Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Юрко, О дифференциальных операторах высших порядков с особенностью внутри интервала, *Матем. заметки*, 2002, том 71, выпуск 1, 152–156

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm640>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 14:47:03

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРАХ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ С ОСОБЕННОСТЬЮ ВНУТРИ ИНТЕРВАЛА

В. А. Юрко

1. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\ell y(x) := y^{(n)}(x) + \sum_{j=0}^{n-2} \left(\frac{\nu_j}{(x-a)^{n-j}} + q_j(x) \right) y^{(j)}(x) = \lambda y(x), \quad 0 < x < T, \quad (1)$$

с неинтегрируемой регулярной особенностью во внутренней точке $a \in (0, T)$. Здесь $q_j(x)$ – комплекснозначные функции, ν_j – комплексные числа. Пусть $\mu_1, \dots, \mu_n$ – корни характеристического многочлена

$$\delta(\mu) = \sum_{j=0}^n \nu_j \prod_{k=0}^{j-1} (\mu - k), \quad \nu_n := 1, \quad \nu_{n-1} := 0,$$

и пусть для определенности $n = 2m$, $\mu_k - \mu_j \neq sn$ ($s \in \mathbb{Z}$); $\operatorname{Re} \mu_1 < \dots < \operatorname{Re} \mu_n$, $\mu_k \neq 0, 1, 2, \dots$, $n - 3$ (остальные случаи вносят небольшие изменения). Обозначим $\theta = \operatorname{Re}(\mu_n - \mu_1)$ и предположим, что функции $q_j^{(\nu)}(x)$, $\nu = 0, \dots, j-1$, абсолютно непрерывны на $[0, a - \varepsilon]$ и $[a + \varepsilon, T]$ при всех $\varepsilon \in (0, \min(a, T - a))$ и $q_j^{(\nu)}(x)|x - a|^{n-1-\theta-j+\nu} \in L(0, T)$, $\nu = 0, \dots, j$.

В статье исследуется несамосопряженная краевая задача $\mathcal{L}$ для дифференциального уравнения (1) с краевыми условиями $y^{(\nu-1)}(0) = y^{(\nu-1)}(T) = 0$, $\nu = 1, \dots, m$, и дополнительными условиями склейки решений в окрестности особой точки $x = a$, порожденными матрицей перехода

$$A = [a_{kj}]_{k,j=1,\dots,n},$$

которая связывает решения уравнения (1) слева и справа от особой точки (см. ниже).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 00-01-00741.

Дифференциальные уравнения с особенностями внутри интервала возникают в различных разделах математики и приложениях. К уравнению (1) также сводится широкий класс дифференциальных уравнений с точками поворота. При этом различные задачи приводят к различным условиям склейки, что делает актуальным изучение краевых задач с достаточно общими условиями склейки, порожденными различными матрицами перехода A . Отметим, что прямые и обратные задачи спектрального анализа для дифференциальных уравнений высших порядков с интегрируемыми коэффициентами и более общие классы операторов достаточно полно изучены (см. [1]–[8] и литературу в них). Случай, когда особая точка лежит на конце интервала, рассматривался в [9], [10]. Наличие особой точки внутри интервала вносит существенные качественные изменения в исследование краевой задачи. В данной статье изучаются свойства спектра краевой задачи $\mathcal{L}$ и приводятся теоремы о полноте и о разложении по собственным и присоединенным функциям. Отметим, что некоторые аспекты спектральной теории для уравнения (1) при $n = 2$ исследовались в [11], [12].

2. Пусть $\lambda = \rho^n$. Рассмотрим функции

$$C_j(x, \lambda) = (x - a)^{\mu_j} \sum_{k=0}^{\infty} c_{jk} (\rho(x - a))^{nk}, \quad j = 1, \dots, n,$$

где

$$c_{jk} = c_{j0} \left(\prod_{s=1}^k \delta(\mu_j + sn) \right)^{-1}, \quad \prod_{j=1}^n c_{j0} = (\det[\mu_j^{\nu-1}]_{j,\nu=1,\dots,n})^{-1}.$$

Здесь и в дальнейшем $z^\mu = \exp(\mu(\ln|z| + i \arg z))$, $\arg z \in (-\pi, \pi]$. При $x > a$ и $x < a$ функции $C_j(x, \lambda)$ являются решениями “простейшего” уравнения вида (1) с $q_j(x) \equiv 0$.

Пусть функции $s_j(x, \lambda)$, $j = 1, \dots, n$, являются решениями следующей системы интегральных уравнений при $x > a$ и $x < a$:

$$s_j^{(\nu)}(x, \lambda) = C_j^{(\nu)}(x, \lambda) - \int_a^x \frac{\partial^\nu}{\partial x^\nu} g_0(x, t, \lambda) \left(\sum_{p=0}^{n-2} q_p(t) s_j^{(p)}(t, \lambda) \right) dt, \quad \nu = 0, \dots, n-1,$$

где

$$g_0(x, t, \lambda) = \sum_{j=1}^n (-1)^{n-j} C_j(x, \lambda) C_{n-j+1}^*(t, \lambda),$$

$$C_j^*(x, \lambda) = \det[C_k^{(\nu)}(x, \lambda)]_{\nu=0,\dots,n-2, k=1,\dots,n \setminus n-j+1}.$$

При каждом $x \neq a$ функции $s_j^{(\nu)}(x, \lambda)$ являются целыми по λ порядка $1/n$. При $x > a$ и $x < a$ функции $s_j(x, \lambda)$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (1), причем

$$\det[s_j^{(\nu-1)}(x, \lambda)]_{j,\nu=1,\dots,n} \equiv 1.$$

Пусть задана матрица $A = [a_{kj}]_{k,j=1,\dots,n}$, $\det A \neq 0$, где a_{kj} – комплексные числа. Введем функции $\{\sigma_j(x, \lambda)\}_{j=1,\dots,n}$, $x \in J_\pm$, где $J_\pm := \{x : \pm(x - a) > 0\}$, по формуле

$$\sigma_j(x, \lambda) = \begin{cases} s_j(x, \lambda), & x \in J_-, \\ \sum_{k=1}^n a_{kj} s_k(x, \lambda), & x \in J_+. \end{cases}$$

Фундаментальная система решений $\{\sigma_j(x, \lambda)\}$ используется для склейки решений уравнения (1) в окрестности особой точки $x = a$. Точнее, будем говорить, что решение $y(x, \lambda)$ уравнения (1) удовлетворяет условиям склейки, порожденными матрицей перехода A , если $y(x, \lambda)$ представима в виде

$$y(x, \lambda) = \sum_{j=1}^n \chi_j(\lambda) \sigma_j(x, \lambda) \quad \text{при всех } x \in J_- \cup J_+,$$

где коэффициенты $\chi_j(\lambda)$ не зависят от x . Для определенности в дальнейшем ограничимся наиболее важным частным случаем, когда $a_{kj} = 0$ при $k < j$.

3. Пусть функции $\varphi_j(x, \lambda)$, $j = 1, \dots, n$, являются решениями уравнения (1) при начальных условиях $\varphi_j^{(\nu-1)}(0, \lambda) = \delta_{j\nu}$, $j, \nu = 1, \dots, n$ ($\delta_{j\nu}$ – символ Кронекера), и при дополнительных условиях склейки, порожденных матрицей перехода A . При каждом $x \neq a$ функции $\varphi_j^{(\nu)}(x, \lambda)$, $\nu = 0, \dots, n-1$, являются целыми по λ порядка $1/n$, причем

$$\det[\varphi_j^{(\nu-1)}(x, \lambda)]_{j,\nu=1,\dots,n} \equiv \begin{cases} 1, & x \in J_-, \\ \det A, & x \in J_+. \end{cases}$$

Обозначим $S_{k_0} = \{\rho : \arg \rho \in (k_0\pi/n, (k_0+1)\pi/n)\}$. В каждом секторе S_{k_0} корни R_k , $k = 1, \dots, n$, уравнения $R^n - 1 = 0$ можно занумеровать так, что

$$\operatorname{Re}(\rho R_1) < \operatorname{Re}(\rho R_2) < \dots < \operatorname{Re}(\rho R_n), \quad \rho \in S_{k_0}.$$

Ясно, что $R_k = \exp(i\pi\omega_k/m)$, где ω_k – некоторая перестановка чисел $0, 1, \dots, n-1$. В дальнейшем $R_k^\mu := \exp(i\pi\mu\omega_k/m)$. При $|\rho(x-a)| \geq 1$, $\rho \in \overline{S_{k_0}}$, $\nu = 0, \dots, n-1$, $j = 1, \dots, n$, $|\rho| \rightarrow \infty$, имеют место асимптотические формулы

$$\begin{aligned} \varphi_j^{(\nu)}(x, \lambda) &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (-\rho R_k)^{\nu+1-j} \exp(-\rho R_k x) [1]_a, \quad x \in J_-, \\ \varphi_j^{(\nu)}(x, \lambda) &= \frac{1}{n} \sum_{l,k=1}^n (-\rho R_k)^{1-j} (\rho R_l)^\nu (\xi_{kl}^0 + O(\rho^{-\delta_1})) \\ &\quad \times \exp(-\rho R_k a) \exp(\rho R_l(x-a)) [1]_a, \quad x \in J_+, \end{aligned}$$

где $\delta_1 := \min(1, \min_l \operatorname{Re}(\mu_{l+1} - \mu_l))$, $[1]_a = 1 + O(|\rho(x-a)|^{-1} + |\rho|^{-\delta_0})$, $\delta_0 = \min(1, \theta)$,

$$\xi_{kj}^0 = \sum_{s=1}^n a_{ss} R_k^{\mu_s} d_{sj} \exp(-i\pi\mu_s), \quad [d_{sj}]_{s,j=1,\dots,n} = ([R_k^{\mu_j}]_{k,j=1,\dots,n})^{-1}.$$

Обозначим

$$\xi_s^0 = \det[\xi_{kj}^0]_{k=1,\dots,s, j=n-s+1,\dots,n}, \quad s = 1, \dots, n.$$

В частности, $\xi_n^0 = (-1)^m \det A \neq 0$. Предположим, что

$$\xi_s^0 \neq 0 \quad \text{при } s = 1, \dots, n-1. \quad (2)$$

Условие (2) называется *условием регулярности склейки*. Контрпример в п. 4 показывает важность условия регулярности склейки для спектрального анализа дифференциальных операторов с особенностью внутри интервала. Отметим, что если $A = E$ (E – единичная матрица) и $\nu_j = 0$, то $\xi_{kj}^0 = \delta_{k,n-j+1}$, т.е. $\xi_{2s}^0 = \xi_{2s+1}^0 = (-1)^s \neq 0$, и условие регулярности склейки выполняется.

Обозначим

$$\Delta(\lambda) := \det[\varphi_j^{(\nu-1)}(T, \lambda)]_{j=m+1,\dots,n, \nu=1,\dots,m}.$$

Функция $\Delta(\lambda)$ является целой по λ порядка $1/n$, и ее нули совпадают с собственными значениями $\{\lambda_l\}$ краевой задачи $\mathcal{L}$. Функция $\Delta(\lambda)$ называется *характеристической функцией*. Положим

$$\begin{aligned} I_k &= \left\{ \rho : \arg \rho = \frac{\pi k}{n} \right\}, \quad k = -n, \dots, n-1, \\ I_{k,h} &= \{ \rho : \operatorname{dist}(\rho, I_k) \leq h \}, \quad I_{+1}^h = \bigcup_k I_{2k,h}, \quad I_{-1}^h = \bigcup_k I_{2k-1,h}. \end{aligned}$$

Пусть $\hat{I}_{\pm 1}^h$ – образ $I_{\pm 1}^h$ при отображении $\rho \rightarrow \lambda = \rho^n$.

ТЕОРЕМА 1. (i₁) При $|\rho| \rightarrow \infty$, $\rho \in \overline{S_{k_0}}$,

$$\Delta(\lambda) = O(\rho^{-m^2} \exp(\rho(R_{m+1} + \dots + R_n)T)).$$

(i₂) Существуют $h > 0$ и $C_h^0 > 0$ такие, что

$$|\Delta(\lambda)| \geq C_h^0 |\rho|^{-m^2} \exp(\rho(R_{m+1} + \dots + R_n)T) \quad \text{при } \rho \in \overline{S_{k_0}} \setminus I_{(-1)^m}^h.$$

Собственные значения $\lambda_l = \rho_l^n$ краевой задачи $\mathcal{L}$ лежат в области $I_{(-1)^m}^h$.

(i₃) Число нулей N_ξ функции $\Delta(\lambda)$ в области $\Pi_\xi^h := \{\rho \in I_{(-1)^m}^h : |\rho| \in [\xi, \xi + 1]\}$ ограничено по ξ .

(i₄) Обозначим $G_\delta := \{\rho : |\rho - \rho_l| \geq \delta\}$. Тогда

$$|\Delta(\lambda)| \geq C_\delta |\rho|^{-m^2} \exp(\rho(R_{m+1} + \dots + R_n)T), \quad \rho \in \overline{S_{k_0}} \cap G_\delta.$$

(i₅) Существуют положительные числа $r_N \rightarrow \infty$ такие, что при достаточно малом $\delta > 0$ окружности $|\rho| = r_N$ лежат в G_δ для всех N .

4. Пусть $B_{\alpha,p} = \{f(x) : f(x)(x-a)^{-\alpha} \in L_p(0,T)\}$ – банахово пространство с нормой $\|f\|_{\alpha,p} = \|f(x)(x-a)^{-\alpha}\|_{L_p(0,T)}$. Положим $\omega = \operatorname{Re} \mu_1$.

ТЕОРЕМА 2. Система собственных и присоединенных функций краевой задачи $\mathcal{L}$ полна в $B_{\alpha,p}$ при $1 \leq p < \infty$, $\alpha < \omega + 1/p$.

Приведем контрпример, показывающий существенность условия регулярности склейки (2). Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{aligned} -y'' &= \lambda y, & 0 < x < \pi, & \quad \lambda = \rho^2, \\ y(0) &= y(\pi) = 0, & y^{(k)}(a+0) &= (-1)^k y^{(k)}(a-0), \quad k = 0, 1, \quad a = \frac{3\pi}{4}. \end{aligned} \quad (3)$$

Для этой задачи условие (2) не выполняется и

$$\Delta(\lambda) = \rho^{-1} \sin \rho(2a - \pi).$$

Собственные значения $\lambda_l = \rho_l^2$ задачи (3) суть $\rho_l = 2l$, $l \geq 1$, а собственные функции имеют вид

$$y_l(x) = \begin{cases} \sin 2lx, & x \leq \frac{3\pi}{4}, \\ (-1)^{l-1} \sin 2lx, & x > \frac{3\pi}{4}. \end{cases}$$

Система функций $\{y_l(x)\}_{l \geq 1}$ неполна в $B_{\alpha,p}$ при $1 \leq p < \infty$, $\alpha < 1 + 1/p$.

Обозначим $\eta = \max(0, -\omega)$, $\mu_k^* = n - 1 - \mu_{n-k+1}$, $\psi = \mu_{n-1} + \mu_1^*$. Пусть для определенности $\operatorname{Re} \psi < 0$. Построим функцию $G(x, t, \lambda)$ по формуле

$$G(x, t, \lambda) = \frac{(-1)^m}{\Delta(\lambda)} \begin{vmatrix} \varphi_{m+1}(x, \lambda) & \dots & \varphi_n(x, \lambda) & g(x, t, \lambda) \\ \varphi_{m+1}(T, \lambda) & \dots & \varphi_n(T, \lambda) & g(T, t, \lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{m+1}^{(m-1)}(T, \lambda) & \dots & \varphi_n^{(m-1)}(T, \lambda) & g^{(m-1)}(T, t, \lambda) \end{vmatrix},$$

где $g(x, t, \lambda) = 0$ при $x < t$ и

$$g(x, t, \lambda) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \varphi_{n-k+1}(x, \lambda) \varphi_k^*(t, \lambda), \quad x \geq t,$$

$$\varphi_k^*(t, \lambda) = \frac{1}{A(t)} \det[\varphi_j^{(\nu)}(t, \lambda)]_{\nu=0, \dots, n-2, j=1, \dots, n \setminus n-k+1}, \quad A(t) = \begin{cases} 1, & t \in J_-, \\ \det A, & t \in J_+. \end{cases}$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть функция $f(x)$ такова, что $f(x)(x-a)^{\mu_1^*}$ абсолютно непрерывна на $[0, a]$ и $[a, T]$, и $f(0) = f(T) = 0$. Тогда

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \max_{0 \leq x \leq T} \left| (x-a)^\eta \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r_N^n} \left(\int_0^T G(x, t, \lambda) f(t) dt \right) d\lambda + f(x) \right) \right| = 0. \quad (4)$$

Отметим, что по теореме о вычетах интеграл в (4) равен частной сумме ряда Фурье функции $f(x)$ по собственным и присоединенным функциям краевой задачи $\mathcal{L}$ и, следовательно, теорема 3 дает достаточные условия разложения $f(x)$ в равномерно сходящийся с весом ряд по собственным и присоединенным функциям задачи $\mathcal{L}$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.
2. Костюченко А. Г., Саргсян И. С. Распределение собственных значений. Самосопряженные обыкновенные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1979.
3. Birkhoff G. D. // Trans. Amer. Math. Soc. 1908. V. 9. № 4. P. 373–397.
4. Тамаркин Я. Д. О некоторых общих задачах теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. Петроград, 1917.
5. Хромов А. П. // Матем. сб. 1966. Т. 70 (112). № 3. С. 310–329.
6. Шкалик А. А. // Тр. семинара им. Петровского. 1983. Т. 9. С. 190–229.
7. Beals R., Deift P., Tomei C. Direct and Inverse Scattering on the Line. Math. Surveys and Monographs. V. 28. Providence (R.I.): Amer. Math. Soc., 1988.
8. Yurko V. A. Inverse Problems for Differential Operators and their Applications. New York: Gordon and Breach, 2000.
9. Юрко В. А. // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28. № 8. С. 1355–1362.
10. Юрко В. А. // Матем. сб. 1995. Т. 186. № 6. С. 133–160.
11. Yurko V. A. // Integral Transforms and Special Functions. 1997. V. 5. № 3–4. P. 309–322.
12. Юрко В. А. // Матем. заметки. 1998. Т. 64. № 1. С. 143–156.

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского
E-mail: yurkova@info.sgu.ru

Поступило
23.05.2001