Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. В. Жижиашвили, О точечной расходимости общих тригонометрических рядов, *Матем. заметки*, 2002, том 71, выпуск 2, 315–317

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm643>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 15:40:33

О ТОЧЕЧНОЙ РАСХОДИМОСТИ ОБЩИХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ

Л. В. Жижиашвили

Настоящая работа посвящается восьмидесятилетию со дня рождения известного русского математика Сергея Борисовича Стечкина (1920–1995).

Пусть

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx \quad (1)$$

– тригонометрический ряд, а

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cos kx - a_k \sin kx \quad (2)$$

– ему сопряженный. Формально ряды (1) и (2) являются соответственно вещественной и мнимой частями степенного ряда

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k, \quad (3)$$

где $c_k = a_k - ib_k$, $z = e^{ix}$, $x \in [-\pi, \pi]$.

В 1906 году Фату [1] поставил вопрос: существует ли расходящийся на множестве положительной лебеговой меры тригонометрический ряд с коэффициентами, стремящимися к нулю?

В 1911 году Лузин [2] решил задачу Фату в более сильной форме: существует степенной ряд (3) с коэффициентами, стремящимися к нулю, расходящийся в каждой точке единичной окружности $\Gamma = \{z : |z| = 1\}$. Лузин доказал, что для построенного степенного ряда оба ряда (1) и (2) расходятся почти всюду. В 1957 году Стечкин [3] показал, что на самом деле вещественная и мнимая части степенного ряда, построенного Лузиным, расходятся всюду.

В 1912 году Штейнгауз [4] построил более простой тригонометрический ряд

$$\sum_{k=4}^{\infty} \frac{\cos k(x - \ln \ln k)}{\ln k}, \quad (4)$$

который расходится всюду.

В 1959 году О'Шеа [5] рассматривал тригонометрические ряды вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \cos kq(k) \cos kx \quad (5)$$

с $u_k \downarrow 0$ и показал, что при определенных условиях, наложенных на последовательности $(u_k)_{k \geq 1}$ и $(q(k))_{k \geq 1}$, ряд (5) расходится всюду.

Именно, имеет место

УТВЕРЖДЕНИЕ. Пусть последовательности

$$u(n) \uparrow \infty, \quad c_n \downarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

и пусть существует последовательность целых положительных чисел $\{p_n\}$ такая, что

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (n + p_n) (u(n + p_n) - u(n)) < \frac{1}{2},$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{n+1}^{n+p_n} c_r > 0.$$

Тогда последовательность

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos nu(n) \cos nx$$

расходится для всех натуральных x , а последовательность

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin nu(n) \sin nx$$

расходится для всех $x \not\equiv 0 \pmod{\pi}$.

Условия этого утверждения, в частности, выполнены для “косинус-части” ряда (4). Из результатов О’Шеа [5] следует также основное утверждение работы Херцога [6].

В семидесятые годы Стечкин читал лекции в Тбилисском государственном университете. В личных беседах он ставил следующие вопросы.

Задача 1. Какие условия на последовательности действительных чисел $(u_k)_{k \geq 1}$ и $(q(k))_{k \geq 1}$ обеспечивают расходимость всюду ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \cos k(x - q(k)), \quad (6)$$

если предполагать, что $u_k \downarrow 0$ при $k \uparrow \infty$?

Задача 2. Можно ли усилить результаты О’Шеа [5] и распространить их на тригонометрические ряды вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \cos kq(k) \sin kx, \quad (7)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \sin kq(k) \cos kx, \quad (8)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \sin kq(k) \sin kx? \quad (9)$$

В настоящей работе излагаются полученные нами утверждения, дающие ответ на эти вопросы Стечкина.

Справедливы следующие утверждения.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $(u_k)_{k \geq 1}$ – монотонно убывающая к 0 последовательность вещественных чисел, причем

$$\sum_{k=4}^{\infty} \frac{u_k}{k} = +\infty, \quad (10)$$

а $(p(n))_{n \geq 1}$ – возрастающая последовательность натуральных чисел такая, что

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{n+p(n)} u_k > 0. \quad (11)$$

Тогда если монотонно возрастающая к бесконечности последовательность положительных вещественных чисел $(q(n))_{n \geq 1}$ удовлетворяет условию

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} [n + p(n)] \cdot [q(n + p(n)) - q(n)] < \frac{\pi}{2},$$

то тригонометрический ряд (6) расходится всюду.

ТЕОРЕМА 2. Если монотонные последовательности $(u_k)_{k \geq 1}$ и $(p(n))_{n \geq 1}$ удовлетворяют условиям (10) и (11), а для монотонно возрастающей к бесконечности последовательности положительных вещественных чисел $(q(n))_{n \geq 1}$ имеем

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} [n + p(n)] \cdot [q(n + p(n)) - q(n)] < 2 \arcsin \frac{1}{4},$$

то ряд (5) расходится всюду, а ряд (7) расходится во всех точках $x \not\equiv 0 \pmod{\pi}$.

ТЕОРЕМА 3. Если монотонные последовательности $(u_k)_{k \geq 1}$ и $(p(n))_{n \geq 1}$ удовлетворяют условиям (10) и (11), а для монотонно возрастающей к бесконечности последовательности положительных вещественных чисел $(q(n))_{n \geq 1}$ имеем

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} [n + p(n)] \cdot [q(n + p(n)) - q(n)] < 2 \arcsin \frac{1}{16},$$

то ряд (8) расходится всюду, а ряд (9) расходится во всех точках $x \not\equiv 0 \pmod{\pi}$.

Из сформулированных теорем можно получить различные следствия. Приведем наиболее характерное из них.

СЛЕДСТВИЕ. а) В условиях теоремы 1

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k (2 + \cos kq(k)) \cos kx$$

есть всюду расходящийся ряд с положительными коэффициентами.

б) В условиях теоремы 2 ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k (2 + \sin kq(k)) \cos kx$$

есть всюду расходящийся ряд с положительными коэффициентами.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Fatou P. // *Acta Math.* 1906. V. 30. P. 335–400. 2. Luzin N. N. // *Rendic. Circ. Mat. di Palermo.* 1911. V. 32. P. 386–390. 3. Стечкин С. Б. // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* 1957. Т. 21. № 5. С. 711–728. 4. Steinhaus H. // *C. R. Soc. Sci. Varsovie.* 1912. V. 5. № 3. P. 219–229. 5. Siobhan O'Shea. // *Proc. Amer. Math. Soc.* 1959. V. 10. № 1. P. 68–70. 6. Herzog E. // *Michigan Math. J.* 1953–1954. V. 2. № 2. P. 175–177.

Тбилисский государственный университет им. Ив. Джавахишвили

Поступило
14.02.2001