Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. К. Логинов, О лупах Бола, *Матем. заметки*, 2004, том 75, выпуск 5, 693–701

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm65>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 11:02:42

УДК 512

О ЛУПАХ БОЛА

Е. К. Логинов

В настоящей статье исследуются лупы Бола и связанные с ними группы. Нами предложен универсальный способ построения лупы Бола, найдены критерии ее простоты и конечности.

Библиография: 5 названий.

1. Напомним, что лупа S называется *лупой Бола*, если

$$((xy)z)y = x((yz)y) \quad (1)$$

для всех $x, y, z \in S$. Лупа Бола называется *лупой Муфанг*, если она удовлетворяет тождеству

$$y(z(yx)) = (y(zy))x. \quad (2)$$

Тождества Бола (1) и (2) появились в связи с так называемыми условиями замыкания Бола в теории сетей. Пример $x \cdot y = x - y$ на $\mathbb{R}$ показывает, что оба тождества в квазигруппе независимы и не влекут существования единицы. Хорошо известно (см., например, [1]), что лупа Бола моноассоциативна и обратима справа, причем обратимая слева лупа Бола является лупой Муфанг.

Определим на лупе Бола S композицию $x.y = (xy^{-1})x$. Используя очевидное тождество $((xy)x)^{-1} = (x^{-1}y^{-1})x^{-1}$, легко видеть, что

$$x.x = x, \quad (3)$$

$$x.(x.y) = y, \quad (4)$$

$$x.(y.z) = (x.y).(x.z). \quad (5)$$

Бинарная система S , удовлетворяющая тождествам (3)–(5), называется *симметрическим пространством*. Симметрическое пространство с выделенной точкой $e \in S$ называется *пунктированным симметрическим пространством*, а точка e – *базисной точкой* пространства S . Изоморфизмы и автоморфизмы симметрических пространств определяются обычным способом. В случае пунктированных пространств дополнительно требуется, чтобы гомоморфизм переводил базисную точку в базисную. По индукции можно определить степени элемента x (относительно базисной точки e):

$$x^0 = e, \quad x^1 = x, \quad x^{n+2} = x.(e.x^n), \quad x^{-n} = e.x^n.$$

При этом отображение $x \rightarrow x^{-1}$ будет автоморфизмом симметрического пространства.

Настоящая статья организована следующим образом. В п. 2 мы рассматриваем типичную ситуацию абстрактной теории симметрических пространств: группу G , снабженную инволютивным автоморфизмом, и структуру симметрического пространства на G , определенную этой парой. С этим симметрическим пространством естественно связывается некоторое симметрическое пространство S и находятся достаточные условия, при которых естественная бинарная композиция превращает S в лупу Бола (или лупу Муфанг). В п. 3 среди тех групп, которые с помощью этой конструкции приводят к заданной лупе Бола, строится универсальная, из которой все прочие получаются как гомоморфный образ. Это позволяет дать критерий простоты лупы Бола S . В последнем пункте доказывается, что конечность S влечет финитную аппроксимируемость построенной универсальной группы.

2. Пусть G – группа, допускающая инволютивный автоморфизм σ , I_σ – множество неподвижных точек σ , и пусть $G_\sigma = \{x^{-1}x^\sigma \mid x \in G\}$. Хорошо известно (см. [2]), что множество G/I_σ правых смежных классов группы G по подгруппе I_σ является симметрическим пространством относительно произведения

$$I_\sigma x \cdot I_\sigma y = I_\sigma y^\sigma (x^\sigma)^{-1} x,$$

а множество G_σ – симметрическим пространством относительно произведения

$$x \cdot y = xy^{-1}x. \quad (6)$$

При этом отображение $\psi: G/I_\sigma \rightarrow G_\sigma$, определенное равенством $\psi(I_\sigma x) = x^{-1}x^\sigma$, задает изоморфизм $G/I_\sigma \simeq G_\sigma$ симметрических пространств.

Пусть N – подгруппа в G , порожденная множеством G_σ . Предположим, что существует гомоморфизм $\varphi: N \rightarrow G$ группы N в группу G такой, что

- 1) $G = \langle x, x^\sigma \mid x \in \varphi(G_\sigma) \rangle$;
- 2) $\varphi(\varphi(x)^{-1}\varphi(x)^\sigma) = \varphi(x)$ для всех $x \in G_\sigma$;
- 3) каждый смежный класс группы $\varphi(N)$ по $I = I_\sigma \cap \varphi(N)$ содержит элементы из $\varphi(G_\sigma)$.

(Здесь и всюду ниже запись $G = \langle M \rangle$ означает, что группа G порождается множеством M .) В этом случае группу G будем называть группой с (σ, φ) -свойством или (σ, φ) -группой. Кроме того, всюду ниже символами N и I будем обозначать соответствующие подгруппы (σ, φ) -группы G , а символами H^σ и H^φ – образы $\sigma(H)$ и $\varphi(H)$ подгруппы H в G .

Обозначим символом G^+ группу G , рассматриваемую как пунктированное симметрическое пространство с произведением (6) и базисной точкой 1. Очевидно, что ограничение гомоморфизма φ с N на G_σ индуцирует гомоморфизм $G_\sigma \rightarrow G^+$ пунктированных симметрических пространств. Выберем абстрактное симметричное пространство S изоморфное $\varphi(G_\sigma)$, и пусть $P: S \rightarrow \varphi(G_\sigma)$ – соответствующий изоморфизм. Легко видеть, что для каждого смежного класса Ig , где $g \in N^\varphi$, существует в точности один элемент $x \in S$ такой, что

$$Ig \cap \varphi(G_\sigma) = P_x.$$

(Здесь и всюду ниже для сокращения записи мы используем символ P_x вместо $P(x)$.) Действительно, если $IP_x = IP_y$, то $P_x^{-1}P_x^\sigma = P_y^{-1}P_y^\sigma$, и поэтому

$$P_x = \varphi(P_x^{-1}P_x^\sigma) = \varphi(P_y^{-1}P_y^\sigma) = P_y.$$

Следовательно, мы можем определить подстановочное представление группы N^φ на S , полагая $xg = z$, если $IP_xg = IP_z$ для $g \in N^\varphi$.

ТЕОРЕМА 1. *Если группа G обладает (σ, φ) -свойством, то бинарная композиция $xy = xP_y$ превращает S в лупу Бола (в лупу Муфанг, если φ – изоморфизм).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем в пространстве S базисную точку e . Поскольку гомоморфизм пунктированных пространств переводит базисную точку в базисную, справедливы равенства $P_e = 1$ и $P_{x^{-1}} = P_x^{-1}$. Поэтому

$$ex = x = xe \quad \text{и} \quad (yx)x^{-1} = y.$$

Далее, $P_{x \cdot y^{-1}} = P_x P_y P_x$. Поэтому

$$x \cdot y^{-1} = (xy)x$$

и, следовательно,

$$z((xy)x) = ((zx)y)x.$$

Тем самым доказано, что S – правая лупа Бола с единицей. Покажем, что в лупе S уравнение $ax = b$ имеет единственное решение. Действительно, если решение существует, то оно единственно, поскольку

$$a^{-1}((ax)a) = xa \quad \text{и} \quad x = (a^{-1}(ba))a^{-1}.$$

С другой стороны,

$$a((a^{-1}(ba))a^{-1}) = (ba)a^{-1} = b.$$

Поэтому решение уравнения $ax = b$ существует. Следовательно, S – лупа Бола.

Пусть $\varphi: N \rightarrow G$ – изоморфизм группы N в группу G . Тогда отображение $L: S \rightarrow G^+$, определенное равенством $L_x = P_x^{-1}P_x^\sigma$, будет изоморфизмом пунктированных симметрических пространств. Поэтому $L_{x^{-1}} = L_x^{-1}$ и

$$(P_x L_y)^{-1} (P_x L_y)^\sigma = L_{(y^{-1}x)y^{-1}} = P_{(y^{-1}x)y^{-1}}^{-1} P_{(y^{-1}x)y^{-1}}^\sigma.$$

Следовательно,

$$IP_x L_y = IP_{(y^{-1}x)y^{-1}}.$$

Тем самым определено представление $x \rightarrow xL_y = (y^{-1}x)y^{-1}$ группы N на S . С другой стороны,

$$P_{x^{-1}}^\sigma P_x = L_x^{-1} = L_{x^{-1}} = P_x P_{x^{-1}}^\sigma \quad \text{и} \quad yP_x L_x = yL_x P_x.$$

Поэтому

$$(x^{-1}(yx))x^{-1} = ((x^{-1}y)x^{-1})x = x^{-1}y \quad \text{и} \quad x(x^{-1}y) = x((x^{-1}(yx))x^{-1}) = y.$$

Отсюда следует, что лупа Бола S является лупой с обратимостью, а значит, и лупой Муфанг. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Порождающие элементы P_x и $R_x = P_{x^{-1}}^\sigma$ (σ, φ) -группы G удовлетворяют следующим тождествам:

$$P_e = R_e = 1, \quad (7)$$

$$P_{x^{-1}} = P_x^{-1}, \quad R_{x^{-1}} = R_x^{-1}, \quad (8)$$

$$P_{(xy)x} = P_x P_y P_x, \quad R_{(xy)x} = R_x R_y R_x, \quad (9)$$

$$P_{xy} P_y^{-1} P_x^{-1} = R_{xy}^{-1} R_y R_x. \quad (10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенства (7)–(9) непосредственно следуют из теоремы 1. Для доказательства равенств (10) достаточно заметить, что

$$(P_x P_y)^{-1} (P_x P_y)^\sigma = P_{xy}^{-1} P_{xy}^\sigma.$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Если G – группа с (σ, φ) -свойством, то подгруппа I в N^φ порождается элементами $P_{x,y} = P_x P_y P_{xy}^{-1}$, где $x, y \in S$. В частности, $I = \{g \in N^\varphi \mid eg = e\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $H = \langle P_{x,y} \mid x, y \in S \rangle$ и $K = \{g \in N^\varphi \mid eg = e\}$, где e – единица лупы S . Очевидно, что $H \subseteq I \subseteq K$. Покажем, что $K \subseteq H$. Действительно, $N^\varphi = \langle P_x \mid x \in S \rangle$. Поэтому всякий элемент из K можно представить в виде слова $W = P_{x_1} P_{x_2} \dots P_{x_n}$. Если $n = 1$, то $W = P_e \in H$. Если $n > 1$, то $W = P_{x_1, x_2} P_{x_1 x_2} \dots P_{x_n}$, и утверждение доказывается очевидной индукцией по длине слова W .

Лупу Бола $S = S(G)$ и связанную с ней (σ, φ) -группу G будем называть *ассоциированными*. Если H – подгруппа группы G , то пусть

$$H_G = \bigcap_{g \in G} H^g.$$

Очевидно, что H_G – наибольшая нормальная подгруппа группы G , лежащая в H . Подгруппу H будем называть φ -допустимой, если

$$(N \cap H)^\varphi \subseteq N^\varphi \cap H.$$

Если группа G не содержит собственных σ -инвариантных φ -допустимых нормальных подгрупп, то будем ее называть (σ, φ) -простой.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть H – σ -инвариантная нормальная подгруппа (σ, φ) -группы G . Факторгруппа G/H обладает (σ, φ) -свойством тогда и только тогда, когда H является φ -допустимой подгруппой в G . Ассоциированная с группой G/H лупа $S_1 = S_1(G/H)$ является гомоморфным образом $S = S(G)$, при этом $S \simeq S_1$ тогда и только тогда, когда $N^\varphi \cap H \subseteq I_{N^\varphi}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $K = N \cap H$ и $M = N^\varphi \cap H$, и пусть $K^\varphi \subseteq M$. Замечая, что $N/K \simeq N^\varphi/K^\varphi$, видим, что гомоморфизм $G \rightarrow G/H$ индуцирует естественный гомоморфизм $\varphi': N/K \rightarrow N^\varphi/M$ с ядром M/K^φ . Очевидно, что тогда группа G/H будет (σ, φ') -группой. Обратно, существование гомоморфизма φ' требует, чтобы его ядро $\text{Ker}(\varphi) = M/K^\varphi$. Отсюда следует, что $K^\varphi \subseteq M$. Для построения гомоморфизма $S \rightarrow S_1$ можно использовать отображение $P_x \rightarrow P_x M$. В этом случае очевидно, что $S \simeq S_1$ тогда и только тогда, когда элементы M действуют тривиально на S , или, эквивалентно, на смежных классах по I . Утверждение доказано.

3. Пусть S – лупа Бола. Обозначим через $\tilde{G}(S)$ группу, заданную порождающими P_x и R_x , где $x \in S$, и определяющими соотношениями (7)–(10). Очевидно, что $\tilde{G}(S)$ допускает инволютивный автоморфизм σ , определяемый отображениями $P_x \rightarrow R_x^{-1}$ и $R_x \rightarrow P_x^{-1}$. Группу $\tilde{G}(S)$ можно представить в виде свободного произведения

$$\tilde{G}(S) = (A * B; A_1 = B_1, \psi)$$

групп

$$A = \langle P_x \mid x \in S \rangle \quad \text{и} \quad B = \langle R_x \mid x \in S \rangle$$

с подгруппами

$$A_1 = \langle P_x P_y P_{xy}^{-1} \mid x, y \in S \rangle \quad \text{и} \quad B_1 = \langle R_x^{-1} R_y^{-1} R_{xy} \mid x, y \in S \rangle,$$

объединенными в соответствии с изоморфизмом $\psi: A \rightarrow B$. В этом случае автоморфизм σ группы $\tilde{G}(S)$ можно определить, полагая $\sigma = \psi$ на A и $\sigma = \psi^{-1}$ на B . При этом подгруппа $\tilde{I}$, порожденная в $\tilde{G}(S)$ всеми элементами вида $P_x P_y P_{xy}^{-1}$, будет совпадать с множеством всех неподвижных точек автоморфизма σ .

ТЕОРЕМА 2. *Группа $\tilde{G}(S)$ является (σ, φ) -группой и $S(\tilde{G}(S)) = S$. Всякая другая (σ, φ) -группа G такая, что $S(G) = S$, является гомоморфным образом группы $\tilde{G}(S)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\tilde{N}$ – подгруппа в $\tilde{G} = \tilde{G}(S)$, порожденная всеми $L_x = P_x^{-1} R_x^{-1}$, где $x \in S$. Перепишем соотношение (10) в виде

$$R_y L_x R_y^{-1} = L_y^{-1} L_{xy} \quad \text{и} \quad P_y^{-1} L_x P_y = L_{xy} L_y^{-1}$$

и заметим, что $L_x^\sigma = L_x^{-1}$. Очевидно, что подгруппа $\tilde{N}$ является σ -инвариантным нормальным делителем группы $\tilde{G}$. Пусть W – произвольный элемент группы $\tilde{G}$, представленный в виде слова от порождающих P_x и R_x , где $x \in S$. Тогда

$$(W P_x)^{-1} (W P_x)^\sigma = P_x^{-1} W^{-1} W^\sigma P_x L_x, \quad (W R_x)^{-1} (W R_x)^\sigma = R_x^{-1} W^{-1} W^\sigma R_x L_x^{-1}.$$

Используя индукцию по длине слова W , доказываем, что $\tilde{N} = \langle g^{-1} g^\sigma \mid g \in \tilde{G} \rangle$. Кроме того,

$$A_1 P_x P_y W = A_1 P_{xy} W$$

для любого $W \in A$. Снова используя индукцию по длине слова доказываем, что каждый правый смежный класс группы A по подгруппе A_1 содержит элемент P_x для некоторого $x \in S$.

Теперь рассмотрим гомоморфизм группы $\tilde{G}$ на ее подгруппу A , который действует тождественно на A и переводит элемент $b \in B$ в элемент b^σ . Легко видеть, что подгруппа $\tilde{N}$ совпадает с ядром этого гомоморфизма и потому тривиально пересекается с подгруппой A . Аналогично, пересечение подгруппы $\tilde{N}$ с подгруппой B тривиально, и потому $\tilde{N}$ – свободная группа (см. [3]). С другой стороны, существует гомоморфизм группы A на группу правых умножений лупы S такой, что каждый порождающий P_x переходит в оператор правого умножения на элемент x в S . Поэтому $P_x \in A_1$, только если $x = e$, и, следовательно, $P_x P_y \in A_1$, только если $y = x^{-1}$. Поэтому подгруппа $\tilde{N}$ свободно порождается элементами L_x , где $x \in S$ и $x \neq e$. Таким образом, существует гомоморфизм φ группы $\tilde{N}$ на A такой, что $\varphi(L_x) = P_x$ для всех $x \in S$. Отсюда следует, что $\tilde{G}$ является (σ, φ) -группой. Из теоремы 1 следует тогда, что $S(\tilde{G}(S)) = S$.

Далее, пусть G – другая (σ, φ) -группа такая, что $S(G) = S$. Тогда в силу следствия 1 к теореме 1 группа G обладает системой порождающих P_x и R_x , $x \in S$, удовлетворяющих соотношениям (7)–(10), и потому является гомоморфным образом группы $\tilde{G}$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Для любой лупы Бола S существует единственная, с точностью до изоморфизма, ассоциированная с ней группа $G_0 = G_0(S)$ такая, что всякая другая группа G , ассоциированная с S , имеет G_0 своим гомоморфным образом. При этом $(I_0)_{N_0^\varphi} = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть H_1 и H_2 – две максимальные нормальные (σ, φ) -подгруппы в $\tilde{G} = \tilde{G}(S)$ такие, что $\tilde{N}^\varphi \cap H_i \subseteq \tilde{I}_{\tilde{N}^\varphi}$. Очевидно, что пересечение

$$\tilde{N} \cap (H_1 H_2) = (\tilde{N} \cap H_1)(\tilde{N} \cap H_2).$$

Следовательно, σ -инвариантная нормальная подгруппа $H = H_1 H_2$ также является φ -допустимой, и поэтому $H_1 = H_2 = H$. Пусть $G_0 = \tilde{G}/H$. Если G – любая другая группа, ассоциированная с S , то $G = \tilde{G}/K$ для некоторой нормальной (σ, φ) -подгруппы K в $\tilde{G}$. С другой стороны, следствие 3 к теореме 1 утверждает, что пересечение $\tilde{N}^\varphi \cap K \subseteq \tilde{I}_{\tilde{N}^\varphi}$. Поэтому $K \subseteq H$ и $G_0 \simeq G/(H/K)$.

Далее, группа $\tilde{G} = \langle x, x^\sigma \mid x \in \tilde{N}^\varphi \rangle$ и пересечение $\tilde{I}^x \cap \tilde{I} = \tilde{I}^{x^\sigma} \cap \tilde{I}$. Поэтому подгруппа $(\tilde{I})_{\tilde{N}^\varphi}$ является нормальной (σ, φ) -подгруппой в $\tilde{G}$. Отсюда следует, что $(I_0)_{N_0^\varphi} = 1$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Лупа Бола S является простой тогда и только тогда, когда ассоциированная с ней группа $G_0(S)$ является (σ, φ) -простой и хопфовой. При этом подгруппа N_0^φ в $G_0(S)$ является простой группой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По следствию 1 к теореме 2 подгруппа $(I_0)_{N_0^\varphi} = 1$. Поэтому если H – собственная нормальная (σ, φ) -подгруппа группы G_0 , то $G_0(S)/H$ – группа с (σ, φ) -свойством, ассоциированная лупа которой является собственным гомоморфным образом лупы S . Обратно, если S_1 – собственная нормальная подлупа лупы S , то гомоморфизм $\tilde{G}(S) \rightarrow \tilde{G}(S/S_1)$ индуцирует гомоморфизм $G_0(S) \rightarrow G_0(S/S_1)$ с σ -инвариантным и φ -допустимым ядром; так что группа G_0 не (σ, φ) -проста.

Далее, пусть K – нормальный делитель группы N_0^φ и $\tilde{K}$ – его прообраз в $\tilde{N}^\varphi$. Очевидно, что гомоморфизм $\tilde{N}^\varphi \rightarrow \tilde{N}^\varphi/\tilde{K}$ индуцирует гомоморфизм $S \rightarrow S/S_1$ с ядром $S_1 = e\tilde{K}$, где e – единица лупы S . Если S – простая лупа, то $eg = e$ для всех $g \in \tilde{K}$. Поэтому следствие 2 к теореме 1 требует, чтобы $\tilde{K} \subseteq \tilde{I}$. Используя такие же рассуждения,

что и в следствии 1 к теореме 2, показываем, что $\tilde{K}$ – нормальный φ -допустимый делитель группы $\tilde{G}(S)$. Следовательно, $\tilde{K}\tilde{K}^\sigma$ – нормальная (σ, φ) -подгруппа группы $\tilde{G}(S)$. Отсюда следует, что $K = 1$.

СЛЕДСТВИЕ 3. Если S – простая луна Бола и H – собственная нормальная подгруппа группы $G_0 = G_0(S)$, то $H = N_0$ или $H \times H^\sigma = G_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть H – собственная нормальная σ -инвариантная подгруппа группы G_0 . Тогда пересечение $H \cap N_0 \neq 1$. Иначе H будет φ -допустимой подгруппой G_0 , что невозможно в силу следствия 2 к теореме 2. Пусть $K = H \cap N_0$. Тогда K – собственная нормальная σ -инвариантная подгруппа группы G_0 . Если $K \subseteq \text{Ker}(\varphi)$, то K является φ -допустимой подгруппой в G_0 , что невозможно. Если $N_0 \neq K \not\subseteq \text{Ker}(\varphi)$, то K^φ – собственная нормальная подгруппа в N_0^φ , что невозможно в силу простоты N_0^φ . Следовательно, $K = N_0$ и поэтому $N_0 \subseteq H$. С другой стороны,

$$N_0/H \simeq (G_0/N_0)/(H/N_0) = N_0^\varphi/(H/N_0).$$

Отсюда следует, что $H = N_0$.

Теперь пусть H – собственная нормальная подгруппа G_0 , и пусть $H \neq N_0$. Тогда очевидно, что $H \cap H^\sigma \neq N_0$ и $HH^\sigma \neq N_0$. Поэтому $H \cap H^\sigma = 1$ и $HH^\sigma = G_0$. Иначе, $G_0 = H \times H^\sigma$.

СЛЕДСТВИЕ 4. Если S – простая луна Бола и H – нормальная подгруппа группы $G_0 = G_0(S)$, то справедливо одно из следующих утверждений:

- G_0 – простая группа и S – луна Муфанг;
- $H = N_0$ и $G_0 = N_0 \rtimes N_0^\varphi$ – полупрямое произведение подгрупп N_0 и N_0^φ ;
- $H \neq N_0$, группа $G_0 = H \times H^\sigma$ и S – луна Муфанг.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если G_0 – простая группа, то $N_0 = G_0$ и, следовательно, подгруппа $\text{Ker}(\varphi)$ в N_0 будет нормальной подгруппой группы G_0 . Очевидно, что $\text{Ker}(\varphi) \neq G_0$. Поэтому $\text{Ker}(\varphi) = 1$. Используя теорему 1, доказываем, что S – луна Муфанг.

Пусть H – σ -инвариантная собственная нормальная подгруппа группы G_0 . Тогда, как и в предыдущем следствии, $H = N_0$. С одной стороны, очевидно, что группа G_0 порождается подгруппами N_0 и N_0^φ . С другой стороны, следствие 2 к теореме 2 утверждает, что N_0^φ – простая группа и, следовательно, пересечение $N_0 \cap N_0^\varphi = 1$. Поэтому группа G_0 является полупрямым произведением подгрупп N_0 и N_0^φ .

Пусть H – собственная нормальная подгруппа группы G_0 и пусть $H \neq N_0$. Тогда, как и в предыдущем следствии, группа $G_0 = H \times H^\sigma$. Пусть $H \cap N_0 = M \neq 1$. Очевидно, что M – собственная нормальная подгруппа группы G_0 . С другой стороны, пересечение $M \cap M^\sigma = 1$, и потому $M \neq N_0$. Но тогда $M \times M^\sigma = G_0$ и, следовательно, $M = H$. Таким образом, $N_0 = G_0$. Отсюда следует, что подгруппа $\text{Ker}(\varphi)$ в N_0 будет нормальной подгруппой группы G_0 . Пусть $\tilde{K}$ – ее прообраз в $\tilde{G} = \tilde{G}(S)$. Выше (см. доказательство теоремы 2) показано, что факторгруппа $\tilde{N}/\tilde{K} \simeq \tilde{G}/\tilde{N}$. Поскольку группы $\tilde{G}$ и $\tilde{N}$ являются σ -инвариантными, то σ -инвариантными будут группа $\tilde{K}$ и, следовательно, ее образ в группе G_0 . Таким образом, $\text{Ker}(\varphi) = 1$. Но тогда $N_0^\varphi = H \times H^\sigma$, что невозможно в силу простоты группы N_0^φ . Поэтому $H \cap N_0 = 1$ и, следовательно, $H \times N_0$ – нормальная подгруппа группы G_0 . Очевидно, что $H \times N_0$ не может быть собственной нормальной подгруппой группы G_0 . Поэтому $H \times N_0 = G_0$ и, следовательно, $H \simeq N_0$ и $G_0/N_0 \simeq N_0$. С другой стороны, $G_0 = N_0 \rtimes N_0^\varphi$ и, следовательно, $G_0/N_0 \simeq N_0^\varphi$. Таким образом, $N_0^\varphi \simeq N_0$, ядро $\text{Ker}(\varphi) = 1$ и S – луна Муфанг.

4. Напомним (см. [4]), что группа G называется *финитно аппроксимируемой*, если пересечение всех ее нормальных подгрупп конечного индекса есть единичная группа. Группа G финитно аппроксимируема тогда и только тогда, когда для каждого ее элемента $g \neq 1$ существует гомоморфизм G в конечную группу, при котором g не отображается в единицу. Известно (см. [3], [5]), в частности, что всякое свободное произведение двух конечных групп с объединенной подгруппой является финитно аппроксимируемой группой.

ТЕОРЕМА 3. *Если S – конечная лупа Бола порядка n , то $\tilde{G}(S)$ – финитно аппроксимируемая группа, а $\tilde{N}^\varphi$ – конечная группа порядка $< \frac{1}{2}en!$, где e – основание натурального логарифма.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\Sigma = \langle \sigma \rangle$ и $\Sigma' = \langle \sigma' \rangle$, где σ' – инволютивный автоморфизм группы $\tilde{N}^\varphi$, индуцируемый автоморфизмом $x \rightarrow x^{-1}$ симметрического пространства S . Тогда гомоморфизм $\tilde{N} \rightarrow \tilde{N}^\varphi$ индуцирует гомоморфизм $\varphi': \tilde{N}\Sigma \rightarrow \tilde{N}^\varphi\Sigma'$ соответствующих полупрямых произведений. Очевидно, что такой гомоморфизм переводит порождающие $L_x\sigma$ группы $\tilde{N}\Sigma$ в порождающие $P_x\sigma'$ группы $\tilde{N}^\varphi\Sigma'$. Пусть $v \in \tilde{N}^\varphi\Sigma'$ и пусть $(L_x\sigma)^u$ – произвольный прообраз элемента $(P_x\sigma')^v$ в $\tilde{N}\Sigma$. Очевидно, что

$$\varphi': (L_x\sigma)^{L_y} \rightarrow P_{(y^{-1}x)y^{-1}}\sigma'.$$

Поэтому существует такое $z \in S$, что $\varphi': (L_x\sigma)^v \rightarrow P_z\sigma'$. Следовательно, группа $\tilde{N}^\varphi\Sigma'$ порождается конечным множеством элементов, каждый из которых в силу тождеств (6)–(8) конечного порядка и имеет конечное число сопряженных.

Пусть $|S| = n$. Тогда $P_{x_1}\sigma', \dots, P_{x_n}\sigma'$ – множество порождающих группы $\tilde{N}^\varphi\Sigma'$ и сопряженных к ним. Покажем, что всякий элемент из $\tilde{N}^\varphi\Sigma'$ может быть записан в виде слова $W(P_{x_1}\sigma', \dots, P_{x_n}\sigma')$ длины $\leq n$. Действительно, $(P_{x_i}\sigma')^2 = 1$. Поэтому

$$W = (\dots P_{x_i}\sigma' W_1 P_{x_i}\sigma' \dots) = (\dots (P_{x_i}\sigma')^{-1} W_1 P_{x_i}\sigma' \dots).$$

Так как, сопрягая $P_{x_i}\sigma'$ посредством $P_{x_i}\sigma'$, мы снова получим один из $P_{x_1}\sigma', \dots, P_{x_n}\sigma'$, длину слова W можно уменьшить. Через конечное число шагов мы получим представление W в виде слова длины $\leq n$. Поскольку $\tilde{N}^\varphi$ – подгруппа индекса 2 в $\tilde{N}^\varphi\Sigma'$, порядок

$$|\tilde{N}^\varphi| \leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{n!}{(n-k)!} < \frac{1}{2}en!.$$

Поскольку всякое свободное произведение двух конечных групп с объединенной подгруппой является финитно аппроксимируемой группой, утверждение доказано.

СЛЕДСТВИЕ. *Простая лупа Бола S является конечной тогда и только тогда, когда конечной является группа $G_0(S)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Часть “только тогда” следует из теоремы 1 и определения группы $G_0(S)$. Докажем часть “тогда” нашего утверждения. Пусть S – конечная лупа Бола и пусть

$$\tilde{G}(S) = (A * B; A_1 = B_1, \psi)$$

– определенное выше свободное произведение групп с объединенной подгруппой. Положим $A_2 = (A_1)_A$ и $B_2 = (B_1)_B$. Естественные отображения групп A и B на фактор-группы A/A_2 и B/B_2 продолжаемы до гомоморфизма группы $\tilde{G}(S)$ на группу

$$G = (A/A_2 * B/B_2; A_1/A_2 = B_1/B_2, \psi').$$

Очевидно, что группа G ассоциирована с лупой S и обладает (σ, φ) -свойством. Из теоремы 3 следует, что группы A и B , а значит, и их факторгруппы, конечны. Поэтому группа G является финитно аппроксимируемой. Выберем элемент $g' \in N \setminus \text{Ker}(\varphi)$. Тогда существует нормальная подгруппа K конечного индекса группы G такая, что $g' \notin K$. Пусть $M = (K \cap N)(K \cap N)^\sigma$. В силу следствия 1 к теореме 2 факторгруппа A/A_2 изоморфна подгруппе N_0^φ группы $G_0(S)$. В силу следствия 2 к теореме 2 A/A_2 – простая группа. Следовательно, $M \subseteq \text{Ker}(\varphi)$ и M – нормальный (σ, φ) -допустимый делитель группы G . С другой стороны, M – подгруппа конечного индекса в N , а N – подгруппа конечного индекса в G . Следовательно, M – подгруппа конечного индекса в G и G/M – конечная группа, обладающая (σ, φ) -свойством. Но тогда и группа $G_0(S)$, являющаяся в силу следствия 1 к теореме 2 гомоморфным образом G/M , также будет конечной группой.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Белоусов В. Д. Основы теории квазигрупп и луп. М.: Наука, 1967.
- [2] Лоос О. Симметрические пространства. М.: Наука, 1985.
- [3] Neumann B. H. An essay of free products of groups with amalgamations // Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A. 1954. V. 246. P. 503–554.
- [4] Магнус В., Каррас А., Солитер Д. Комбинаторная теория групп. М.: Наука, 1974.
- [5] Baumslag G. On the residual finiteness of generalized free products of nilpotent groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. V. 106. P. 193–209.

Ивановский государственный университет
E-mail: loginov@ivanovo.ac.ru

Поступило
14.01.2002
Исправленный вариант
12.05.2003