Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Ф. Валеев, О плотности дискретного спектра сингулярного оператора Штурма–Лиувилля, *Матем. заметки*, 2002, том 71, выпуск 2, 307–311

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm641>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 16:19:20

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

О ПЛОТНОСТИ ДИСКРЕТНОГО СПЕКТРА СИНГУЛЯРНОГО ОПЕРАТОРА ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ

Н. Ф. Валеев

1. Рассмотрим дифференциальное выражение

$$ly = -y'' + A(x)y, \quad -\infty < x < +\infty, \quad (1)$$

где $y(x) = (y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x))$ – вектор-функция, $A(x)$ – эрмитова матрица порядка n с элементами $a_{ij}(x) \in C^2[0, \infty)$. Обозначим через $L_n^2[0, \infty)$ комплексное гильбертово пространство n -мерных вектор-функций со скалярным произведением

$$(y, z) = \sum_k \int_{-\infty}^{+\infty} y_k(t) \overline{z_k(t)} dt,$$

а через L_0 минимальный оператор (см. [1]), порожденный выражением (1) в $L_n^2[0, \infty)$. При некоторых условиях, накладываемых на матрицу $A(x)$, оператор L_0 будет иметь индексы дефекта равные $(2n, 2n)$, и тогда у любого самосопряженного расширения этого оператора спектр будет дискретным. Пусть L – вещественное самосопряженное расширение, обозначим через $\lambda_0, \lambda_{\pm 1}, \dots, \lambda_{\pm k}, \dots$ собственные значения оператора L , расположенные по возрастанию абсолютных величин. Положим при $\lambda \geq 0$

$$N_+(L, \lambda) = \sum_{0 \leq \lambda_k \leq \lambda} 1,$$

а при $\lambda < 0$

$$N_-(L, \lambda) = - \sum_{\lambda \leq \lambda_k \leq 0} 1$$

и введем функцию

$$N(L, \lambda) = \begin{cases} N_+(L, \lambda) & \text{при } \lambda \geq 0, \\ N_-(L, \lambda) & \text{при } \lambda < 0. \end{cases}$$

В данной работе изучены качественный характер спектра самосопряженных расширений оператора L_0 и найдена асимптотика функций распределения собственных значений $N(L, \lambda)$ в случае дискретного спектра.

Пусть $\lambda_k(x)$ – собственные значения матрицы $A(x)$, $k = 1, \dots, n$, а $u(x)$ – унитарная матрица, приводящая $A(x)$ к диагональному виду. Положим

$$\mu_k(x, \lambda) = i(\lambda - \lambda_k(x))^{1/2}, \quad |\arg(\lambda - \lambda_k(x))^{1/2}| < \frac{\pi}{2},$$

$$\mu(x, \lambda) = \text{diag}\{\mu_1(x, \lambda), \dots, \mu_n(x, \lambda)\}, \quad q(x) = u^*(x) \frac{d}{dx} u(x) = \|q_{i,j}(x)\|.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 01-01-00996а.

Введем в рассмотрение матрицы

$$T_1(x, \lambda) = -\frac{1}{2}(\mu^{1/2}(x, \lambda)q(x)\mu^{-1/2}(x, \lambda) + \mu^{-1/2}(x, \lambda)q(x)\mu^{1/2}(x, \lambda)),$$

$$W = \begin{pmatrix} w_1(x, \lambda) & 0 \\ 0 & w_2(x, \lambda) \end{pmatrix},$$

$$W' = \left(i \operatorname{Im} \begin{pmatrix} \mu(x, \lambda) & 0 \\ 0 & -\mu(x, \lambda) \end{pmatrix} + \operatorname{Re} \begin{pmatrix} T_1(x, \lambda) & 0 \\ 0 & T_1(x, \lambda) \end{pmatrix} \right) W.$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\lambda_j(x) \rightarrow -\infty$ при $|x| \rightarrow \infty$ и выполнены условия:

- 1) $0 < a < \left| \frac{\lambda_i(x)}{\lambda_j(x)} \right| < b < \infty$;
- 2) $\frac{q_{i,j}(x)}{\lambda_i^{1/4}(x)} \in L_2(\mathbb{R})$, $|\lambda_i(x)|^{-1/4} \in L_2(\mathbb{R})$;
- 3) $\lambda'_i(x), q'_{i,j}(x)$ не меняют знак при достаточно больших $|x|$;
- 4) $|\lambda'_i(x)| < |\lambda_i(x)|^\alpha$, $0 < \alpha < \frac{3}{2}$.

Тогда система уравнений $ly = \lambda y$ имеет решения, которые при $\lambda \rightarrow \infty$ асимптотически могут быть представлены в виде

$$y_k(x, \lambda) = u(x)\mu^{-1/2}(x, \lambda)w_k(x, \lambda)(I + o(1)), \quad k = 1, 2,$$

$$y'_k(x, \lambda) = (-1)^{k+1}u(x)\mu^{1/2}(x, \lambda)w_k(x, \lambda)(I + o(1)), \quad k = 1, 2,$$

по кривым $\Gamma = \{\tau + i\sigma \mid \tau \geq 0, 0 < \sigma < \tau^\gamma, 0 < \gamma < 1/2\}$ равномерно по $x \in \mathbb{R}$.

Хотя явный вид матриц $w_k(x, \lambda)$ неизвестен, тем не менее теорема 1 позволяет сделать выводы об индексах дефекта оператора L_0 и о качественном характере спектра любого самосопряженного расширения L оператора L_0 .

Заметим, что асимптотику системы $ly = \lambda y$ при произвольном фиксированном λ можно получить и при менее ограничительных условиях (см. [2] и библиографию к ней) и исследовать качественный характер спектра соответствующих операторов. Для исследования же количественных характеристик спектра необходимы равномерные асимптотические формулы.

ТЕОРЕМА 2. Если выполнены условия теоремы 1, то индексы дефекта минимального оператора L_0 равны $(2n, 2n)$ и спектр любого самосопряженного расширения L оператора L_0 дискретен.

Введем в рассмотрение функцию $M(t)$:

$$\begin{aligned} M_+(t) &= \lim_{\tau \rightarrow +0} \frac{1}{\pi} \int_0^t d\sigma \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{Im} \left(\frac{i}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(\lambda - \lambda_k(x))^{1/2}} \right) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} ((t - \lambda_k(x))^{1/2} - (-\lambda_k(x))^{1/2}) dx, \quad t \geq 0, \\ M_-(t) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n \int_0^t d\sigma \int_{\sigma > \lambda_k(x)} \frac{dx}{(\sigma - \lambda_k(x))^{1/2}}, \quad t < 0. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 3. Если $M(t)$ удовлетворяет тауберовым условиям

$$k_1 M(t) < t M'(t) < k_2 M(t), \quad 0 < k_1 < k_2 < 1, \quad c_1 \leq \left| \frac{M_-(t)}{M_+(t)} \right| \leq c_2,$$

то $N(L, \lambda)$ имеет асимптотику

$$N(L, \lambda) \sim M(\lambda) \quad \text{при } \lambda \rightarrow \pm\infty.$$

2. Наметим идею доказательства теорем 1–3.

От системы $ly = \lambda y$ с помощью замены переменных

$$z_1(x, \lambda) = y(x, \lambda), \quad z_2(x, \lambda) = \frac{d}{dx}y(x, \lambda)$$

перейдем к системе уравнений размерности $2n$

$$\frac{d}{dx}\vec{Z}(x, \lambda) = P(x, \lambda)\vec{Z}(x, \lambda),$$

где

$$P(x, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 & I \\ A(x, \lambda) - \lambda I & 0 \end{pmatrix},$$

а $\vec{Z}(x, \lambda) = \begin{pmatrix} z_1(x, \lambda) \\ z_2(x, \lambda) \end{pmatrix}$ – новая неизвестная вектор-функция. Собственные значения матрицы $P(x, \lambda)$ равны $\pm \mu_k(x, \lambda)$, $k = \overline{1, n}$. Введем в рассмотрение матрицу $B(x, \lambda)$, приводящую матрицу $P(x, \lambda)$ к диагональному виду. Указанная матрица имеет вид

$$B(x, \lambda) = \begin{pmatrix} u(x) & \\ 0 & u(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu(x, \lambda)^{-1/2} & \mu(x, \lambda)^{-1/2} \\ \mu(x, \lambda)^{1/2} & -\mu(x, \lambda)^{1/2} \end{pmatrix}.$$

Теперь с помощью замены переменных $\vec{Z}(x, \lambda) = B(x, \lambda)\vec{V}(x, \lambda)$ получим новую систему уравнений относительно вектор-функции $\vec{V}(x, \lambda)$:

$$\vec{V}'(x, \lambda) = (M(x, \lambda) - C(x, \lambda))\vec{V}(x, \lambda),$$

где

$$C(x, \lambda) = B^{-1}(x, \lambda)B'(x, \lambda), \quad M(x, \lambda) = \begin{pmatrix} \mu(x, \lambda) & 0 \\ 0 & -\mu(x, \lambda) \end{pmatrix}.$$

Последняя система уравнений представима в следующем виде:

$$\vec{V}' = \left(i \operatorname{Im} \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} + \operatorname{Re} \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_1 \end{pmatrix} \right) \vec{V} + \left(\operatorname{Re} \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & -\mu \end{pmatrix} + i \operatorname{Im} \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & T_2 \\ T_2 & 0 \end{pmatrix} \right) \vec{V}. \quad (2)$$

Далее найдем матрицу $G(x, \lambda)$, удовлетворяющую условию

$$[M, G] = \begin{pmatrix} 0 & T_2 \\ T_2 & 0 \end{pmatrix},$$

причем

$$G(x, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 & g(x, \lambda) \\ -g(x, \lambda) & 0 \end{pmatrix}, \quad g(x, \lambda) = \|g_{ij}\|.$$

Элементы матрицы $g(x, \lambda)$ имеют вид

$$g_{ij} = \frac{q_{ij}}{(\mu_i \mu_j)^{1/2}} \frac{\mu_i - \mu_j}{\mu_i + \mu_j} \quad \text{при } i \neq j, \quad g_{ii} = \frac{\mu'_i}{\mu_i^2}.$$

Из условий теоремы 1 вытекает, что $\|G(x, \lambda)\| = o(1)$ и $\int_{-\infty}^{+\infty} \|(I + G(x, \lambda))^{-1}G'(x, \lambda)\| dx = o(1)$ при $\lambda \rightarrow \infty$ по кривой Γ равномерно по x . Для элементов матриц μ , T_1 , T_2g , T_1g и gT_1 справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \|T_2(x, \lambda)g(x, \lambda)\| dx &= o(1), & \int_{-\infty}^{+\infty} \|T_1(x, \lambda)g(x, \lambda)\| dx &= o(1), \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \|g(x, \lambda)T_1(x, \lambda)\| dx &= o(1), & \int_{-\infty}^{+\infty} \|\operatorname{Im} T_1(x, \lambda)\| dx &= o(1), \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \|\operatorname{Re} \mu(x, \lambda)\| dx &= o(1). \end{aligned} \quad (3)$$

Теперь в системе (2) положим $\vec{V}(x, \lambda) = (I + G(x, \lambda))\vec{U}(x, \lambda)$, домножим слева на $(I + G(x, \lambda))^{-1}$ и, используя соотношение для $[M, G]$, получим

$$\vec{U}'(x, \lambda) = (F(x, \lambda) + S(x, \lambda))\vec{U}(x, \lambda).$$

Заметим, что в силу приведенных выше оценок (3) для матрицы $S(x, \lambda)$ имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|S(x, \lambda)\| dx = o(1) \quad \text{при } \lambda \rightarrow \infty$$

по кривой Γ равномерно по x , далее из представления (1) следует, что $F(x, \lambda) = -F^*(x, \lambda)$. К последней системе невозможно применить теорему Левинсона об L -диагональных системах. Но оказывается с помощью приведения системы дифференциальных уравнений к интегральной системе уравнений и используя при этом косоэрмитовость матрицы $F(x, \lambda)$, можно получить достаточно удобное для дальнейшего представления решений системы $ly = \lambda y$ при $\lambda \rightarrow \infty$ по кривой Γ равномерно по x , а именно:

$$\vec{U}(x, \lambda) = W(x, \lambda)(I + o(1))\vec{e}_k,$$

при этом $W(x, \lambda) = W^*(x, \lambda)$. Для доказательства теоремы 1 осталось перейти от $\vec{U}(x, \lambda)$ к вектор-функции $\vec{y}(x, \lambda)$.

Доказательство теоремы 2 следует из формулы для решения уравнения $ly(x, \lambda) = \lambda y(x, \lambda)$ при фиксированном λ из правой и левой полуплоскостей комплексной плоскости, поскольку $(\lambda_k(x))^{-1/4} \in L_2(\mathbb{R})$ для любого k .

Перейдем к доказательству теоремы 3. Из теоремы 2 вытекает, что минимальный симметрический оператор L_0 имеет континуум самосопряженных расширений. Пусть L – вещественное самосопряженное расширение. Для матрицы Грина $G(x, s, \lambda)$ оператора $L - \lambda I$ имеет место представление

$$G(x, s, \lambda) = \begin{cases} \frac{(\varphi_2(x, \lambda) + m(\lambda)\varphi_1(x, \lambda))(\varphi_2^T(x, \lambda) + n(\lambda)\varphi_1^T(x, \lambda))}{m(\lambda) - n(x, \lambda)}, & x \leq s, \\ \frac{(\varphi_2(x, \lambda) + n(\lambda)\varphi_1(x, \lambda))(\varphi_2^T(x, \lambda) + m(\lambda)\varphi_1^T(x, \lambda))}{m(\lambda) - n(x, \lambda)}, & x > s, \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, \lambda) &= -i\lambda^{1/4}u(x)\mu^{-1/2}(x, \lambda)\frac{\bar{w}_1 + w_2}{2}(I + o(1)), \\ \varphi_2(x, \lambda) &= -i\lambda^{-1/4}u(x)\mu^{-1/2}(x, \lambda)\frac{w_1 - \bar{w}_2}{2i}(I + o(1)). \end{aligned}$$

Далее найдем асимптотическое представление при $\lambda \rightarrow \infty$ по кривой Γ выражения $\text{tr } G(x, x, \lambda)$. Справедлива следующая

ЛЕММА 1. *При $\lambda \rightarrow \infty$ по кривой Γ справедлива асимптотика*

$$\text{tr}(L - \lambda I)^{-1} = \frac{i}{2} \sum_{k=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(\lambda_k(x) - \lambda)^{1/2}} (1 + o(1)).$$

Обозначим

$$\Omega(x, \lambda) = \frac{i}{2} \sum_{k=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(\lambda_k(x) - \lambda)^{1/2}}.$$

Легко проверить, что $\Omega(x, \lambda)$ является “ R -функцией” (см. [1]), а при $\lambda = \sigma + i\tau$, $\tau > 0$, справедливы следующие оценки:

$$\text{Re } \Omega(x, \lambda) = o(1), \quad \int_1^{\infty} \frac{\text{Im } \Omega(\tau, \lambda)}{\tau} d\tau < +\infty.$$

Из этого вытекает представимость “ R -функции” $\Omega(x, \lambda)$ в виде

$$\Omega(x, \lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dM(t)}{t - \lambda},$$

где $M(t)$ вычисляется с помощью формулы обращения Стильтеса (см. [1]). Поскольку для функции $N(L, \lambda)$ справедлива формула Карлемана

$$\operatorname{tr}(L - \lambda I)^{-1} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dN(L, t)}{t - \lambda},$$

с учетом сказанного выше заключаем, что имеет место асимптотическая при $\lambda \rightarrow \infty$ формула

$$\operatorname{tr}(L - \lambda I)^{-1} \approx \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dM(L, t)}{t - \lambda}.$$

Далее доказательство теоремы 3 принципиально ничем не отличается от доказательства аналогичных утверждений (см. [1]).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Костюченко А. Г., Саргсян И. С. Распределение собственных значений. Самосопряженные обыкновенные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1979. 2. Валеев Н. Ф., Султанов Я. Т. // Матем. заметки. 1999. Т. 65. № 6. С. 932–938.