Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Злобин, Интегралы, представляемые в виде линейных форм от обобщенных полилогарифмов, *Матем. заметки*, 2002, том 71, выпуск 5, 782–787

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm651>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 17:43:13

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ИНТЕГРАЛЫ, ПРЕДСТАВЛЯЕМЫЕ В ВИДЕ ЛИНЕЙНЫХ ФОРМ ОТ ОБОБЩЕННЫХ ПОЛИЛОГАРИФМОВ

С. А. Злобин

В 1978 г. Р. Апери доказал иррациональность $\zeta(3)$. В 1979 г. Ф. Бейкерс [1] доказал тот же факт проще с помощью интеграла

$$\int_{[0,1]^3} \frac{x^n(1-x)^n y^n(1-y)^n z^n(1-z)^n}{(1-z(1-xy))^{n+1}} dx dy dz. \quad (1)$$

В 1990 г. в [2] О. Н. Василенко впервые рассмотрел в этой связи интегралы

$$V_{m,n} = \int_{[0,1]^m} \frac{\prod_{i=1}^m x_i^n (1-x_i)^n}{(1-x_1(1-x_2(\dots-x_{m-1}(1-x_m)\dots))^{n+1}} dx_1 dx_2 \dots dx_m. \quad (2)$$

и анонсировал некоторые тождества, выражающие рекуррентно $V_{m,0}$ через $V_{m-2k,0}$, $1 \leq k \leq m/2$, и кратные дзета-значения

$$\zeta(s_1, \dots, s_k) = \sum_{n_1 > n_2 > \dots > n_k \geq 1} \frac{1}{n_1^{s_1} n_2^{s_2} \dots n_k^{s_k}}.$$

Это позволило ему доказать, что $V_{3,0} = 2\zeta(3)$, $V_{5,0} = 2\zeta(5)$, а также установить, что $V_{2m,0}$ есть многочлен с рациональными коэффициентами от $\zeta(2)$, $\zeta(4)$, $\dots$, $\zeta(2m)$.

При $m = 3$ интеграл (2) совпадает (с точностью до линейной замены переменных интегрирования) с интегралом Бейкера (1), а при $m = 5$ Д. В. Васильев [3] доказал, что интеграл (2) представляется в виде линейной формы от 1 , $\zeta(3)$, $\zeta(5)$ с рациональными коэффициентами. Васильев также предположил, что при произвольном нечетном $m \geq 3$, интеграл представляется в виде линейной формы от 1 , $\zeta(3)$, $\zeta(5)$, $\dots$, $\zeta(m)$ с рациональными коэффициентами.

Мы будем рассматривать следующее обобщение интегралов $V_{m,n}$:

$$\begin{aligned} V(z) &= V_m \left[\begin{matrix} a_0, a_1, a_2, \dots, a_m \\ b_1, b_2, \dots, b_m \end{matrix}; z \right] \\ &= \int_{[0,1]^m} \frac{\prod_{i=1}^m x_i^{a_i-1} (1-x_i)^{b_i-a_i-1}}{(1-zx_1(1-x_2(\dots-x_{m-1}(1-x_m)\dots))^{a_0}} dx_1 dx_2 \dots dx_m, \end{aligned}$$

где a_i, b_i — комплексные числа.

В 1998 г. В. Н. Сорокин [4] опубликовал иное доказательство иррациональности $\zeta(3)$, использующее интеграл

$$\int_{[0,1]^3} \frac{x_1^n(1-x_1)^n x_2^n(1-x_2)^n x_3^n(1-x_3)^n}{(1-x_1x_2)^{n+1}(1-x_1x_2x_3)^{n+1}} dx_1 dx_2 dx_3.$$

Оказывается, последний интеграл равен интегралу Бейкера (1) (и интегралу (2) при $m = 3$); этот факт будет доказан ниже в следствии 2.

Интегралы того же типа

$$\int_{[0,1]^{2l}} \frac{\prod_{i=1}^{2l} x_i^{n-s} (1-x_i)^n}{\prod_{j=1}^l (z/(x_1 x_2 \cdots x_{2j-2}) - x_{2j-1} x_{2j})^{n+1}} dx_1 dx_2 \cdots dx_{2l}$$

использовались в [5] для оценки меры трансцендентности π^2 . В настоящей статье мы будем рассматривать следующее обобщение интегралов Сорокина:

$$S(z) = \int_{[0,1]^m} \frac{\prod_{i=1}^m x_i^{a_i-1} (1-x_i)^{b_i-a_i-1}}{\prod_{j=1}^l (1-zx_1 x_2 \cdots x_{r_j})^{c_j}} dx_1 dx_2 \cdots dx_m$$

и установим связь между интегралами $V(z)$ и $S(z)$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\operatorname{Re}(a_0) > 0$, $\operatorname{Re}(b_i) > \operatorname{Re}(a_i) > 0$ при $1 \leq i \leq 2l$, $\operatorname{Re}(b_{2j}) > \operatorname{Re}(a_{2j-2})$ при $1 \leq j \leq l$. Тогда для $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$, выполняется равенство

$$\begin{aligned} V_{2l} \left[\begin{matrix} a_0, a_1, a_2, \dots, a_{2l} \\ b_1, b_2, \dots, b_{2l} \end{matrix}; z \right] &= \frac{\Gamma(a_{2l})}{\Gamma(a_0)} \prod_{j=1}^l \frac{\Gamma(b_{2j} - a_{2j})}{\Gamma(b_{2j} - a_{2j-2})} \\ &\times \int_{[0,1]^{2l}} \frac{\prod_{i=1}^l x_{2i-1}^{a_{2i-1}-1} (1-x_{2i-1})^{b_{2i-1}-a_{2i-1}-1} x_{2i}^{a_{2i}-2-1} (1-x_{2i})^{b_{2i}-a_{2i}-2-1}}{\prod_{j=1}^l (1-zx_1 \cdots x_{2j})^{b_{2j}-a_{2j}}} \\ &\times dx_1 dx_2 \cdots dx_{2l}, \end{aligned}$$

причем оба интеграла сходятся.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сходимость интегралов очевидна.

Доказательство проведем индукцией по l . Для удобства будем считать, что интеграл по нуль-мерному пространству равен 1, т.е. при $l = 0$

$$V_0 \left[\begin{matrix} a_0 \\ \end{matrix}; z \right] = 1 = \frac{\Gamma(a_0)}{\Gamma(a_0)},$$

и база индукции проверена.

Проведем шаг индукции. Сделаем в интеграле $V(z)$ при $m = 2l$ замену $x_{2l} \rightarrow 1 - x_{2l}$ и представим его в виде

$$\begin{aligned} V_{2l} \left[\begin{matrix} a_0, a_1, a_2, \dots, a_{2l} \\ b_1, b_2, \dots, b_{2l} \end{matrix}; z \right] &= \int_{[0,1]^{2l-2}} \frac{\prod_{i=1}^{2l-2} x_i^{a_i-1} (1-x_i)^{b_i-a_i-1}}{(1-zx_1(1-x_2(\cdots - x_{2l-3}(1-x_{2l-2})\cdots))^{a_0}} \\ &\times \int_{[0,1]^2} \frac{x_{2l-1}^{a_{2l-1}-1} (1-x_{2l-1})^{b_{2l-1}-a_{2l-1}-1} x_{2l}^{b_{2l}-a_{2l}-1} (1-x_{2l})^{a_{2l}-1}}{(1-zx_1 \cdots x_{2l}/(1-zx_1(1-x_2(\cdots - x_{2l-3}(1-x_{2l-2})\cdots)))^{a_0}} dx_1 \cdots dx_{2l-1} dx_{2l}. \end{aligned}$$

При $|z| < 1$ имеем

$$\left| \frac{zx_1 \cdots x_{2l}}{1-zx_1(1-x_2(\cdots - x_{2l-3}(1-x_{2l-2})\cdots))} \right| \leq |z| \frac{x_1 \cdots x_{2l}}{1-x_1(1-x_2(\cdots - x_{2l-3}(1-x_{2l-2})\cdots))} \leq |z| < 1;$$

следовательно, справедливо представление

$$\begin{aligned} &\left(1 - \frac{zx_1 \cdots x_{2l}}{1-zx_1(1-x_2(\cdots - x_{2l-3}(1-x_{2l-2})\cdots))} \right)^{-a_0} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a_0+k)}{\Gamma(a_0) k!} \left(\frac{zx_1 \cdots x_{2l}}{1-zx_1(1-x_2(\cdots - x_{2l-3}(1-x_{2l-2})\cdots))} \right)^k. \end{aligned}$$

Подставив этот ряд в подынтегральное выражение и проинтегрировав по переменным x_{2l-1} и x_{2l} , получим

$$\begin{aligned} V_{2l} \left[\begin{matrix} a_0, a_1, a_2, \dots, a_{2l} \\ b_1, b_2, \dots, b_{2l} \end{matrix}; z \right] &= \int_{[0,1]^{2l-2}} \frac{\prod_{i=1}^{2l-2} x_i^{a_i-1} (1-x_i)^{b_i-a_i-1}}{(1-zx_1(1-x_2(\dots-x_{2l-3}(1-x_{2l-2})\dots))^{a_0}} \\ &\times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a_0+k)}{\Gamma(a_0)k!} \frac{\Gamma(a_{2l-1}+k)}{\Gamma(b_{2l-1}+k)} \frac{\Gamma(b_{2l-1}-a_{2l-1})}{\Gamma(b_{2l-1}+k)} \frac{\Gamma(b_{2l}-a_{2l}+k)}{\Gamma(b_{2l}+k)} \frac{\Gamma(a_{2l})}{\Gamma(b_{2l}+k)} \\ &\times \left(\frac{zx_1 \dots x_{2l-2}}{1-zx_1(1-x_2(\dots-x_{2l-3}(1-x_{2l-2})\dots))} \right)^k dx_1 dx_2 \dots dx_{2l-2}. \end{aligned}$$

Переставим суммирование и интегрирование (равномерная сходимость имеется). Тогда

$$\begin{aligned} V_{2l} \left[\begin{matrix} a_0, a_1, a_2, \dots, a_{2l} \\ b_1, b_2, \dots, b_{2l} \end{matrix}; z \right] &= \sum_{k=0}^{\infty} z^k \frac{\Gamma(a_0+k)}{\Gamma(a_0)k!} \frac{\Gamma(a_{2l-1}+k)}{\Gamma(b_{2l-1}+k)} \frac{\Gamma(b_{2l-1}-a_{2l-1})}{\Gamma(b_{2l-1}+k)} \\ &\times \frac{\Gamma(b_{2l}-a_{2l}+k)}{\Gamma(b_{2l}+k)} \frac{\Gamma(a_{2l})}{\Gamma(b_{2l}+k)} V_{2l-2} \left[\begin{matrix} a_0+k, a_1+k, a_2+k, \dots, a_{2l-2}+k \\ b_1+k, b_2+k, \dots, b_{2l-2}+k \end{matrix}; z \right]. \end{aligned}$$

Согласно индукционному предположению

$$\begin{aligned} V_{2l-2} \left[\begin{matrix} a_0+k, a_1+k, a_2+k, \dots, a_{2l-2}+k \\ b_1+k, b_2+k, \dots, b_{2l-2}+k \end{matrix}; z \right] &= \frac{\Gamma(a_{2l-2}+k)}{\Gamma(a_0+k)} \prod_{j=1}^{l-1} \frac{\Gamma(b_{2j}-a_{2j})}{\Gamma(b_{2j}-a_{2j-2})} \\ &\times \int_{[0,1]^{2l-2}} \frac{\prod_{i=1}^{l-1} x_{2i-1}^{a_{2i-1}+k-1} (1-x_{2i-1})^{b_{2i-1}-a_{2i-1}-1} x_{2i}^{a_{2i}-2+k-1} (1-x_{2i})^{b_{2i}-a_{2i-2}-1}}{\prod_{j=1}^{l-1} (1-zx_1 \dots x_{2j})^{b_{2j}-a_{2j}}} \\ &\times dx_1 dx_2 \dots dx_{2l-2}. \end{aligned}$$

Воспользуемся этим представлением и вновь поменяем местами суммирование и интегрирование:

$$\begin{aligned} V_{2l} \left[\begin{matrix} a_0, a_1, a_2, \dots, a_{2l} \\ b_1, b_2, \dots, b_{2l} \end{matrix}; z \right] &= \prod_{j=1}^{l-1} \frac{\Gamma(b_{2j}-a_{2j})}{\Gamma(b_{2j}-a_{2j-2})} \\ &\times \int_{[0,1]^{2l-2}} \frac{\prod_{i=1}^{l-1} x_{2i-1}^{a_{2i-1}-1} (1-x_{2i-1})^{b_{2i-1}-a_{2i-1}-1} x_{2i}^{a_{2i}-2-1} (1-x_{2i})^{b_{2i}-a_{2i-2}-1}}{\prod_{j=1}^{l-1} (1-zx_1 \dots x_{2j})^{b_{2j}-a_{2j}}} \\ &\times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a_{2l-2}+k)}{\Gamma(a_0)k!} \frac{\Gamma(a_{2l-1}+k)}{\Gamma(b_{2l-1}+k)} \frac{\Gamma(b_{2l-1}-a_{2l-1})}{\Gamma(b_{2l-1}+k)} \frac{\Gamma(b_{2l}-a_{2l}+k)}{\Gamma(b_{2l}+k)} \frac{\Gamma(a_{2l})}{\Gamma(b_{2l}+k)} \\ &\times (zx_1 x_2 \dots x_{2l-2})^k dx_1 dx_2 \dots dx_{2l-2}. \end{aligned}$$

Для завершения доказательства заметим, что внутренняя сумма может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} &\frac{\Gamma(a_{2l-2}) \Gamma(a_{2l-1}) \Gamma(a_{2l}) \Gamma(b_{2l-1}-a_{2l-1}) \Gamma(b_{2l}-a_{2l})}{\Gamma(a_0) \Gamma(b_{2l-1}) \Gamma(b_{2l})} \\ &\times {}_3F_2 \left[\begin{matrix} a_{2l-1}, a_{2l-2}, b_{2l}-a_{2l} \\ b_{2l-1}, b_{2l} \end{matrix}; zx_1 x_2 \dots x_{2l-2} \right] \\ &= \frac{\Gamma(a_{2l})}{\Gamma(a_0)} \frac{\Gamma(b_{2l}-a_{2l})}{\Gamma(b_{2l}-a_{2l-2})} \\ &\times \int_{[0,1]^2} \frac{x_{2l-1}^{a_{2l-1}-1} (1-x_{2l-1})^{b_{2l-1}-a_{2l-1}-1} x_{2l}^{a_{2l}-2-1} (1-x_{2l})^{b_{2l}-a_{2l-2}-1}}{(1-zx_1 \dots x_{2l})^{b_{2l}-a_{2l}}} dx_{2l-1} dx_{2l}. \end{aligned}$$

Теорема 1 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Для произвольных целых неотрицательных l и n выполняется равенство

$$\begin{aligned} & \int_{[0,1]^{2l}} \frac{\prod_{i=1}^{2l} x_i^n (1-x_i)^n}{(1-x_1(1-x_2(\cdots-x_{2l-1}(1-x_{2l})\cdots))^{n+1}} dx_1 dx_2 \cdots dx_{2l} \\ &= \int_{[0,1]^{2l}} \frac{\prod_{i=1}^{2l} x_i^n (1-x_i)^n}{\prod_{j=1}^l (1-x_1 \cdots x_{2j})^{n+1}} dx_1 dx_2 \cdots dx_{2l}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем $a_i = n+1$, $b_i = 2n+2$ в теореме 1 и устремим z к единице.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\operatorname{Re}(a_0) > 0$, $\operatorname{Re}(b_i) > \operatorname{Re}(a_i) > 0$ при $1 \leq i \leq 2l+1$, $\operatorname{Re}(b_{2j}) > \operatorname{Re}(a_{2j-2})$ при $1 \leq j \leq l$ и $\operatorname{Re}(b_{2l+1}) > \operatorname{Re}(a_{2l})$. Тогда для $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$, выполняется равенство

$$\begin{aligned} V_{2l+1} \left[\begin{matrix} a_0, a_1, a_2, \dots, a_{2l+1} \\ b_1, b_2, \dots, b_{2l+1} \end{matrix}; z \right] &= \frac{\Gamma(a_{2l+1})}{\Gamma(a_0)} \frac{\Gamma(b_{2l+1} - a_{2l+1})}{\Gamma(b_{2l+1} - a_{2l})} \prod_{j=1}^l \frac{\Gamma(b_{2j} - a_{2j})}{\Gamma(b_{2j} - a_{2j-2})} \\ &\times \int_{[0,1]^{2l+1}} \frac{\prod_{i=1}^l x_{2i-1}^{a_{2i-1}-1} (1-x_{2i-1})^{b_{2i-1}-a_{2i-1}-1} x_{2i}^{a_{2i}-2-1} (1-x_{2i})^{b_{2i}-a_{2i}-2-1}}{\prod_{j=1}^l (1-zx_1 \cdots x_{2j})^{b_{2j}-a_{2j}}} \\ &\times \frac{x_{2l+1}^{a_{2l+1}-1} (1-x_{2l+1})^{b_{2l+1}-a_{2l}-1}}{(1-zx_1 \cdots x_{2l+1})^{a_{2l+1}}} dx_1 dx_2 \cdots dx_{2l+1}, \end{aligned}$$

причем оба интеграла сходятся.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Справедливо равенство

$$\begin{aligned} V_{2l+1} \left[\begin{matrix} a_0, a_1, a_2, \dots, a_{2l+1} \\ b_1, b_2, \dots, b_{2l+1} \end{matrix}; z \right] &= \int_{[0,1]^{2l}} \frac{\prod_{i=1}^{2l} x_i^{a_i-1} (1-x_i)^{b_i-a_i-1}}{(1-zx_1(1-x_2(\cdots-x_{2l-1}(1-x_{2l})\cdots))^{a_0}} \\ &\times \int_{[0,1]} \frac{x_{2l+1}^{a_{2l+1}-1} (1-x_{2l+1})^{b_{2l+1}-a_{2l+1}-1}}{(1-zx_1 \cdots x_{2l+1}) / (1-zx_1(1-x_2(\cdots-x_{2l-1}(1-x_{2l})\cdots)))^{a_0}} dx_1 \cdots dx_{2l} dx_{2l+1}. \end{aligned}$$

Замечая, что

$$\left| \frac{zx_1 \cdots x_{2l+1}}{1-zx_1(1-x_2(\cdots-x_{2l-2}(1-x_{2l})\cdots))} \right| \leq |z| < 1,$$

получаем представление

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{zx_1 \cdots x_{2l+1}}{1-zx_1(1-x_2(\cdots-x_{2l-2}(1-x_{2l})\cdots))} \right)^{-a_0} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a_0+k)}{\Gamma(a_0) k!} \left(\frac{zx_1 \cdots x_{2l+1}}{1-zx_1(1-x_2(\cdots-x_{2l-1}(1-x_{2l})\cdots))} \right)^k. \end{aligned}$$

Подставим это разложение в подынтегральное выражение и проинтегрируем по переменной x_{2l+1} :

$$\begin{aligned} & V_{2l+1} \left[\begin{matrix} a_0, a_1, a_2, \dots, a_{2l+1} \\ b_1, b_2, \dots, b_{2l+1} \end{matrix}; z \right] \\ &= \int_{[0,1]^{2l}} \frac{\prod_{i=1}^{2l} x_i^{a_i-1} (1-x_i)^{b_i-a_i-1}}{(1-zx_1(1-x_2(\cdots-x_{2l-1}(1-x_{2l})\cdots))^{a_0}} dx_1 dx_2 \cdots dx_{2l} \\ &\times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a_0+k)}{\Gamma(a_0) k!} \frac{\Gamma(a_{2l+1}+k)}{\Gamma(b_{2l+1}+k)} \left(\frac{zx_1 \cdots x_{2l}}{1-zx_1(1-x_2(\cdots-x_{2l-1}(1-x_{2l})\cdots))} \right)^k. \end{aligned}$$

Переставив суммирование и интегрирование, получаем

$$V_{2l+1} \left[\begin{matrix} a_0, a_1, a_2, \dots, a_{2l+1} \\ b_1, b_2, \dots, b_{2l+1} \end{matrix}; z \right] = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \frac{\Gamma(a_0+k)}{\Gamma(a_0) k!} \frac{\Gamma(a_{2l+1}+k)}{\Gamma(b_{2l+1}+k)} \frac{\Gamma(b_{2l+1}-a_{2l+1})}{\Gamma(b_{2l+1}+k)} \times V_{2l} \left[\begin{matrix} a_0+k, a_1+k, a_2+k, \dots, a_{2l}+k \\ b_1+k, b_2+k, \dots, b_{2l}+k \end{matrix}; z \right]. \quad (3)$$

По теореме 1 справедливо представление

$$V_{2l} \left[\begin{matrix} a_0+k, a_1+k, a_2+k, \dots, a_{2l}+k \\ b_1+k, b_2+k, \dots, b_{2l}+k \end{matrix}; z \right] = \frac{\Gamma(a_{2l}+k)}{\Gamma(a_0+k)} \prod_{j=1}^l \frac{\Gamma(b_{2j}-a_{2j})}{\Gamma(b_{2j}-a_{2j-2})} \times \int_{[0,1]^{2l}} \frac{\prod_{i=1}^l x_{2i-1}^{a_{2i-1}+k-1} (1-x_{2i-1})^{b_{2i-1}-a_{2i-1}-1} x_{2i}^{a_{2i-2}+k-1} (1-x_{2i})^{b_{2i}-a_{2i-2}-1}}{\prod_{j=1}^l (1-zx_1 \dots x_{2j})^{b_{2j}-a_{2j}}} \times dx_1 dx_2 \dots dx_{2l}.$$

Подставим его в (3) и поменяем местами суммирование и интегрирование; в результате получим

$$V_{2l+1} \left[\begin{matrix} a_0, a_1, a_2, \dots, a_{2l+1} \\ b_1, b_2, \dots, b_{2l+1} \end{matrix}; z \right] = \prod_{j=1}^l \frac{\Gamma(b_{2j}-a_{2j})}{\Gamma(b_{2j}-a_{2j-2})} \times \int_{[0,1]^{2l}} \frac{\prod_{i=1}^l x_{2i-1}^{a_{2i-1}-1} (1-x_{2i-1})^{b_{2i-1}-a_{2i-1}-1} x_{2i}^{a_{2i-2}-1} (1-x_{2i})^{b_{2i}-a_{2i-2}-1}}{\prod_{j=1}^l (1-zx_1 \dots x_{2j})^{b_{2j}-a_{2j}}} \times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a_{2l}+k)}{\Gamma(a_0) k!} \frac{\Gamma(a_{2l+1}+k)}{\Gamma(b_{2l+1}+k)} (zx_1 x_2 \dots x_{2l})^k dx_1 dx_2 \dots dx_{2l}.$$

Для завершения доказательства заметим, что внутренняя сумма может быть представлена в виде

$$\frac{\Gamma(a_{2l}) \Gamma(a_{2l+1}) \Gamma(b_{2l+1}-a_{2l+1})}{\Gamma(a_0) \Gamma(b_{2l+1})} {}_2F_1 \left[\begin{matrix} a_{2l}, a_{2l+1} \\ b_{2l+1} \end{matrix}; zx_1 x_2 \dots x_{2l} \right] = \frac{\Gamma(a_{2l+1})}{\Gamma(a_0)} \frac{\Gamma(b_{2l+1}-a_{2l+1})}{\Gamma(b_{2l+1}-a_{2l})} \int_{[0,1]} \frac{x_{2l+1}^{a_{2l+1}-1} (1-x_{2l+1})^{b_{2l+1}-a_{2l+1}-1}}{(1-zx_1 \dots x_{2l+1})^{a_{2l+1}}} dx_{2l+1}.$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Для произвольных целых неотрицательных l и n выполняется равенство

$$\int_{[0,1]^{2l+1}} \frac{\prod_{i=1}^{2l+1} x_i^n (1-x_i)^n}{(1-x_1(1-x_2(\dots x_{2l}(1-x_{2l+1})\dots))^{n+1}} dx_1 dx_2 \dots dx_{2l+1} = \int_{[0,1]^{2l+1}} \frac{\prod_{i=1}^{2l+1} x_i^n (1-x_i)^n}{\prod_{j=1}^l (1-x_1 \dots x_{2j})^{n+1} \cdot (1-x_1 x_2 \dots x_{2l} x_{2l+1})^{n+1}} dx_1 dx_2 \dots dx_{2l+1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем $a_i = n+1$, $b_i = 2n+2$ в теореме 2 и устремим z к единице.

Определим обобщенные полилогарифмы равенством

$$\text{Le}_{\vec{s}}(z) = \text{Le}_{s_1, s_2, \dots, s_n}(z) = \sum_{n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_l \geq 1} \frac{z^{n_1}}{n_1^{s_1} n_2^{s_2} \dots n_l^{s_l}},$$

где s_i — натуральные числа; для удобства также введем $\text{Le}_0(z) \equiv 1$. Определим длину $l(\vec{s}) = l$ и вес $w(\vec{s}) = s_1 + s_2 + \dots + s_l$ вектора $\vec{s} = (s_1, s_2, \dots, s_l)$.

Представляя интеграл

$$S(z) = \int_{[0,1]^m} \frac{\prod_{i=1}^m x_i^{a_i-1} (1-x_i)^{b_i-a_i-1}}{\prod_{j=1}^l (1-zx_1 x_2 \dots x_{r_j})^{c_j}} dx_1 dx_2 \dots dx_m, \quad 1 \leq r_1 < r_2 < \dots < r_l = m,$$

в виде кратной суммы и произведения различные преобразования над суммами, мы доказываем следующий результат.

ТЕОРЕМА 3. Пусть параметры a_i, b_i, c_j – целые числа, причем $b_i > a_i \geq 1$ при $i = 1, \dots, m$ и $c_j \geq 1$, $c_1 + \dots + c_j \leq q_1 + \dots + q_j$, где $q_j = \sum_{i=r_{j-1}+1}^{r_j} (b_i - a_i)$, $j = 1, \dots, l$. Тогда для $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$, выполняется равенство

$$S(z) = \sum_{\bar{s}} P_{\bar{s}}(z^{-1}) \operatorname{Le}_{\bar{s}}(z),$$

где суммирование ведется по векторам $\bar{s}$, удовлетворяющим условиям $l(\bar{s}) \leq l$, $w(\bar{s}) \leq m$, а $P_{\bar{s}}(x)$ – многочлены с рациональными коэффициентами такие, что

$$\operatorname{ord}_{x=0} P_{\bar{s}}(x) \geq \min_{1 \leq i \leq m} a_i \quad \text{при } \bar{s} \neq (0), \quad \deg P_{\bar{s}}(x) \leq \max_{1 \leq i \leq m} b_i - 1.$$

Автор выражает благодарность профессору Ю. В. Нестеренко за помощь, оказанную при написании работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Beukers F. // Bull. London Math. Soc. 1979. V. 11. № 3. P. 268–272.
2. Василенко О. Н. // Тезисы докл. Республиканской научно-теоретической конференции “Теория чисел и ее приложения” (Ташкент, 26–28 сентября 1990 г.). Ташкентский гос. пед. институт, 1990. С. 27.
3. Vasilyev D. V. On Small Linear Forms for the Values of the Riemann Zeta-Function at Odd Points. Preprint № 1(558). Minsk: Nat. Acad. Sci. Belarus, Institute Math., 2001.
4. Сорокин В. Н. // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1998. № 3. С. 48–52.
5. Сорокин В. Н. // Матем. сб. 1996. Т. 187. № 12. С. 87–120.