Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. С. Геворкян, Об одном критерии подвижности, *Матем. заметки*, 2002, том 71, выпуск 2, 311–315

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm642>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 18:07:19

ОБ ОДНОМ КРИТЕРИИ ПОДВИЖНОСТИ

П. С. Геворкян

Понятие подвижности первоначально, для метризуемых компактов, было введено Борсуком [1]. На более общие случаи было перенесено Богатым [2], Мардешичем и Сегалом [3], Сегалом [4].

Следует отметить, что подвижность топологического пространства в указанных работах была определена либо с помощью окрестностей данного пространства (замкнуто вложенного в некоторое AR -пространство), либо с помощью обратных спектров, в зависимости от того, какой подход к теории шейпов применяется. Однако при категорном подходе Мардешича [5] к теории шейпов не было дано подходящее категорное определение подвижности.

В настоящей статье к понятию подвижности топологического пространства применяется новый категорный подход. Вводится понятие подвижной категории и доказывается, что подвижность топологического пространства равносильна подвижности некоторой, соответствующей ему категории, определенной Мардешичем [5].

Пусть K – произвольная категория, а K' – произвольная ее подкатегория.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Скажем, что подкатегория K' *подвижна в категории K* , если для произвольного объекта $X \in \text{ob}(K')$ существуют объект $Y \in \text{ob}(K')$ и морфизм $f \in \text{Mog}_{K'}(Y, X)$ такие, что для любого объекта $Z \in \text{ob}(K')$ и любого морфизма $g \in \text{Mog}_{K'}(Z, X)$ существует морфизм $h \in \text{Mog}_K(Y, Z)$ такой, что коммутативна диаграмма 1.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Категорию K назовем *подвижной*, если она подвижна относительно самой себя.

ДИАГРАММА 1

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3 [6]. Говорят, что K есть категория с нулевыми морфизмами, если для любой пары (A, B) объектов из категории K существуют морфизмы $o_{BA}: A \rightarrow B$ такие, что для всех морфизмов $\nu: B \rightarrow C$ и $u: D \rightarrow A$, где C и D – произвольные объекты категории K , выполняется

$$\nu o_{BA} = o_{CA}, \quad o_{BA} u = o_{BD}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4 [6]. Объект $O \in \text{ob}(K)$ называется *инициальным*, если для любого объекта $X \in \text{ob}(K)$ множество $\text{Мог}_K(O, X)$ состоит из единственного морфизма.

ТЕОРЕМА 1. *Всякая категория K с нулевыми морфизмами подвижна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $X \in \text{ob}(K)$ – произвольный объект. Оказывается, что в качестве искомого объекта (см. определение 1) можно взять произвольный объект $Y \in \text{ob}(K)$, а в качестве морфизма $f \in K(Y, X)$ следует взять нулевой морфизм $o_{XY}: Y \rightarrow X$. В самом деле, рассмотрим произвольный морфизм $g \in K(Z, X)$. Теперь очевидно, что нулевой морфизм $o_{ZY}: Y \rightarrow Z$ искомый, т.е. имеет место равенство $go_{ZY} = o_{XY}$, которое следует из определения 3.

ТЕОРЕМА 2. *Всякая категория K , имеющая инициальный объект, подвижна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $X \in \text{ob}(K)$ – произвольный объект. Рассмотрим инициальный объект O категории K . Единственный морфизм из объекта O в объект X обозначим через u_X . Теперь нетрудно заметить, что объект O и морфизм $u_X: O \rightarrow X$ являются искомыми. В самом деле, пусть $Y \in \text{ob}(K)$ – произвольный объект, а $g: Y \rightarrow X$ – произвольный морфизм. Очевидно, что единственный морфизм $u_Y: O \rightarrow Y$ удовлетворяет условию $u_X = g \circ u_Y$.

При категорном подходе к теории шейпов [5] каждому топологическому пространству X сопоставляется некоторая категория W^X , объекты которой являются гомотопическими классами $f: X \rightarrow Q$, а морфизмы – коммутативными треугольниками диаграммы 2, где Q, Q' – ANR-пространства.

ДИАГРАММА 2

ТЕОРЕМА 3. *Топологическое пространство X подвижно тогда и только тогда, когда подвижна категория W^X .*

Последняя теорема есть простая переформулировка следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 4. *Топологическое пространство X подвижно тогда и только тогда, когда выполняется следующее условие:*

- (*) для произвольного ANR-пространства Q и любого гомотопического класса $f: X \rightarrow Q$ существуют ANR-пространство Q' , гомотопические классы $f': X \rightarrow Q'$ и $\eta: Q' \rightarrow Q$ с условием $f = \eta \circ f'$ такие, что, каковы бы ни были ANR-пространство Q'' , гомотопические классы $f'': X \rightarrow Q''$ и $\eta': Q'' \rightarrow Q$ с условием $f = \eta' \circ f''$, существует гомотопический класс $\eta'': Q' \rightarrow Q''$ такой, что выполняется равенство $\eta = \eta' \circ \eta''$ (диаграмма 3).

ДИАГРАММА 3

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполняется условие (*). Докажем, что пространство X подвижно. Для этого рассмотрим некоторый ассоциированный с X спектр $\{X_\alpha, p_{\alpha\alpha'}, A\}$ (см. [7]) и докажем, что он подвижен. Пусть $\alpha \in A$ – произвольный элемент, а $p_\alpha: X \rightarrow X_\alpha$ – естественная проекция (диаграмма 4). Для отображения $p_\alpha: X \rightarrow X_\alpha$ рассмотрим подходящие ANR -пространство Q' , гомотопические классы $f': X \rightarrow Q'$ и $\eta: Q' \rightarrow X_\alpha$ с условием $\eta \circ f' = p_\alpha$, существование которых следует из условия (*).

Так как $\text{ass } X = \{X_\alpha, p_{\alpha\alpha'}, A\}$, то для $f': X \rightarrow Q'$ существуют $\tilde{\alpha} \in A$, $\tilde{\alpha} \geq \alpha$, и $\tilde{f}': X_{\tilde{\alpha}} \rightarrow Q'$ такие, что

$$f' = \tilde{f}' \circ p_{\tilde{\alpha}}.$$

Нетрудно убедиться, что

$$p_{\alpha\tilde{\alpha}} \circ p_{\tilde{\alpha}} = \eta \circ \tilde{f}' \circ p_{\tilde{\alpha}}. \quad (1)$$

В самом деле,

$$\eta \circ \tilde{f}' \circ p_{\tilde{\alpha}} = \eta \circ f' = p_\alpha = p_{\alpha\tilde{\alpha}} \circ p_{\tilde{\alpha}}.$$

В силу равенства (1) и из определения ассоциированности следует, что существует индекс $\alpha' \in A$, $\alpha' \geq \tilde{\alpha}$, такой, что

$$p_{\alpha\tilde{\alpha}} \circ p_{\tilde{\alpha}\alpha'} = \eta \circ \tilde{f}' \circ p_{\tilde{\alpha}\alpha'}.$$

Оказывается, что так найденный индекс $\alpha' \in A$ удовлетворяет условию подвижности спектра $\{X_\alpha, p_{\alpha\alpha'}, A\}$. В самом деле, пусть $\alpha'' \in A$, $\alpha'' \geq \alpha$, – произвольный элемент. Для отображений $p_{\alpha\alpha''}: X_{\alpha''} \rightarrow X_\alpha$ и $p_{\alpha''}: X \rightarrow X_{\alpha''}$ (с условием $p_\alpha = p_{\alpha\alpha''} \circ p_{\alpha''}$) в силу условия (*) существует отображение $\eta'': Q' \rightarrow X_{\alpha''}$ такое, что

$$\eta = p_{\alpha\alpha''} \circ \eta''.$$

Теперь нетрудно убедиться, что отображение $g = \eta'' \circ \tilde{f}' \circ p_{\tilde{\alpha}\alpha'}$ искомого, т.е. имеет место равенство

$$p_{\alpha\alpha'} = p_{\alpha\alpha''} \circ g.$$

В самом деле,

$$p_{\alpha\alpha'} = p_{\alpha\tilde{\alpha}} \circ p_{\tilde{\alpha}\alpha'} = \eta \circ \tilde{f}' \circ p_{\tilde{\alpha}\alpha'} = p_{\alpha\alpha''} \circ \eta'' \circ \tilde{f}' \circ p_{\tilde{\alpha}\alpha'} = p_{\alpha\alpha''} \circ g.$$

ДИАГРАММА 4

Теперь докажем обратное. Пусть X – подвижное пространство, а $\{X_\alpha, p_{\alpha\alpha'}, A\}$ – некоторый ассоциированный с ним обратный спектр. Докажем, что выполняется условие (*).

Рассмотрим произвольный гомотопический класс $f: X \rightarrow Q$ (диаграмма 5). В силу ассоциированности спектра $\{X_\alpha, p_{\alpha\alpha'}, A\}$ с пространством X существует индекс $\alpha \in A$ и гомотопический класс $f_\alpha: X_\alpha \rightarrow Q$ такие, что

$$f = f_\alpha \circ p_\alpha. \quad (2)$$

Для найденного $\alpha \in A$ существует индекс $\alpha' \in A$, $\alpha' \geq \alpha$, который удовлетворяет условию подвижности спектра $\{X_\alpha, p_{\alpha\alpha'}, A\}$. Из равенства (2) следует

$$f = f_\alpha \circ p_{\alpha\alpha'} \circ p_{\alpha'}.$$

ДИАГРАММА 5

Теперь убедимся, что ANR -пространство $X_{\alpha'}$, гомотопические классы $p_{\alpha'}: X \rightarrow X_{\alpha'}$ и $f_\alpha \circ p_{\alpha\alpha'}: X_{\alpha'} \rightarrow Q$ удовлетворяют условию (*). В самом деле, пусть Q'' – произвольное ANR -пространство, а $f'': X \rightarrow Q''$ и $\eta': Q'' \rightarrow Q$ – такие гомотопические классы, которые удовлетворяют условию

$$f = \eta' \circ f''.$$

Для гомотопического класса $f'': X \rightarrow Q''$ существуют индекс $\alpha'' \in A$, $\alpha'' \geq \alpha$, и гомотопический класс $\tilde{f}'': X_{\alpha''} \rightarrow Q''$ такие, что выполняется

$$f'' = \tilde{f}'' \circ p_{\alpha''}.$$

Ясно, что

$$f_\alpha \circ p_{\alpha\alpha''} \circ p_{\alpha''} = \eta' \circ \tilde{f}'' \circ p_{\alpha''}.$$

Следовательно, согласно определению ассоциированности можно найти индекс $\alpha''' \in A$, $\alpha''' \geq \alpha''$, который удовлетворяет условию

$$f_\alpha \circ p_{\alpha\alpha''} \circ p_{\alpha''\alpha'''} = \eta' \circ \tilde{f}'' \circ p_{\alpha''\alpha''' }.$$

В силу подвижности спектра $\{X_\alpha, p_{\alpha\alpha'}, A\}$ существует гомотопический класс $g: X_{\alpha'} \rightarrow X_{\alpha'''}$ такой, что

$$p_{\alpha\alpha'} = p_{\alpha\alpha''} \circ p_{\alpha''\alpha'''} \circ g.$$

Положим $\eta'' = \tilde{f}'' \circ p_{\alpha''\alpha'''} \circ g$. Остается заметить, что гомотопический класс $\eta'': X_{\alpha'} \rightarrow Q''$ удовлетворяет условию

$$f_\alpha \circ p_{\alpha\alpha'} = \eta' \circ \eta''.$$

В самом деле,

$$\eta' \circ \eta'' = \eta' \circ \tilde{f}'' \circ p_{\alpha''\alpha'''} \circ g = f_\alpha \circ p_{\alpha\alpha''} \circ p_{\alpha''\alpha'''} \circ g = f_\alpha \circ p_{\alpha\alpha'}.$$

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Условие (*) теоремы 4 можно принять за определение подвижности топологического пространства при категорном подходе к теории шейпов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Borsuk K. // Fund. Math. 1969. V. 66. № 1. P. 137–146. 2. Богатый С. А. // Матем. сб. 1974. Т. 93. № 1. С. 90–102. 3. Mardesic S., Segal J. // Bull. Acad. Polon. Sci. 1970. V. 18. № 11. P. 649–654. 4. Segal J. // Lecture Notes in Math. 1974. № 375. P. 236–241. 5. Mardesic S., Segal J. Shape Theory—The Inverse System Approach. Amsterdam: North-Holland, 1982. 6. Букр И., Делиану А. Введение в теорию категорий и функторов. М., 1972. 7. Morita K. // Fund. Math. 1975. V. 86. P. 251–259.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило
15.02.2001