Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. М. Карабаш, О подобии J -самосопряженных дифференциальных операторов нечетного порядка нормальным опе-

раторам, *Матем. заметки*, 2002, том 71, выпуск 3, 476–480

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm648>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 14:12:38

О ПОДОБИИ J -САМОСОПРЯЖЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ НЕЧЕТНОГО ПОРЯДКА НОРМАЛЬНЫМ ОПЕРАТОРАМ

И. М. Карабаш

Рассмотрим операторы вида

$$A = \frac{1}{w(x)} p \left(-i \frac{d}{dx} \right)$$

в гильбертовом пространстве $L^2(\mathbb{R})$, где

$$p(z) = z^m + a_{m-1}z^{m-1} + \dots + a_1z + a_0 \quad (1)$$

– полином с вещественными коэффициентами a_j , а $w(x)$ – вещественная ступенчатая функция с конечным числом ступенек, не принимающая нулевых значений. Более точно,

$$w(x) = w_0 \chi_{(-\infty, \beta_0]}(x) + \sum_{k=1}^{N-1} w_k \chi_{(\beta_{k-1}, \beta_k]}(x) + w_N \chi_{(\beta_{N-1}, +\infty)}(x), \quad (2)$$
$$-\infty < \beta_0 < \beta_1 < \dots < \beta_{N-1} < +\infty, \quad w_k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad k = 0, 1, \dots, N.$$

Здесь $\chi_{\mathcal{J}}$ обозначает индикатор-функцию интервала $\mathcal{J}$. Обозначим

$$D := -i \frac{d}{dx}.$$

Самосопряженный оператор $p(D)$ определен на соболевском пространстве $W_2^m(\mathbb{R})$ (см. [1]). Пусть $M_{w^{-1}} = M_{w^{-1}}^*$ – оператор умножения на функцию $w^{-1}(x)$,

$$M_{w^{-1}} f(x) := \frac{1}{w(x)} f(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Если $w(x)$ не является константой, то оператор A будет несамосопряженным, так как является произведением двух некоммутирующих самосопряженных операторов, $A^* = p(D)M_{w^{-1}} \neq A$. Через $\sigma(A)$ и $\rho(A)$ будем обозначать спектр и резольвентное множество оператора A соответственно.

Случай, когда $w(x) = \operatorname{sgn} x$ и $p(z)$ – полином четного порядка, рассматривался в работах [2]–[4]. Для таких операторов в [3], [4] был получен следующий критерий подобия самосопряженному оператору: оператор A подобен самосопряженному оператору, если и только если полином $p(z)$ неотрицателен. Аналогичные вопросы для операторов в частных производных изучались в [5]. Операторы с дискретным спектром исследовались в [6]. Более детальные ссылки можно найти в работах [2], [5].

В заметке [7] было показано, что оператор

$$A = \frac{1}{w(x)} D$$

подобен самосопряженному, если и только если функция $w(x)$ принимает значения только одного знака. В настоящей заметке мы рассматриваем случай произвольного полинома нечетного порядка $p(z)$. Всюду далее, если не оговорено противное, мы полагаем, что $p(z)$ – полином нечетного порядка вида (1) и $m = 2n - 1$.

Рассмотрим сужение $A_0 := A|_{D(A_0)}$ оператора A на

$$D(A_0) = \{y(x) \in W_2^m(\mathbb{R}) : (D^j y)(\beta_k) = 0, j = 0, \dots, m-1, k = 0, \dots, N-1\}.$$

Оператор A_0 симметрический. Следующее предложение легко получается из леммы 1, приведенной ниже.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Симметрический оператор A_0 имеет равные индексы дефекта, если и только если $w_0 w_N > 0$.*

СЛЕДСТВИЕ 1. *Если $w_0 w_N < 0$, то $\sigma(A) = \mathbb{C}$ и собственные значения оператора A заполняют по крайней мере одну из полуплоскостей $\mathbb{C}_{\pm} := \{\pm \operatorname{Im} \lambda > 0\}$. Следовательно, оператор A не подобен нормальному оператору.*

Пусть $w_0 w_N > 0$. Тогда A_0 – симметрический оператор с равными индексами дефекта (mN, mN) . Нетрудно увидеть, что $A_0 \subset A \subset A_0^*$,

$$D(A) = \{y(x) \in D(A_0^*) : (D^j y)(\beta_k - 0) = (D^j y)(\beta_k + 0), j = 0, \dots, m-1, k = 0, \dots, N-1\},$$

и оператор A является квазисамосопряженным расширением оператора A_0 [8]. Хорошо известно, что не вещественный спектр квазисамосопряженных расширений симметрических операторов состоит из собственных значений (см., например, [8], [9]).

Случай, когда функция $w(x)$ принимает значения только одного знака, интереса не представляет, так как легко показать, что оператор A подобен самосопряженному. Поэтому далее считаем, что $w(x)$ принимает значения обоих знаков.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Пусть функция $w(x)$ принимает как положительные, так и отрицательные значения и $w_0 w_N > 0$. Тогда для любого $\varphi > 0$ существует $R_\varphi > 0$ такое, что*

$$\rho(A) \supset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > R_\varphi, |\arg \lambda - k\pi/2| > \varphi, k = 0, 1, 2, 3, 4\}.$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть функция $w(x)$ принимает как положительные, так и отрицательные значения и $w_0 w_N > 0$. Пусть $\psi \neq k\pi/2$, $k = 0, 1, 2, 3$. Тогда для достаточно больших r существует резольвента $\mathcal{R}_A(re^{i\psi}) := (A - re^{i\psi}I)^{-1}$ и

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \|\mathcal{R}_A(re^{i\psi})\| = \infty.$$

Хорошо известно, что условие

$$\|(T - \lambda I)^{-1}\| \leq \frac{\text{const}}{\text{dist}(\lambda, \sigma(T))} \quad (3)$$

является необходимым, для того чтобы оператор T был подобен нормальному оператору. Предложение 2 и теорема 1 показывают, что если функция $w(x)$ принимает как положительные, так и отрицательные значения, то условие (3) не выполняется для оператора A .

ТЕОРЕМА 2. Пусть $p(z)$ – полином нечетного порядка вида (1) и пусть $w(x)$ – ступенчатая функция вида (2). Если $w(x)$ принимает как положительные, так и отрицательные значения, то оператор $A = \frac{1}{w(x)}p(D)$ не подобен нормальному оператору.

Приведем набросок доказательства.

Обозначим через $\Xi^\pm = \{\xi_j^\pm(\lambda)\}_1^m$ семейства корней полиномов $p(z) \mp \lambda$. Пусть $\Lambda^+ := \mathbb{C}_+ \cap \{|\lambda| > R\}$. Выбрав число R такое, что полиномы $p(z) \mp \lambda$ не имеют кратных корней в области Λ^+ , можно считать, что $\xi_j^\pm(\lambda)$ являются функциями от λ , голоморфными в Λ_+ . Через $\omega_{m,j}(z)$ обозначим ветвь функции $\sqrt[m]{z}$, определенную в $\mathbb{C}$, с разрезом вдоль положительной полуоси $\mathbb{R}_+$ и такую, что $\omega_{m,j}(-1) = e^{i(\pi/m + 2\pi(j-1)/m)}$. Тогда можно пронумеровать функции $\xi_j^\pm(\lambda)$ так, что

$$\frac{\xi_j^+(\lambda)}{\omega_{m,j}(\lambda)} \rightarrow 1, \quad \frac{\xi_j^-(\lambda)}{\omega_{m,m-j+1}(-\lambda)} \rightarrow 1 \quad \text{при } \lambda \rightarrow \infty, \lambda \in \Lambda^+, j = 1, \dots, m. \quad (4)$$

Определим следующие семейства функций: $\Xi := \Xi^+ \cup \Xi^-$, $\Xi_1^+ = \{\xi_j^+\}_1^n$, $\Xi_2^+ = \{\xi_j^+\}_{n+1}^m$, $\Xi_1^- = \{\xi_j^-\}_1^n$, $\Xi_2^- = \{\xi_j^-\}_{n+1}^m$ (напомним, что $m = 2n - 1$).

ЛЕММА 1. Функции из семейств Ξ_1^+ , Ξ_2^- принимают значения из $\mathbb{C}_+$, функции из семейств Ξ_2^+ , Ξ_1^- принимают значения из $\mathbb{C}_-$. Таким образом, семейства $\Xi^\pm$ содержат ровно n функций, принимающих значения из $\mathbb{C}_\pm$, и ровно $n - 1$ функций, принимающих значения из $\mathbb{C}_\mp$.

Предложение 1 следует из леммы 1.

Для простоты рассмотрим случай оператора пятого порядка $p(z) = z^5 + a_4 z^4 + \dots + a_0$. Пусть функция $w(x)$ имеет вид

$$w(x) = \chi_{(-\infty, \beta_0]}(x) + \sum_{k=1}^3 (-1)^k \chi_{(\beta_{k-1}, \beta_k]}(x) + \chi_{(\beta_{N-1}, +\infty)}(x), \quad N = 4.$$

Оператор A_0 симметрический с индексами дефекта $(n_+, n_-) = (20, 20)$. Пусть $\lambda \in \Lambda^+$. Легко видеть, что любая функция y_0 из $\ker(A_0^* - \lambda I)$ единственным образом представляется в виде

$$\begin{aligned} y_0 = & \sum_{j=4}^5 c_j^{[0]} e^{i\xi_j^+(\lambda)(x-\beta_0)} \chi_{(-\infty, \beta_0]}(x) + \sum_{k=1,3} \sum_{j=1}^5 c_j^{[k]} e^{i\xi_j^-(\lambda)(x-\beta_{k-1})} \chi_{(\beta_{k-1}, \beta_k]}(x) \\ & + \sum_{j=1}^5 c_j^{[2]} e^{i\xi_j^+(\lambda)(x-\beta_1)} \chi_{(\beta_1, \beta_2]}(x) + \sum_{j=1}^3 c_j^{[4]} e^{i\xi_j^+(\lambda)(x-\beta_4)} \chi_{(\beta_4, +\infty)}(x) \end{aligned} \quad (5)$$

с некоторыми константами $c_j^{[k]} \in \mathbb{C}$.

Обозначим $\Gamma(x_0 \pm 0) := \text{col}[(D^j y)(x_0 \pm 0)]_{j=0}^4$, где $\text{col}[z_j]_{j=0}^l$ – вектор-столбец $[z_0, z_1, \dots, z_l]$. Через $V_\delta(z_1, z_2, \dots, z_l) = (v_{j,k})_{j=1, \dots, 5}^{k=1, \dots, l}$ будем обозначать матрицу размера $5 \times l$ с элементами $v_{j,k} = z_k^{j-1} e^{iz_k \delta}$. Ясно, что $V_0(z_1, z_2, \dots, z_l)$ – матрица Вандермонда.

В силу (5)

$$\begin{aligned} \Gamma(\beta_0 - 0)y_0 &= V_0(\xi_4^+, \xi_5^+) \text{col}[c_4^{[0]}, c_5^{[0]}] =: M_{-0}^{[0]} \text{col}[c_4^{[0]}, c_5^{[0]}], \\ \Gamma(\beta_{k-1} + 0)y_0 &= V_0(\xi_1^-, \xi_2^-, \dots, \xi_5^-) \text{col}[c_j^{[k]}]_{j=1}^5 =: M_{+0}^{[k]} \text{col}[c_j^{[k]}]_{j=1}^5 \quad \text{для } k = 1, 3, \\ \Gamma(\beta_k - 0)y_0 &= V_{\delta_k}(\xi_1^-, \xi_2^-, \dots, \xi_5^-) \text{col}[c_j^{[k]}]_{j=1}^5 =: M_{-0}^{[k]} \text{col}[c_j^{[k]}]_{j=1}^5 \quad \text{для } k = 1, 3, \\ \Gamma(\beta_1 + 0)y_0 &= V_0(\xi_1^+, \xi_2^+, \dots, \xi_5^+) \text{col}[c_j^{[2]}]_{j=1}^5 =: M_{+0}^{[2]} \text{col}[c_j^{[2]}]_{j=1}^5, \\ \Gamma(\beta_2 - 0)y_0 &= V_{\delta_2}(\xi_1^+, \xi_2^+, \dots, \xi_5^+) \text{col}[c_j^{[2]}]_{j=1}^5 =: M_{-0}^{[2]} \text{col}[c_j^{[2]}]_{j=1}^5, \\ \Gamma(\beta_3 + 0)y_0 &= V_0(\xi_1^+, \xi_2^+, \xi_3^+) \text{col}[c_1^{[4]}, c_2^{[4]}, c_3^{[4]}] =: M_{+0}^{[4]} \text{col}[c_1^{[4]}, c_2^{[4]}, c_3^{[4]}], \end{aligned}$$

где $\delta_k := \beta_k - \beta_{k-1}$.

Условие $y \in D(A)$ может быть записано в следующей форме:

$$-\Gamma(\beta_k - 0)y + \Gamma(\beta_k + 0)y = 0, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Если y_0 – собственная функция оператора A , $Ay_0 = \lambda y_0$, то коэффициенты $c_j^{[k]}$ будут удовлетворять следующему равенству:

$$\begin{pmatrix} -M_{-0}^{[0]} & M_{+0}^{[1]} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -M_{-0}^{[1]} & M_{+0}^{[2]} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -M_{-0}^{[2]} & M_{+0}^{[3]} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -M_{-0}^{[3]} & M_{+0}^{[4]} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{col}[c_4^{[0]}, c_5^{[0]}] \\ \text{col}[c_j^{[1]}]_{j=1}^5 \\ \text{col}[c_j^{[2]}]_{j=1}^5 \\ \text{col}[c_j^{[3]}]_{j=1}^5 \\ \text{col}[c_j^{[4]}]_{j=1}^3 \end{pmatrix} = 0.$$

Обозначим через $M(\lambda)$ матрицу-функцию в левой части этого равенства.

Таким образом, если $\lambda \in \Lambda^+$, то

$$\lambda \in \sigma(A) \iff \det M(\lambda) = 0.$$

Пусть $\varphi > 0$. Обозначим $\Lambda_\varphi^k := \{\lambda \in \Lambda^+ : \arg \lambda \in ((k-1)\pi/2 + \varphi, k\pi/2 - \varphi)\}$, $k = 1, 2$. Вычисляя $\det M(\lambda)$ и используя (4), получаем следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Если $\lambda \in \Lambda_\varphi^1 \cup \Lambda_\varphi^2$, то $\det M(\lambda) \rightarrow \infty$ при $\lambda \rightarrow \infty$.

Из предложения 3 с очевидностью следует предложение 2.

Пусть $\lambda \in \rho(A)$, $f \in L^2(\mathbb{R})$, $y = (A - \lambda I)^{-1}f$. Если $y_1 \in D(A_0^*)$ и $(A_0^* - \lambda I)y_1 = f$, то $y - y_1 \in \ker(A_0^* - \lambda I)$. Кроме того, предположим, что $\lambda \in \Lambda_\varphi^1 \cup \Lambda_\varphi^2$. Обозначим $y_0 = y - y_1$ и представим y_0 в виде (5). Условие $y \in D(A)$ равносильно

$$\Gamma(\beta_k + 0)y_0 - \Gamma(\beta_k - 0)y_0 = -\Gamma(\beta_k + 0)y_1 - \Gamma(\beta_k - 0)y_1, \quad k = 0, 1, 2, 3. \quad (6)$$

Пусть теперь $\lambda \in \Lambda_\varphi^1$; случай $\lambda \in \Lambda_\varphi^2$ рассматривается аналогично. Положим $f(x) = \chi_{(\beta_2, \beta_3]}(x)$. Пусть $y_1(x) = -(\lambda + a_0)^{-1} \chi_{(\beta_2, \beta_3]}(x)$. Тогда $y_1 \in D(A_0^*)$ и $(A_0^* - \lambda I)y_1 = f$. Из (6) следует,

что решение уравнения $(A - \lambda I)y = f$ представляется в виде $y = y_1 + y_0$, где y_0 имеет вид (5) с коэффициентами $c_j^{[k]}$ такими, что

$$M(\lambda) \begin{pmatrix} \text{col}[c_4^{[0]}, c_5^{[0]}] \\ \text{col}[c_j^{[1]}]_{j=1}^5 \\ \text{col}[c_j^{[2]}]_{j=1}^5 \\ \text{col}[c_j^{[3]}]_{j=1}^5 \\ \text{col}[c_j^{[4]}]_{j=1}^3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \text{col}[0, 0, 0, 0, 0] \\ \text{col}[0, 0, 0, 0, 0] \\ \text{col}[(\lambda + a_0)^{-1}, 0, 0, 0, 0] \\ \text{col}[-(\lambda + a_0)^{-1}, 0, 0, 0, 0] \end{pmatrix}.$$

Используя правило Крамера, легко показать, что

$$c_j^{[4]}(\lambda) \asymp \lambda^{-1} e^{i\xi_3^-(\lambda)} \delta_3 \quad \text{для } j = 1, 2, 3$$

(как обычно, $f(\lambda) \asymp g(\lambda)$ означает, что существуют положительные константы C_1 и C_2 такие, что $0 < C_1 < |f(\lambda)/g(\lambda)| < C_2$ для достаточно больших λ).

Обозначим

$$y_+(x, \lambda) := \sum_{j=1}^3 c_j^{[4]}(\lambda) e^{i\xi_j^+(\lambda)(x-\beta_4)} \chi_{(\beta_3, +\infty)}(x).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть $\psi \neq k\pi/2$, $k = 0, 1, 2, 3$. Тогда

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \|y_+(x, re^{i\psi})\|_{L^2} = \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Так как $(y_0 - y_+, y_+)_{L^2} = 0$, то

$$\|\mathcal{R}_A(\lambda)f\|_{L^2} \geq \|y_0(x, \lambda)\|_{L^2} - \|y_1(x, \lambda)\|_{L^2} \geq \|y_+(x, \lambda)\|_{L^2} - \|y_1(x, \lambda)\|_{L^2}.$$

Ясно, что

$$\|y_1(x, \lambda)\|_{L^2} = |\lambda + a_0|^{-1} \|\chi_{(\beta_2, \beta_3]}(x)\|_{L^2} \rightarrow 0 \quad \text{для } \lambda \rightarrow \infty. \quad (7)$$

Таким образом, утверждение теоремы следует из (7) и предложения 4.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Интересно отметить, что хотя оператор $(\text{sgn } x)D^2$ подобен самосопряженному [2], оператор $A = \frac{1}{w(x)}D^2$ с весовой функцией $w(x) = \chi_{(-\infty, 0)} + \chi_{(0, 1)} + \chi_{(1, +\infty)}$ имеет вещественный спектр, но не подобен самосопряженному оператору.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Березанский Ю. М., Ус Г. Ф., Шефтель З. Г. Функциональный анализ. Киев: Высшая школа, 1990.
2. Ćurgus B., Najman B. // Oper. Theory Adv. Appl. V. 87. Basel: Birkhäuser, 1996. P. 95–104.
3. Karabash I. M. // Methods of Functional Analysis and Topology. 2000. V. 6. № 2. P. 22–49.
4. Карабаш И. М. // Матем. заметки. 2000. Т. 68. № 6. С. 943–944.
5. Ćurgus B., Najman B. // Oper. Theory Adv. Appl. V. 106. Basel: Birkhäuser, 1998. P. 113–130.
6. Пятков С. Г. // Сиб. матем. ж. 1989. Т. 30. № 4. С. 111–124.
7. Karabash I. M. // Spectral and Evolutionary Problems. Proc. of the Tenth Crimean Autumn Math. School-Symposium. V. 10. Simferopol, 2000. P. 22–25.
8. Ахизер Н. И., Глазман И. М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. Т. II. Харьков: Высшая школа, 1978.
9. Derkach V. A., Malamud M. M. // J. Math. Sci. 1995. V. 73. № 2. P. 141–242.