Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Ларин, А. И. Созутов, О строении локально ступенчатых $\overline{T}$ -групп, *Матем. заметки*, 2002, том 71, выпуск 4, 633–636

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm649>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 11:55:10

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

О СТРОЕНИИ ЛОКАЛЬНО СТУПЕНЧАТЫХ $\overline{T}$ -ГРУПП

С. В. Ларин, А. И. Созутов

В 14-м издании Коуровской тетради [1] Ф. де Джованни поставил следующий

ВОПРОС 14.36. *Группа G называется T -группой, если всякая ее субнормальная подгруппа нормальна, и G называется $\overline{T}$ -группой, если ее подгруппы являются T -группами. Верно ли, что любая непериодическая локально ступенчатая $\overline{T}$ -группа абелева?*

Цель заметки – показать, что вопрос сводится к рассмотрению локально ступенчатых $\overline{T}$ -групп без кручения, являющихся R -группами.

Напомним определения необходимых понятий. Группа G называется *локально ступенчатой*, если в ней каждая неединичная конечнопорожденная подгруппа имеет подгруппу отличного от единицы конечного индекса [2, с. 236]. Примерами таких групп являются свободные группы, свободные произведения локально ступенчатых групп, локально разрешимые группы и т.д. Впервые локально ступенчатые группы исследовал Черников. В частности, ему принадлежит следующий результат.

ТЕОРЕМА ЧЕРНИКОВА [2, с. 236]. *Если локально ступенчатая бесконечная неабелева группа G имеет хотя бы одну нормальную бесконечную абелеву подгруппу и все ее бесконечные абелевы подгруппы нормальны, то группа G разрешима.*

Подгруппа M *субнормальна* в G , если существует ряд $M = M_1 \triangleleft M_2 \triangleleft \dots \triangleleft M_n = G$, в котором каждая подгруппа нормальна в следующей. Если свойство быть нормальной подгруппой транзитивно в группе G , то ее называют T -группой. Наиболее изученными примерами таких групп являются гамильтоновы группы. На другом полюсе простые группы, их прямые произведения, расширения с помощью мультипликаторов Шура и т.д. По-видимому, впервые транзитивность свойства нормальности подгруппы изучалась в [3].

Группы, все подгруппы которых являются T -группами, т.е. $\overline{T}$ -группы, впервые начали изучать Абрамовский и Каргаполов [4], а также Робинсон [5]. Примеры таких групп – некоторые группы Ольшанского, их расширения с помощью мультипликаторов Шура и т.д.

Группа без кручения G называется R -группой или группой с однозначным извлечением корня, если для любых $a, b \in G$ из равенства $a^n = b^n$ следует $a = b$. Примеры R -групп также разнообразны. Среди них абелевы группы без кручения, свободные группы, локально нильпотентные группы без кручения, простая группа Ольшанского, все собственные подгруппы которой бесконечные циклические и т.д.

С целью компактной формулировки основного результата заметки $\overline{T}$ -группу без кручения с однозначным извлечением корня назовем RT -группой. Основным результатом заметки является

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-01-00542, и Красноярского краевого фонда науки, грант № 9F0132.

ТЕОРЕМА 1. *Если любая локально ступенчатая $R\bar{T}$ -группа абелева, то и любая локально ступенчатая непериодическая $\bar{T}$ -группа абелева.*

Доказательство сформулированной теоремы содержится в доказанных ниже леммах. Приведем известные результаты о T -группах, которые будут использованы в дальнейшем.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 (теорема Робинсона [6, с. 543]). *Разрешимая T -группа двуступенно разрешима.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2 [6, с. 543]. *Если G – разрешимая T -группа и конечно порождена, то G конечна или абелева.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3 (теорема Робинсона [6, с. 543]). *Конечно порожденная разрешимая T -группа без кручения абелева.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4 (теорема Абрамовского–Каргаполова [4], [7]). *Локально конечная $\bar{T}$ -группа разрешима.*

ЛЕММА 1. *Подгруппа и фактор-группа $\bar{T}$ -группы G сами являются $\bar{T}$ -группами.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение для подгрупп очевидно. Рассмотрим фактор-группу $\bar{G} = G/N$ и в ней подгруппу $\bar{H}$. Пусть подгруппа $\bar{M}$ субнормальна в $\bar{H}$, т.е. существует ряд

$$\bar{M} = \bar{M}_1 \triangleleft \bar{M}_2 \triangleleft \dots \triangleleft \bar{M}_n = \bar{H}, \quad (1)$$

в котором каждая подгруппа нормальна в следующей. Тогда и прообразы M_i членов ряда (1) составляют аналогичный ряд

$$M = M_1 \triangleleft M_2 \triangleleft \dots \triangleleft M_n = H. \quad (2)$$

Поскольку G является $\bar{T}$ -группой, то все подгруппы ряда (2) нормальны в H . Отсюда следует, что $\bar{M} \triangleleft \bar{H}$. Таким образом, $\bar{G}$ является $\bar{T}$ -группой. Лемма доказана.

ЛЕММА 2. *В локально ступенчатой $\bar{T}$ -группе G всякая конечно порожденная подгруппа H либо конечна, либо ее фактор-группа по коммутанту H/H' непериодическая.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия локальной ступенчатости группы G и теоремы Пуанкаре [8, упражнение 2.5.13] следует существование собственной нормальной подгруппы N_1 в подгруппе H конечного индекса. Если подгруппа N_1 единична, то H конечна, что и требовалось доказать. Если же подгруппа N_1 неединична, то она конечно порождена [9, с. 114] и по условию локальной ступенчатости в N_1 существует собственная нормальная подгруппа N_2 конечного индекса.

Продолжая эти рассуждения, мы либо на конечном шаге обнаружим конечность подгруппы H , либо построим последовательность нормальных в H подгрупп

$$H > N_1 > N_2 > \dots \quad (3)$$

таких, что $|H/N_i| < \infty$ для любого $i = 1, 2, \dots$, причем $|H/N_i| < |H/N_{i+1}|$. Поэтому если P есть пересечение всех подгрупп ряда (3), то $|H/P| = \infty$. В этом случае для любого $i = 1, 2, \dots$ фактор-группа H/N_i — конечная T -группа и по предложению 4 разрешима, а по предложению 1 двуступенно разрешима. Таким образом, $H'' \leq N_i$, $i = 1, 2, \dots$, и поэтому $H'' \leq P$. Значит, H/P — разрешимая конечно порожденная T -группа и по предложению 2 она абелева.

Итак, фактор-группа H/P , а вместе с ней и H/H' непериодические. Лемма доказана.

ЛЕММА 3. *Если в локально ступенчатой $\bar{T}$ -группе G подгруппа N принадлежит центру, то фактор-группа G/N локально ступенчатая.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим неединичную конечно порожденную фактор-группу $H/N = \langle a_1N, \dots, a_kN \rangle$ и докажем, что она содержит подгруппу конечного индекса, отличного от 1. Пусть $F = \langle a_1, \dots, a_k \rangle$, тогда $H = FN$, а так как N – подгруппа из центра, то коммутант $H' = F'$.

По лемме 2 либо подгруппа F конечна и тогда фактор-группа $H/N = FN/N$ содержит нужную подгруппу, либо фактор-группа F/F' непериодическая. В последнем случае $H' = F' < F \leq H$ и, следовательно, фактор-группа H/H' непериодическая.

Если $H'N \neq H$, то фактор-группа $H'N/N \neq H/N$, а значит, фактор-группа H/N содержит нужную подгруппу.

Предположим, что $H'N = H$. Тогда $H'/(H' \cap N) \simeq H'N/N = H/N$ – неединичная конечно порожденная группа. Заменяя в проведенных выше рассуждениях H на H' и N на $N_1 = H' \cap N$, мы либо обнаружим в H'/N_1 , а значит и в H/N , нужную подгруппу, либо установим, что $H''N_1 = H'$, фактор-группа H'/H'' непериодическая и $H''/(H' \cap N_1)$ – неединичная конечно порожденная группа. Если предположить, что и на третьем шаге мы не обнаружим в фактор-группе H/N нужную подгруппу, то будем иметь $H > H' > H'' > H'''$. Но тогда фактор-группа H/H''' разрешима, и по предложению 2 степень ее разрешимости не должна превышать 2 – пришли к противоречию. Полученное противоречие заставляет нас принять, что фактор-группа H/N содержит подгруппу конечного индекса, отличного от 1. Это доказывает локальную ступенчатость фактор-группы G/N . Лемма доказана.

Если в бесконечной группе G все элементы конечных порядков составляют подгруппу $T(G)$, то эта подгруппа называется *периодической частью* группы G .

ЛЕММА 4. *Непериодическая локально ступенчатая $\bar{T}$ -группа G обладает абелевой непериодической частью $T(G)$, содержащейся в центре $Z(G)$ группы G .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть H – подгруппа, порожденная конечным числом элементов конечного порядка из G . В силу леммы 2 подгруппа H конечна. Следовательно, все элементы конечных порядков составляют в G локально конечную подгруппу $T(G)$ – периодическую часть группы G . Из условий леммы следует, что $T(G)$ является $\bar{T}$ -группой, а из предложений 4 и 1 вытекает, что группа $T(G)$ двуступенно разрешима.

Пусть a – произвольный элемент бесконечного порядка из G (ввиду условий теоремы такой элемент найдется) и $t_1, t_2, \dots, t_n$ – произвольные элементы из $T(G)$. Из условий леммы вытекает, что $M = \langle a, t_1, t_2, \dots, t_n \rangle$ является $\bar{T}$ -группой. Ввиду доказанного выше $M = (M \cap T(G))\lambda\langle a \rangle$, $(M \cap T(G))'' = 1$ и, значит, группа M разрешима ступени не выше 3. Используя предложение 2, заключаем, что подгруппа M абелева. В силу произвольности элементов $t_1, t_2, \dots, t_n \in T(G)$ последнее означает коммутативность подгруппы $T(G)$. Наконец, произвольность выбора элемента a бесконечного порядка из G влечет включение $T(G) \leq Z(G)$. Лемма доказана.

ЛЕММА 5. *Для непериодической локально ступенчатой группы G фактор-группа $G/T(G)$ – локально ступенчатая $\bar{T}$ -группа без кручения.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Понятно, что фактор-группа $\bar{G} = G/T(G)$ не имеет кручения. По лемме 4 подгруппа $T(G)$ содержится в центре группы G , а по леммам 1 и 3 фактор-группа $G/T(G)$ является локально ступенчатой $\bar{T}$ -группой. Лемма доказана.

ЛЕММА 6. *Локально ступенчатая $\bar{T}$ -группа G без кручения является R -группой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть для элементов $a, b \in G$ имеет место равенство $a^n = b^n$. Обозначим $H = \langle a, b \rangle$, $N = \langle a^n \rangle$ и $\bar{H} = H/N$. Очевидно, подгруппа N лежит в центре группы H и по лемме 3 $\bar{H}$ является двупорожденной локально ступенчатой $\bar{T}$ -группой. По лемме 2 группа $\bar{H}$ либо конечна, либо фактор-группа $\bar{H}/\bar{H}'$ непериодическая. В первом случае по предложению 4 группа $\bar{H}$ разрешима, что влечет разрешимость группы H . Но тогда по предложению 3 группа H абелева, а значит $a = b$.

Покажем, что второй случай невозможен. Обозначим $\bar{a} = aN$, $\bar{b} = bN$. Тогда $\bar{H} = \langle \bar{a}, \bar{b} \rangle$. Поскольку $\bar{H}' = H'N/N$ и $a^n = b^n \in N$, то $\bar{a}^n = \bar{b}^n \in \bar{H}'$. Следовательно, фактор-группа $\bar{H}/\bar{H}'$ конечна. Лемма доказана.

Завершает доказательство теоремы

ЛЕММА 7. Если для неперiodической локально ступенчатой $\overline{T}$ -группы G фактор-группа $G/T(G)$ абелева, то и группа G абелева.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду леммы 4 достаточно доказать, что каждая подгруппа H , порожденная элементами a, b бесконечного порядка, абелева. Поскольку $H \cap T(G) = T(H)$ и $H/T(H) \simeq HT(G)/T(G)$, то фактор-группа $H/T(H)$ абелева, что следует из условий леммы. По предложению 2 группа H абелева. Лемма доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коуровская тетрадь: Нерешенные вопросы теории групп. 14-е изд. Новосибирск, 1999.
2. Черников С. Н. Группы с заданными свойствами системы подгрупп. М.: Наука, 1980.
3. Best E., Taussky O. // Proc. Roy. Acad. Sect. A. 1942. V. 47. P. 55–62.
4. Абрамовский И. Н., Каргаполов М. И. // УМН. 1958. Т. 13. №3. С. 242–243.
5. Robinson D. S. // Cambr. Phil. Soc. 1964. V. 60. P. 21–38.
6. Курош А. Г. Теория групп. М.: Наука, 1967.
7. Абрамовский И. Н. // Сиб. матем. ж. 1966. Т. 7. №3. С. 481–485.
8. Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И. Основы теории групп. М.: Наука, 1977.
9. Холл М. Теория групп. М.: ИЛ, 1962.

(С. В. Ларин) Красноярский государственный педагогический университет
(А. И. Созутов) Красноярская государственная
архитектурно-строительная академия
E-mail: root@sozutov.krasnoyarsk

Поступило
29.01.2001