Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Г. Мосин, Примитивные идеалы в алгебре регулярных функций на квантовых $(m \times n)$ -матрицах, *Матем. заметки*, 2002, том 71, выпуск 2, 318–320

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm644>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 14:10:32

ПРИМИТИВНЫЕ ИДЕАЛЫ В АЛГЕБРЕ РЕГУЛЯРНЫХ ФУНКЦИЙ НА КВАНТОВЫХ $(m \times n)$ -МАТРИЦАХ

В. Г. Мосин

1. Известно (см. [1]–[3]), что между примитивными идеалами в алгебре функций на квантовой группе и симплектическими листами в ассоциированной пуассоновой структуре имеется взаимно однозначное соответствие. В настоящей работе мы обобщаем этот результат на случай квантовых $(m \times n)$ -матриц.

Пусть $\mathcal{V}$ – множество комплексных $(m \times n)$ -матриц $(m \leq n)$, невырожденных в том смысле, что все их миноры максимального порядка отличны от нуля, $\mathbf{C}[\mathcal{V}]$ – алгебра регулярных функций на $\mathcal{V}$, $\mathbf{C}_q[\mathcal{V}]$ – ее квантовый аналог. Мы разбиваем $\text{Prim } \mathbf{C}_q[\mathcal{V}]$ на классы (предложение 4.1) подобно тому, как это сделано в [2], и доказываем теорему 5.3 о взаимно однозначном соответствии между примитивными идеалами из $\mathbf{C}_q[\mathcal{V}]$ и симплектическими листами в $\mathcal{V}$. Кроме того, мы выводим формулу размерности симплектического листа (теорема 6.1), которая в частном случае $m = n$ дает известное (см. [1]–[3]) значение размерности листа на группе.

2. Обозначим через $\mathcal{M}$ алгебру регулярных функций на линейном пространстве $\mathcal{U}$ комплексных $(m \times n)$ -матриц. Ее квантовым аналогом служит алгебра $\mathcal{M}_q$ (см. [4, определение 1.2]), определенная как ассоциативная $\mathbf{C}$ -алгебра, порожденная mn образующими X_i^j , $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, с квадратичными соотношениями

$$\begin{aligned} X_i^j X_k^j &= q^{-1} X_k^j X_i^j & \forall i < k, \\ X_i^j X_i^k &= q^{-1} X_i^k X_i^j & \forall j < k, \\ X_i^j X_l^k &= X_l^k X_i^j & \forall i < l, j > k, \\ [X_i^j, X_l^k] &= (q^{-1} - q) X_i^k X_l^j & \forall i < l, j < k, \end{aligned}$$

где q – общий параметр квантования, т.е. переменная или комплексное число, не являющееся корнем из 1. Тогда алгебры $\mathbf{C}[\mathcal{V}]$ и $\mathbf{C}_q[\mathcal{V}]$ определяются как соответствующие локализации алгебр $\mathcal{M}$ и $\mathcal{M}_q$ по всем минорам (квантовым минорам в случае $\mathbf{C}_q[\mathcal{V}]$) порядка m .

3. Имея коммутативную алгебру $\mathbf{C}[\mathcal{V}]$ и ее деформацию $\mathbf{C}_q[\mathcal{V}]$, введем скобку Пуассона в $\mathbf{C}[\mathcal{V}]$ (как это делается, например, в [5, § 6]) по формуле

$$\forall f, g \in \mathbf{C}[\mathcal{V}] \quad \{f, g\} = \lim_{q \rightarrow 1} \frac{f * g - g * f}{q - 1},$$

где $*$ означает умножение в $\mathbf{C}_q[\mathcal{V}]$. Тем самым, алгебра $\mathbf{C}[\mathcal{V}]$ становится пуассоновой алгеброй, ассоциированной с $\mathbf{C}_q[\mathcal{V}]$.

4. Будем обозначать D_I^J (соответственно C_I^J) минор в $\mathcal{M}$ (соответственно квантовый минор в $\mathcal{M}_q$), построенный на строках с номерами из мультииндекса $I = \{i_1, \dots, i_k\}$ и на столбцах с номерами из $J = \{j_1, \dots, j_k\}$. Все мультииндексы предполагаются упорядоченными, $E_k = \{1, \dots, k\}$. Для подстановки y обозначим $y(I)$ мультииндекс с компонентами $y(i_1), \dots, y(i_k)$. Пару подстановок w_+, w_- из S_m будем обозначать w . В алгебре $\mathcal{M}$ положим

$$R_{w+}^+ = \bigcup_{i=1}^{m-1} \{D_K^{E_i} \mid K > w_+^{-1}(E_i)\}, \quad S_{w+}^+ = \bigcup_{i=1}^{m-1} \{D_{w_+^{-1}(E_i)}^{E_i}\},$$

$$R_{w-}^- = \bigcup_{i=1}^{m-1} \{D_K^{E_n \setminus E_{n-i}} \mid K < w_-^{-1}(E_m \setminus E_{m-i})\}, \quad S_{w-}^- = \bigcup_{i=1}^{m-1} \{D_{w_-^{-1}(E_m \setminus E_{m-i})}^{E_n \setminus E_{n-i}}\},$$

где $<$ (или $>$) означает лексикографический порядок, и пусть $\mathcal{V}_w$ – алгебраическое подмногообразие в $\mathcal{V}$, определенное условиями $D_I^J = 0$ для всех $D_I^J \in R_w$, $D_I^J \neq 0$ для всех $D_I^J \in S_w$, где $R_w = R_{w+}^+ \cup R_{w-}^-$, $S_w = S_{w+}^+ \cup S_{w-}^-$. С другой стороны, в алгебре $\mathcal{M}_q$ обозначим через P_w, T_w множества квантовых миноров, аналогичные соответственно множествам R_w, S_w в $\mathcal{M}$. Пусть $\mathcal{P}_w$ – левый идеал в $\mathcal{M}_q$, порожденный P_w ; $\mathcal{T}_w$ – мультипликативное подмножество в $\mathcal{M}_q$, порожденное T_w . Заметим, что $\mathcal{P}_w$, определенный как левый идеал в $\mathcal{M}_q$, на самом деле является двусторонним. Положим

$$\text{Symp}_w \mathcal{V} = \{\mathcal{L} \in \text{Symp } \mathcal{V} \mid \mathcal{L} \subseteq \mathcal{V}_w\},$$

$$\text{Prim}_w \mathbf{C}_q[\mathcal{V}] = \{\mathcal{P} \in \text{Prim } \mathbf{C}_q[\mathcal{V}] \mid \mathcal{P} \supseteq \mathcal{P}_w, \mathcal{P} \cap \mathcal{T}_w = \emptyset\},$$

и пусть $\sqcup$ означает объединение попарно не пересекающихся множеств.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. *Имеют место соотношения:*

- 1) $\text{Symp } \mathcal{V} = \bigsqcup_{w \in S_m \times S_m} \text{Symp}_w \mathcal{V}$;
- 2) $\text{Prim } \mathbf{C}_q[\mathcal{V}] = \bigsqcup_{w \in S_m \times S_m} \text{Prim}_w \mathbf{C}_q[\mathcal{V}]$.

5. Так как число классов конечно, то имеется биекция между классами и важно установить биекцию между примитивными идеалами и симплектическими листами внутри данного класса. Для этого построим вспомогательную алгебру $\mathcal{A}_w$ и соответствующее ей вспомогательное геометрическое множество $\mathcal{U}_w$.

Пусть $S_0 = \{D_{E_m}^{E_m}, D_{E_m}^{\{2,3,\dots,m-1\}}, \dots, D_{E_m}^{E_n \setminus E_{n-m}}\}$. Обозначим через $\bar{S}_w$ множество всех главных миноров всех миноров из $S_0 \cup S_w$. Тогда $\mathcal{U}_w$ – это алгебраическое подмногообразие в $\mathcal{U}$ (но не в $\mathcal{V}$), определенное условиями $D_I^J = 0$ для всех $D_I^J \in R_w$, $D_I^J \neq 0$ для всех $D_I^J \in \bar{S}_w$. С другой стороны, пусть $\bar{T}_w$ – множество квантовых миноров в $\mathcal{M}_q$, аналогичное множеству $\bar{S}_w$ в $\mathcal{M}$. Тогда $\mathcal{A}_w = (\mathcal{M}_q / \mathcal{P}_w)_{\bar{\mathcal{T}}_w}$, где $\bar{\mathcal{T}}_w$ – мультипликативное подмножество в $\mathcal{M}_q$, порожденное $\bar{T}_w$.

ЛЕММА 5.1. *Имеют место соотношения:*

- 1) $\text{Symp}_w \mathcal{V} \simeq \text{Symp } \mathcal{U}_w$;
- 2) $\text{Prim}_w \mathbf{C}_q[\mathcal{V}] \simeq \text{Prim } \mathcal{A}_w$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.2. 1) *Алгебра $\mathbf{C}_q[\mathcal{U}_w]$ регулярных функций на $\mathcal{U}_w$ является лорановской алгеброй, порожденной минорами из $\bar{S}_w$.*

2) *Алгебра $\mathcal{A}_w$ является скрученной лорановской алгеброй, порожденной квантовыми минорами из $\bar{T}_w$.*

ТЕОРЕМА 5.3. *Имеется биекция β между $\text{Prim } \mathbf{C}_q[\mathcal{V}]$ и $\text{Symp } \mathcal{V}$ такая, что*

- 1) $\beta(\text{Prim}_w \mathbf{C}_q[\mathcal{V}]) = \text{Symp}_w \mathcal{V}$;
- 2) $\dim \beta(\mathcal{P}) = \text{GKdim } \mathbf{C}_q[\mathcal{V}] / \mathcal{P}$ для всех $\mathcal{P} \in \text{Prim } \mathbf{C}_q[\mathcal{V}]$, где GKdim означает размерность Гельфанда–Кириллова.

Идея доказательства состоит в том, что, с одной стороны, алгебра $\mathcal{A}_w$ является скрученной и, следовательно, все ее примитивные идеалы порождаются максимальными идеалами ее центра (см. [6, 2.3]). С другой стороны, симплектические листы в $\mathcal{U}_w$ определяются набором функций Казимира (см. [5, § 2]), играющих в пуассоновой алгебре $\mathbf{C}_q[\mathcal{U}_w]$ роль центральных элементов. Если пара образующих C_I^J, C_K^L алгебры $\mathcal{A}_w$ связана соотношением

$$C_I^J C_K^L = q^{\varphi_{IK}^{JL}} C_K^L C_I^J,$$

то предельный переход, данный в п. 3, показывает, что для соответствующих образующих D_I^J, D_K^L алгебры $\mathbf{C}[\mathcal{U}_w]$ справедливо соотношение

$$\{D_I^J, D_K^L\} = \varphi_{IK}^{JL} D_I^J D_K^L.$$

Поэтому как образующие Center $\mathcal{A}_w$, так и образующие Casimir $\mathbf{C}_q[\mathcal{U}_w]$ определяются целыми решениями одной и той же системы $\Phi \bar{t} = 0$, откуда следует биекция. Утверждение о размерности вытекает из того, что $\text{GKdim Center } \mathcal{A}_w = \dim \ker \Phi = \text{GKdim Casimir } \mathbf{C}_q[\mathcal{U}_w]$.

6. Пусть p – частное, а r – остаток от деления n на m . Обозначим

$$w_r = \begin{pmatrix} 0 & e_{m-r} \\ e_r & 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_r = \begin{pmatrix} -e_r & 0 \\ 0 & e_{m-r} \end{pmatrix},$$

где e_j – единичная матрица порядка j .

ТЕОРЕМА 6.1. Если $\mathcal{L}_w$ – симплектический лист из $\text{Symp}_w \mathcal{V}$, то

$$\dim \mathcal{L}_w = m(n - m) + l(w) + \text{rk}(w_+ w_-^{-1} w_r + (-1)^p \varepsilon_r),$$

где $l(w)$ означает сумму чисел инверсий в подстановках w_+, w_- .

В [1]–[3] изучались примитивные идеалы на квантовых группах и их связь с симплектическими листами. В частности, на группе симплектический лист типа w имеет размерность $l(w) + \text{rk}(w_+ w_-^{-1} - \text{Id})$ (см., например, [1, теорема A.3.2]). Полагая в теореме 6.1 $m = n$, нетрудно убедиться в согласованности наших результатов с результатами [1]–[3].

Автор выражает искреннюю признательность своему научному руководителю А. Н. Панову за внимание и поддержку, а также Т. Левассюру и А. Жозефу за то, что они прислали ему отски своих работ.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hodges T. J., Levasseur T. // Comm. Math. Phys. 1993. V. 156. P. 581–605.
2. Hodges T. J., Levasseur T. // J. Algebra. 1994. V. 168. P. 455–468.
3. Joseph A. // J. Algebra. 1994. V. 169. P. 441–511.
4. Мосин В. Г., Панов А. Н. // Матем. сб. 1996. Т. 187. № 6. С. 53–72.
5. Vaisman I. Lectures on the Geometry of Poisson Manifolds. Progress in Math. V. 118. Basel–Boston–Berlin: Birkhäuser Verlag, 1994.