Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. В. Шамин, Пространства начальных данных для параболических функционально-дифференциальных уравнений, *Матем. заметки*, 2002, том 71, выпуск 4, 636–640

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm650>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 10:29:28

ПРОСТРАНСТВА НАЧАЛЬНЫХ ДАННЫХ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Р. В. Шамин

Пространство начальных данных для параболических дифференциально-разностных уравнений получается при интерполяции области определения соответствующего эллиптического оператора. Область определения эллиптических функционально-дифференциальных операторов может содержать негладкие функции [1]. Этим затруднено исследование пространств начальных данных для параболических функционально-дифференциальных уравнений, см. [2].

В настоящей работе изучаются пространства начальных данных для абстрактных параболических уравнений. Полученные результаты применяются к параболическим функционально-дифференциальным уравнениям. Параболические функционально-дифференциальные уравнения возникают в задачах нелинейной оптики [3]–[5]. Эти уравнения изучались в [2], [6].

Пусть V и H – сепарабельные гильбертовы пространства и V плотно и непрерывно вложено в H . Отождествим пространство H с его сопряженным, тогда мы получаем $V \subset H \subset V'$, где каждое пространство плотно в последующем. Рассмотрим непрерывный оператор $A: V \rightarrow V'$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Оператор A называется V -коэрцитивным, если для любого $v \in V$ существует $c_1 > 0$, не зависящая от v , такая, что $\operatorname{Re}\langle Av, v \rangle \geq c_1 \|v\|_V^2$.

В дальнейшем будем предполагать, что оператор A является V -коэрцитивным.

Введем замкнутый неограниченный оператор $\mathcal{A}: \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset H \rightarrow H$, где $\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \{u \in V : Au \in H\}$. Оператор $\mathcal{A}$ есть сужение оператора A на $\mathcal{D}(\mathcal{A})$. Рассмотрим гильбертово пространство $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ со скалярным произведением $(u, v)_{\mathcal{D}(\mathcal{A})} = (\mathcal{A}u, \mathcal{A}v)_H + (u, v)_H$. Введем также неограниченный оператор $\mathcal{A}': \mathcal{D}(\mathcal{A}') \subset H \rightarrow H$ по формуле $\mathcal{A}'u = \mathcal{A}^*u$, где $u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}') = \{u \in V : A^*u \in H\}$. Гильбертово пространство $\mathcal{D}(\mathcal{A}')$ введем аналогично пространству $\mathcal{D}(\mathcal{A})$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 01-01-01030, и фонда INTAS, грант № 97-30551.

Введем гильбертово пространство

$$\mathcal{W}(\mathcal{A}) = \{w \in L_2(0, T; \mathcal{D}(\mathcal{A})) : w' \in L_2(0, T; H)\}$$

со скалярным произведением

$$(u, v)_{\mathcal{W}(\mathcal{A})} = \int_0^T (u', v')_H dt + \int_0^T (\mathcal{A}u, \mathcal{A}v)_H dt + \int_0^T (u, v)_H dt,$$

где производные по t понимаются в смысле распределений.

Для произвольного гильбертова пространства X , плотного в H и непрерывно в него вложенного, введем интерполяционные пространства

$$[H, X]_\theta = \left\{ u \in H : \|u\|_{[H, X]_\theta} = \left(\int_0^\infty t^{-(2\theta+1)} K^2(t, u) dt \right)^{1/2} < \infty \right\}, \quad 0 < \theta < 1,$$

$$K(t, u) = \inf_{u=u_0+u_1, u_0 \in H, u_1 \in X} (\|u_0\|_H + t\|u_1\|_X).$$

Рассмотрим дифференциальное уравнение в пространстве H

$$u'(t) + \mathcal{A}u(t) = f(t), \quad t \in (0, T), \quad (1)$$

с начальным условием

$$u|_{t=0} = \varphi, \quad (2)$$

где $0 < T < \infty$, $f \in L_2(0, T; H)$ и $\varphi \in H$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Функция $u \in \mathcal{W}(\mathcal{A})$ называется *сильным решением задачи* (1), (2), если она удовлетворяет (1), (2).

Если оператор A является V -коэрцитивным, то в силу [7, гл. 9, теорема 1.24] оператор $-\mathcal{A}$ является генератором сжимающей полугруппы, допускающей аналитическое продолжение.

ЛЕММА 1. Пусть оператор A есть V -коэрцитивный оператор, тогда задача (1), (2) имеет единственное сильное решение тогда и только тогда, когда $\varphi \in [\mathcal{D}(\mathcal{A}), H]_{1/2}$. Более того, это решение представляется формулой

$$u(t) = T_t \varphi + \int_0^t T_{t-s} f(s) ds,$$

где $\{T_t\}_{t \geq 0}$ – аналитическая полугруппа, порожденная оператором $-\mathcal{A}$.

Доказательство леммы опирается на следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1 [8, гл. 1, теорема 3.7]. Пусть оператор A является V -коэрцитивным. Пусть имеют место плотные и непрерывные вложения $V \subset [\mathcal{D}(\mathcal{A}); H]_{1/2}$ и $V \subset [\mathcal{D}(\mathcal{A}'); H]_{1/2}$. Тогда $V = [\mathcal{D}(\mathcal{A}); H]_{1/2}$.

Применим теорему 1 к функционально-дифференциальным уравнениям параболического типа.

Пусть $Q \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с липшицевой границей. В качестве пространства H возьмем пространство $L_2(Q)$, за V примем пространство $\dot{W}_2^1(Q)$, соответственно $V' = W_2^{-1}(Q)$. Рассмотрим ограниченный оператор $A_B : \dot{W}_2^1(Q) \rightarrow W_2^{-1}(Q)$, действующий по формуле $A_B u = -\operatorname{div}(B \operatorname{grad} u)$, где $B : L_2^n(Q) \rightarrow L_2^n(Q)$ – ограниченный оператор. Введем обозначения

$$\dot{W}_2^{1,n}(Q) = \prod_{k=1}^n \dot{W}_2^1(Q), \quad W_2^{1,n}(Q) = \prod_{k=1}^n W_2^1(Q).$$

УСЛОВИЕ 1. Оператор B ограниченно отображает пространство $\dot{W}_2^{1,n}(Q)$ в пространство $W_2^{1,n}(Q)$.

УСЛОВИЕ 2. Оператор A_B является $\dot{W}_2^1(Q)$ -коэрцитивным.

Введем неограниченный оператор $\mathcal{A}_{\mathcal{B}}: \mathcal{D}(\mathcal{A}_{\mathcal{B}}) \subset L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$, действующий по формуле

$$\mathcal{A}_{\mathcal{B}}u = A_B u, \quad u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_{\mathcal{B}}) = \{u \in \dot{W}_2^1(Q) : A_B u \in L_2(Q)\}.$$

ЛЕММА 2. Пусть оператор B удовлетворяет условиям 1 и 2, а оператор B^* удовлетворяет условию 1. Тогда

$$[\mathcal{D}(\mathcal{A}_{\mathcal{B}}); L_2(Q)]_{1/2} = \dot{W}_2^1(Q)$$

с точностью до эквивалентности норм.

Пусть теперь $Q \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с границей $\partial Q \in C^\infty$ или представляется в виде $Q = (0, d) \times D$, где $D \subset \mathbb{R}^{n-1}$ ($\partial D \in C^\infty$, если $n \geq 3$). Введем ограниченные разностные операторы $R_{ij}: L_2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^n)$ и $R_{ijQ}: L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$ по формулам

$$R_{ij}u(x) = \sum_{h \in M} a_{ijh}(x)u(x+h), \quad R_{ijQ}v = P_Q R_{ij} I_Q v,$$

где $M \subset \mathbb{R}^n$ – конечное множество векторов с целочисленными координатами; $a_{ijh} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ – комплекснозначные функции; I_Q – оператор продолжения функций из $L_2(Q)$ нулем в $\mathbb{R}^n \setminus Q$; P_Q – оператор сужения функций из $L_2(\mathbb{R}^n)$ на Q .

В качестве оператора B возьмем оператор $R: L_2^n(Q) \rightarrow L_2^n(Q)$, введенный по формуле

$$(Ru)_i = \sum_{j=1}^n R_{ijQ}(u)_j, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Будем рассматривать дифференциально-разностный оператор A_R . Соответственно введем неограниченный оператор $\mathcal{A}_{\mathcal{R}}: \mathcal{D}(\mathcal{A}_{\mathcal{R}}) \subset L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$, действующий в пространстве распределений $D'(Q)$ по формуле $\mathcal{A}_{\mathcal{R}}u = A_R u$, где $u \in D(\mathcal{A}_{\mathcal{R}}) = \{u \in \dot{W}_2^1(Q) : \mathcal{A}_{\mathcal{R}}u \in L_2(Q)\}$.

Следуя [1], введем некоторые вспомогательные обозначения. Обозначим через G аддитивную группу, порожденную множеством M , а через Q_r – открытые связные компоненты множества $Q \setminus (\bigcup_{h \in G} (\partial Q + h))$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Множества Q_r мы будем называть *подобластями*, а совокупность $\mathcal{R}$ всевозможных подобластей – *разбиением*.

Разбиение $\mathcal{R}$ распадается на непересекающиеся классы: подобласти $Q_{r_1}, Q_{r_2} \in \mathcal{R}$ принадлежат одному классу, если существует $h \in G$ такое, что $Q_{r_1} = Q_{r_2} + h$. Обозначим подобласти Q_r через Q_{sl} , где s – номер класса ($s = 1, 2, \dots$), а l – порядковый номер подобласти в s -ом классе. В силу ограниченности Q каждый класс состоит из конечного числа $N = N(s)$ подобластей Q_{sl} .

Введем множество

$$\mathcal{K} = \bigcup_{h_1, h_2 \in G} \{\overline{Q} \cap (\partial Q + h_1) \cap \overline{[(\partial Q + h_2) \setminus (\partial Q + h_1)]}\}.$$

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что $\mu_{n-1}(\mathcal{K} \cap \partial Q) = 0$, где $\mu_{n-1}(\cdot)$ – $(n-1)$ -мерная мера Лебега. Будем предполагать также, что для каждой подобласти Q_{sl} и каждого $\varepsilon > 0$ существует открытое множество $G_{sl} \subset Q_{sl}$ такое, что $\mu_n(Q_{sl} \setminus G_{sl}) < \varepsilon$ и $\mu_{n-1}(\partial G_{sl} \Delta \partial Q_{sl}) < \varepsilon$.

Для того чтобы сформулировать условие сильной эллиптичности, введем матрицы $R_{ij}(x)$ ($x \in \overline{Q_{s1}}$) порядка $N(s) \times N(s)$ с элементами $r_{kl}^{ijs}(x) = a_{ijh}(x + h_{sk})$ ($h = h_{sl} - h_{sk} \in M$), $r_{kl}^{ijs}(x) = 0$

$(h_{sl} - h_{sk} \notin M)$, где h_{sk} определяется из условия $Q_{sk} = Q_{s1} + h_{sk}$. В силу [1, гл. 2, теорема 9.1] если оператор A_R сильно эллиптический, то для всех $s = 1, 2, \dots, x \in \overline{Q}_{s1}$ и $0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n$

$$\text{матрицы } \sum_{ij} (R_{ijs}(x) + R_{ijs}^*(x)) \xi_i \xi_j \text{ положительно определены.} \quad (3)$$

По теореме [1, гл. 2, теорема 9.3] условие (3) является также достаточным условием сильной эллиптичности оператора A_R для всюду плотного множества областей Q .

Рассмотрим параболическое дифференциально-разностное уравнение

$$u_t(x, t) - \mathcal{A} u(x, t) = f(x, t), \quad (x, t) \in \Omega_T, \quad (4)$$

с краевым условием

$$u|_{\Gamma_T} = 0, \quad (x, t) \in \Gamma_T, \quad (5)$$

и начальным условием

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in Q, \quad (6)$$

где $\Omega_T = Q \times (0, T)$, $\Gamma_T = \partial Q \times (0, T)$, $0 < T < \infty$, $f \in L_2(\Omega_T)$, $\varphi \in L_2(Q)$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнено условие $\dot{W}_2^1(Q)$ -коэрцитивности для оператора $\mathcal{A}$. Тогда задача (4)–(6) имеет единственное сильное решение тогда и только тогда, когда $\varphi \in \dot{W}_2^1(Q)$.

Заметим, что в отличие от параболических дифференциальных уравнений гладкость сильных решений параболических дифференциально-разностных уравнений может нарушаться в цилиндре Ω_T , см. [6].

Введем теперь операторы растяжения и сжатия $T_{ij}: L_2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^n)$ и $T_{ij}Q: L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$ по формулам

$$T_{ij}u(x) = \sum_{l \in N} a_{ijl}u(q^{-l}x), \quad T_{ij}Qv = P_Q T_{ij}I_Q v,$$

где $N \subset \mathbb{N}$ – конечное множество целых чисел; $a_{ijl} \in \mathbb{C}$; $q > 1$; операторы I_Q и P_Q такие же, как в определении разностных операторов.

Введем оператор $T: L_2^n(Q) \rightarrow L_2^n(Q)$ по формуле

$$(Tu)_i = \sum_{j=1}^n T_{ij}Q u_j, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad \text{где } u = (u_1, \dots, u_n)^T, \quad Tu = ((Tu)_1, \dots, (Tu)_n)^T.$$

Возьмем в качестве оператора B оператор T и рассмотрим функционально-дифференциальный оператор A_T с растяжением и сжатием аргументов.

Обозначим $t_{ij}(\lambda) = \sum_{l \in N} a_{ijl} \lambda^l$. В силу [9, теорема 1] условие

$$\sum_{i,j=1}^n t_{ij}(\lambda) \xi_i \xi_j > 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad |\lambda| = q^{n/2}, \quad 0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n, \quad (7)$$

является достаточным для $\dot{W}_2^1(Q)$ -коэрцитивности оператора $\mathcal{A}_T$. Если дополнительно предположить, что область Q удовлетворяет условию $\overline{Q} \subset qQ$, то в силу [9, теорема 2] условие (7) является и необходимым для $\dot{W}_2^1(Q)$ -коэрцитивности оператора $\mathcal{A}_T$.

Рассмотрим параболическое функционально-дифференциальное уравнение с растяжением и сжатием аргументов

$$u_t(x, t) - \mathcal{A}_T u(x, t) = f(x, t), \quad (x, t) \in \Omega_T, \quad (8)$$

с краевым условием

$$u|_{\Gamma_T} = 0, \quad (x, t) \in \Gamma_T, \quad (9)$$

и начальным условием

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in Q. \quad (10)$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть для оператора T выполнено условие (7). Тогда задача (8)–(10) с оператором $\mathcal{A}_T$ имеет единственное сильное решение тогда и только тогда, когда $\varphi \in \dot{W}_2^1(Q)$.

Автор выражает благодарность А. Л. Скубачевскому за постоянное внимание к работе и ряд ценных замечаний.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Skubachevskii A. L. Elliptic Functional Differential Equations and Applications. Basel–Boston–Berlin: Birkhäuser, 1997. 2. Скубачевский А. Л., Шамин Р. В. // Докл. РАН. 2001. Т. 379. № 5. С. 595–598. 3. Vorontsov M. A., Ricklin J. C., Carhart G. W. // Optical Engineering. 1995. V. 34. № 11. P. 3229–3238. 4. Скубачевский А. Л. // УМН. 1996. Т. 51. № 1. С. 169–170. 5. Skubachevskii A. L. // Nonlinear Analysis. 1998. V. 32. № 2. P. 261–278. 6. Скубачевский А. Л., Шамин Р. В. // Матем. заметки. 1999. Т. 66. № 1. С. 145–153. 7. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972. 8. Ashyralyev A., Sobolevskii P. E. Well-Posedness of Parabolic Difference Equations. Basel–Boston–Berlin: Birkhäuser, 1994. 9. Россковский Л. Е. // Матем. заметки. 1996. Т. 59. № 1. С. 103–113.

Московский государственный авиационный институт
(технический университет)
E-mail: bear@rfbr.ru

Поступило
14.09.2001