ и применяя теорему 3.1 с указанным выше замечанием, получаем стремящуюся к бесконечности последовательность $\{t_n\}$ такую, что $\|\psi(t_n)\| \geq \beta \exp(-\bar{\lambda}t_n)$. А тогда последовательность $\exp(\lambda t_n)\|\psi(t_n)\|$ неограничена, откуда вытекает справедливость доказываемого утверждения.

Пусть теперь справедливы условия п. 2). Докажем следующую лемму.

ЛЕММА 3.3. *В условиях п. 2) доказываемой теоремы существует $\delta > 0$ такое, что для любого вектора $s \in U^+(t_0)$, норма которого меньше δ , система (3.1) имеет ровно одно решение $\varphi(t)$, для которого функция $\exp(\lambda t)\|\varphi(t)\|$ ограничена при $t \geq t_0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть вопреки предположению для некоторого вектора s , удовлетворяющего приведенным условиям, существуют два решения указанного вида $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$. Пусть число β таково, что справедливо утверждение теоремы 3.1. Выберем $t_1 \geq t_0$ столь большим, что $\tilde{C}\beta^\varepsilon \exp(-\lambda(\bar{\varepsilon} - \varepsilon)t_1) \leq 1/2$, где число $\tilde{C}$ определяется по формуле (3.6). Положим

$$\alpha = \sup_{t \geq t_1} \exp(\lambda t) \|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|.$$

При $t \geq t_0$ справедливо неравенство, получающееся заменой ε на $\bar{\varepsilon}$ в правой части (3.4), а именно,

$$\|f(t, \varphi_1(t)) - f(t, \varphi_2(t))\| \leq \beta^\varepsilon \alpha L \sum_{r=1}^M n^{M-r} 2^{r-1} \sum_{|l|=r} \frac{1}{l!} \exp(-\lambda(1 + \bar{\varepsilon})t). \quad (3.9)$$

Так как $\exp(-\lambda(1 + \bar{\varepsilon})t) \leq \exp(-\lambda(\bar{\varepsilon} - \varepsilon)t_1) \exp(-\lambda(1 + \varepsilon)t)$ при $t \geq t_1$, а $\beta^{\bar{\varepsilon}} < \beta^\varepsilon$ при $\beta < 1$, из (3.9) вытекает справедливость неравенства

$$\|\mathcal{L}[f(\cdot, \varphi_1(\cdot)) - f(\cdot, \varphi_2(\cdot))](t)\| \leq \tilde{C}\beta^\varepsilon \exp(-\lambda(\bar{\varepsilon} - \varepsilon)t_1) \alpha \exp(-\lambda t) \leq \frac{\alpha \exp(-\lambda t)}{2}.$$

Лемма доказана.

Далее, по аналогии с доказательством теоремы 3.1 получаем справедливость утверждения доказываемой теоремы.

Отметим важное следствие полученных результатов.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. *Пусть матрица $A(t)$ коэффициентов системы (0.1) ограничена, а гробмановский коэффициент некорректности этой системы равен σ . Пусть нелинейность $f(t, x)$ имеет порядок малости $1 + \varepsilon$ по x . Обозначим через $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_k$ множество характеристических показателей системы (0.1), меньших числа $\mu = -\sigma/\varepsilon$. Тогда найдется последовательность C^1 -гладких многообразий $\{0\} = W_0 \subset W_1 \subset \dots \subset W_k = W^s$, удовлетворяющих следующим условиям:*

- 1) $\dim W_i = i$ для любого i от 1 до k ;
- 2) если $\Phi(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$ — фундаментальная матрица системы (0.2) такая, что $\chi(\varphi_i(t)) = \lambda_i$, $i = 1, \dots, n$, то $TW_i(0) = \text{Lin}(\varphi_1(0), \dots, \varphi_i(0))$;
- 3) если $x_0 \in W_i \setminus W_{i-1}$, то $\chi(x(t, 0, x_0)) = \lambda_i$.

Приведенный результат может быть использован для точного вычисления характеристических показателей решений нелинейных систем.

СЛЕДСТВИЕ 3.2. Множество отрицательных характеристических показателей нелинейной системы с правильной линейной частью и возмущением порядка малости больше единицы совпадает с соответствующим множеством для линейной системы первого приближения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. Т. 2. М., 1956.
- [2] Perron O. Über Stabilität und asymptotisches Verhalten der Integrale von Differentialgleichungssystemen // Math. Z. 1929. V. 29. P. 129–160.
- [3] Плисс В. А. Интегральные множества периодических систем дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1977.
- [4] Гробман Д. М. Характеристические показатели систем, близких к линейным // Матем. сб. 1952. Т. 30. № 1. С. 121–166.
- [5] Крыжевич С. Г. Условная устойчивость систем обыкновенных дифференциальных уравнений и полугиперболические системы // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36. № 1. С. 39–47.
- [6] Крыжевич С. Г. Интегральная разделенность и условная устойчивость решений обыкновенных дифференциальных систем по первому приближению // Вестн. молодых ученых. Сер. прикл. матем. и мех. 2000. № 3. С. 34–49.
- [7] Адрианова Л. Я. Введение в теорию линейных систем дифференциальных уравнений. С.-Пб.: Изд-во С.-Петербургского ун-та, 1992.

Санкт-Петербургский государственный университет
E-mail: sgk@fromru.com, kryzhevitz@rambler.ru

Поступило
16.11.2001
Исправленный вариант
18.06.2003