Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. М. Агеев, Д. Реповш, Метод Яворовского в задаче о сохранении экстензорных свойств орбитным функтором, *Матем. заметки*, 2002, том 71, выпуск 3, 470–473

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm646>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 14:26:07

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

МЕТОД ЯВОРОВСКОГО В ЗАДАЧЕ О СОХРАНЕНИИ ЭКСТЕНЗОРНЫХ СВОЙСТВ ОРБИТНЫМ ФУНКТОРОМ

С. М. Агеев, Д. Реповш

Статья посвящается профессору Ю. М. Смирнову в честь его восьмидесятилетия.

1. Введение. Недавний прогресс в исследовании топологического строения компакта Банаха–Мазура $Q(n)$ [1], [2] существенно основывается на следующем результате о сохранении экстензорных свойств орбитным функтором.

ТЕОРЕМА 1.1. *Если G есть компактная группа Ли, а X есть метрическое G - $A[N]E$ -пространство, то пространство орбит X есть $A[N]E$.*

Применение этой теоремы для группы $O(n)$ и пространства выпуклых тел $L(n)$, имеющих единичный шар в качестве описанного эллипсоида Левнера, влечет, в частности, решение давнего вопроса об экстензорных свойствах $Q(n)$. Первоначальное доказательство теоремы 1.1 было достаточно громоздким [3]. Позже было получено более короткое доказательство, основывающееся на теореме Кертиса и годное для произвольных компактных групп [4] (для локально компактных групп Ли см. также [5]). Однако значительно ранее подошел к проблеме сохранения эквивариантных экстензорных свойств орбитным функтором Яворовский, который в [6] исследовал функтор симметрического произведения SP_G^n . Он показал справедливость следующего результата.

ТЕОРЕМА 1.2. *Если X есть компактное метрическое ANE -пространство, а G есть группа перестановок n элементов, то симметрическое произведение $SP_G^n X$, ассоциированное с G , есть $A[N]E$.*

С точки зрения эквивариантной теории экстензоров этот результат может быть записан так:

$$"X \in ANE \implies X^n \in G-ANE \implies SP_G^n X = X^n/G \in ANE".$$

Тем самым, он доказал теорему 1.1 для конечной подгруппы $G < S_n$ и компактного метрического G - ANE -пространства X^n . Несмотря на то, что работа Яворовского посвящена частному вопросу и содержит пробел, отмеченный в [7], [8] (впрочем легко поправимый), ее потенциал чрезвычайно велик. Так, с позиций современной теории эквивариантных экстензоров не представляет труда наполнить рассуждения Яворовского необходимой строгостью и получить очень элегантное доказательство теоремы 1.1. Как легко будет видно из предложенного доказательства, теорема 1.1 распространяется на любой класс пространств, в котором выполняется теорема Уайтхеда–Борсука–Ханнера. Авторы считали, что к числу таковых относится и класс кружевных (или стратифицируемых) пространств [9]. Однако профессор Р. Коти любезно указал нам, что его статья [10] содержит пробел, а вопрос о справедливости ее главного результата остается открытым.

Работа первого автора выполнена при частичной поддержке гранта Министерства образования республики Беларусь. Работа второго автора выполнена при поддержке гранта Министерства образования и технологии республики Словения, грант № J1-0885-0101-98.

2. Предварительные сведения и факты. Приведем основные понятия теории G -пространств [11], [12]. Под действием компактной группы G на пространстве X понимается непрерывное отображение μ из произведения $G \times X$ в X , удовлетворяющее следующим свойствам:

- (1) $\mu(g, \mu(h, x)) = \mu(g \cdot h, x)$;
- (2) $\mu(e, x) = x$ для всех $x \in X, g, h \in G$ (здесь e – единица группы G).

Как правило, вместо $\mu(g, x)$ будем писать $g \cdot x$, или просто gx . Пространство X с действием группы G называется G -пространством. Отображение $f: X \rightarrow Y$ двух G -пространств называется G -отображением, или *эквивариантным отображением*, если $f(g \cdot x) = g \cdot f(x)$ для всех $x \in X, g \in G$.

Орбитой $G(x)$ точки $x \in X$ называется подмножество $\{g \cdot x \mid g \in G\} = G \cdot x$, являющееся замкнутым. Естественное отображение $p: X \rightarrow X/G, x \mapsto G(x)$, пространства X в пространство фактор-разбиения X/G назовем *орбитной проекцией*. Пространство фактор-разбиения X/G , наделенное факторной топологией, порожденной p , будем называть *пространством орбит*.

Любое подмножество $A \subset X$ допускает *насыщение* орбитами $p^{-1}p(A) = G \cdot A$. Если насыщение совпадает с исходным подмножеством A , то A называется *инвариантным*, или G -подмножеством.

Для каждой точки $x \in X$ следующее подмножество $G_x = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$ является замкнутой подгруппой в группе G и называется *стабилизатором точки x* . Для любой замкнутой подгруппы $H < G$ множество $X^H = \{x \in X \mid H \cdot x = x\}$ называется *множеством H -неподвижных точек*. Напомним определение *скрещенного произведения*: если Y есть H -пространство, а $H < G$, то $G \times_H Y$ есть пространство орбит пространства $G \times Y$, наделенного действием $h \cdot (g, y) = (g \cdot h^{-1}, h \cdot y)$, т.е. произвольный элемент скрещенного произведения представляется в виде $H \cdot (g, y) = \{(g \cdot h^{-1}, h \cdot y) \mid h \in H\}$. Отметим, что

- (3) $G \times_H Y$ является G -пространством, наделенным действием $g_1 \cdot (H \cdot (g, y)) = H \cdot (g_1 \cdot g, y)$.

Введем ряд понятий, связанных с продолжением G -отображений. Пространство X с действием компактной группы G называется *эквивариантным абсолютным окрестностным экстензором для метрических пространств*, $X \in G\text{-ANE}$, если каждое G -отображение $\varphi: A \rightarrow X$, определенное на замкнутом G -подмножестве $A \subset Z$ метрического G -пространства Z и называемое *частичным G -отображением*, может быть G -продолжено на некоторую G -окрестность $U \subset Z$ множества A , $\hat{\varphi}: U \rightarrow X, \hat{\varphi}|_A = \varphi$. Если всегда возможно G -продолжить φ на $U = Z$, то X называется *эквивариантным абсолютным экстензором*, $X \in G\text{-AE}$. Если действующая группа G тривиальна (т.е. пространства рассматриваются без действий), то введенное понятие трансформируется в понятие абсолютных (окрестностных) экстензоров для метрических пространств $A[N]E$. Мы существенно основываем наши дальнейшие рассуждения на следующих двух фактах.

ТЕОРЕМА 2.1 (Уайтхеда–Борсука–Ханнера [13], [14]). *Если*

- (4) $Y \in A[N]E$ *есть замкнутое подмножество метрического пространства X ;*
- (5) $X \setminus Y \in A[N]E$;
- (6) Y *является строгим деформационным (строгим деформационным окрестностным) ретрактом (т.е. существует гомотопия $H_t: U \rightarrow X$ пространства $U \supset Y$ (некоторой окрестности U подмножества Y) такая, что $H_0 = \text{Id}, H_t|_Y = \text{Id}$, а H_1 является ретракцией U в Y) X ,*

то $X \in A[N]E$.

Возможность использования индуктивных рассуждений при доказательстве теоремы 1.1 основывается на теореме о срезе.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Скажем, что G -подмножество $A \subset X$ является K -трубчатым, где $K < G$ есть замкнутая подгруппа, если существует K -инвариантное подмножество $S \subset A$ такое, что

- (7) $G \cdot S = A$;
- (8) естественное отображение $\theta: G \times_K S \rightarrow A, \theta(K \cdot (g, s)) = g \cdot s$, является G -гомеоморфизмом.

Будем K -инвариантное подмножество $S \subset A$ называть K -срезом множества A .

Отметим, что K -срез $\mathbb{S}$ трубчатого множества $\mathbb{A} = G \times_K \mathbb{S}$ удовлетворяет следующим условиям:

- (9) $\mathbb{S}$ является K -инвариантным замкнутым подмножеством $\mathbb{A}$;
- (10) $g \cdot \mathbb{S} \cap \mathbb{S} \neq \emptyset \iff g \in K$.

Легко проверяется следующий факт.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. Любое подмножество $\mathbb{S} \subset \mathbb{A}$, удовлетворяющее условиям (8), (9), (10), является K -срезом K -трубчатого множества $\mathbb{A}$, $\mathbb{A} = G \times_K \mathbb{S}$.

ТЕОРЕМА 2.4 (о срезе G -пространства [11]). Пусть компактная группа Ли G действует на вполне регулярном G -пространстве $\mathbb{X}$. Тогда любая точка $x \in \mathbb{X}$ имеет G_x -трубчатую окрестность $\mathbb{U} = G \times_{G_x} \mathbb{S}$.

Теорема о срезе влечет, что любая орбита в $\mathbb{X}$ является эквивариантным окрестностным экстензором для класса вполне регулярных G -пространств.

Несложно установить, что число $\text{ind } G \Rightarrow \dim G + \mathcal{K}_G$, где $\mathcal{K}_G$ есть количество компонент связности группы G , удовлетворяет следующим условиям:

- (11) $\text{ind } G \geq 2$; $\text{ind } G = 2$ в том и только том случае, когда G является тривиальной группой;
- (12) если $H \lneq G$, то $\text{ind } H < \text{ind } G$.

Поскольку для $x \notin \mathbb{X}^G$ подгруппа G_x является собственной и, следовательно, $\text{ind } G_x < \text{ind } G$, то теорема о срезе позволяет во многих ситуациях использовать индуктивные рассуждения и сводить изучение эквивариантных экстензорных свойств $\mathbb{X} \setminus \mathbb{X}^G$ к изучению эквивариантных экстензорных свойств пространств с действием группы G_x , имеющей меньший индекс.

В работе [15] установлен факт взаимоотношения эквивариантных экстензорных свойств трубчатых окрестностей и их срезов.

ТЕОРЕМА 2.5. Если компактная группа Ли G действует на вполне регулярном G -пространстве $\mathbb{X}$, а трубчатая окрестность $\mathbb{U} = G \times_{G_x} \mathbb{S} \subset \mathbb{X}$ является G -ANE, то срез $\mathbb{S}$ в точке x является G_x -ANE.

Приведенный факт является следствием двух утверждений, доказательства которых также приведены в [15, с. 500].

ТЕОРЕМА 2.6. Если $X \in G\text{-A}[N]E$, то $X \in H\text{-A}[N]E$ для любой подгруппы $H < G$.

ТЕОРЕМА 2.7. Если H – подгруппа G , а $G \times_H \mathbb{S} \in G\text{-A}[N]E$, то $\mathbb{S} \in H\text{-A}[N]E$.

3. Доказательство теоремы. Подробно разберем лишь случай $\mathbb{X} \in G\text{-ANE} \implies X \in \text{ANE}$, предполагая, что после этого читателю будет ясно доказательство глобального случая.

Для тривиальной группы G очевидно, что $X \in \text{ANE}$. Мы можем индуктивно предположить, что теорема верна для всех групп с $\text{ind } G < n$, после чего доказывать теорему для G с $\text{ind } G = n$. Следует прежде всего заметить, что множество G -неподвижных точек $\mathbb{X}^G$ является строгим деформационным окрестностным G -ретрактом $\mathbb{X}$ и, следовательно, есть G -ANE. Поэтому

- (1) $(X^G)/G = X^G$ является строгим деформационным окрестностным ретрактом $X = \mathbb{X}/G$;
- (2) $X^G \in \text{ANE}$.

Если теперь доказать, что

- (3) $Y = X \setminus X^G \in \text{ANE}$,

то из теоремы Уайтхеда–Борсука–Ханнера будет следовать требуемое $X \in \text{ANE}$.

Свойство (3), в свою очередь, будет следовать из того факта, что

- (4) любая точка $y = p(x) \in Y$, $x \notin \mathbb{X}^G$, имеет окрестность $O(y) \in \text{ANE}$.

В силу теоремы 2.4 существует G_x -трубчатая окрестность $\mathbb{U} = G \times_{G_x} \mathbb{S}$ точки $x \in \mathbb{X}$. Как инвариантная окрестность G -ANE-пространства $\mathbb{U}$ принадлежит классу G -ANE. В силу теоремы 2.6 $\mathbb{U}(x) \in G_x\text{-ANE}$. Так как G_x есть собственная подгруппа G , то в силу индуктивного предположения ($\text{ind}(G_x) < n$) имеем $\mathbb{U}(x)/G_x \in G_x\text{-ANE}$.

Но пространство орбит $U(x) \rightleftharpoons \mathbb{U}(x)/G$ является ретрактом $\mathbb{U}(x)/G_x \in \text{ANE}$. Чтобы увидеть это, рассмотрим отображение $h: \mathbb{S}/G_x \rightarrow U(x)$, $h(G_x(z)) = G(z)$, $z \in \mathbb{S}$, которое, как несложно видеть, является гомеоморфизмом. Так как $\mathbb{S}$ замкнуто в $\mathbb{U}(x)$, то $\mathbb{S}/G_x$ замкнуто в $\mathbb{U}(x)/G_x$. Непосредственной проверкой устанавливается, что отображение $H: \mathbb{U}(x)/G_x \rightarrow U(x)$, $H(G_x \cdot z) = G(z)$, $z \in \mathbb{U}(x)$, является непрерывным продолжением гомеоморфизма h , $H|_{\mathbb{S}/G_x} = h$. Следовательно, $h^{-1} \circ H$ есть ретракция $\mathbb{U}/G_x$ на пространство $\mathbb{S}/G_x$, которое, стало быть, является ANE. Поэтому $U(x) \cong \mathbb{S}/G_x$ также является ANE.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Агеев С. М., Богатый С. А., Фабел П. // Вестн. МГУ. Сер. 1. 1998. № 1. С. 11–13.
2. Агеев С. М., Богатый С. А. // УМН. 1998. Т. 53. № 1. С. 209–210.
3. Антонян С. // Матем. сб. 1990. Т. 65. С. 305–321.
4. Агеев С. М. // Вестн. МГУ. Сер. 1. 1994. № 1. С. 11–15.
5. Агеев С. М., Богатый С. А., Реповш Д., Фабел Р. // Докл. РАН. 1998. Т. 362. № 2. С. 151–154.
6. Jaworowski J. // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Math. 1972. V. 20. P. 649–651.
7. Nhu N. // Fund. Math. 1984. V. 124. P. 243–254.
8. Федорчук В. В. // УМН. 1981. Т. 36. № 3. С. 177–195.
9. Borges C. // Pacific J. Math. 1966. V. 17. P. 1–16.
10. Cauty R. // C. R. Acad. Sc. Paris. 1972. V. 275. № 4. P. 271–274.
11. Бредон Г. Введение в теорию компактных групп преобразований. М.: Наука, 1980.
12. Palais R. The classification of G -spaces // Memoirs of Amer. Math. Soc. 1960. V. 36.
13. Hu S.-T. Theory of Retracts. Detroit: Wayne State Univ. Press, 1965.
14. Whitehead J. H. C. // Bull. Amer. Math. Soc. 1948. V. 54. P. 1125–1132.
15. Murayama T. // Osaka J. Math. 1983. V. 20. P. 479–512.

(С. М. Агеев) Брестский государственный университет

им. А. С. Пушкина, Беларусь

(Д. Реповш) Люблянский университет, Словения

E-mail: ageev@highmath.brsu.brest.by,

dusan.repovs@fmf.uni-lj.si

Поступило

18.09.2000

Исправленный вариант

23.05.2001