Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. К. Мацак, Об относительной устойчивости экстремальных случайных функций, *Матем. заметки*, 2002, том 71, выпуск 5, 787–790

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm652>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подра-

зумекает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 16:17:43

ОБ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИЙ

И. К. Мацак

Рассмотрим нормально распределенную случайную функцию (с.ф.) $X = \{X(t), t \in T\}$, заданную на некотором параметрическом множестве T и принимающую значения в $\mathbb{R}$. Через $\sigma_T X$ будем обозначать среднее квадратическое отклонение с.ф. X :

$$\sigma_T X = \{\sigma(t), t \in T\}, \quad \sigma(t) = (M|X(t) - MX(t)|^2)^{1/2}.$$

Для последовательности (X_n) независимых копий X введем экстремальную с.ф.

$$Z_n = \{Z_n(t), t \in T\}, \quad Z_n(t) = \sup_{1 \leq k \leq n} X_k(t).$$

Будем говорить, что последовательность (Z_n) *относительно устойчива почти наверное* (п.н.), если выполняется соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{Z_n}{b_n} - \sigma_T X \right| = 0 \quad \text{п.н.}, \quad (1)$$

где

$$b_n = \begin{cases} \sqrt{2 \ln n}, & n > 1, \\ 1, & n = 1, \end{cases}$$

$\|x\| = \sup_{t \in T} |x(t)|$ – равномерная норма.

Если для вещественной прямой относительная устойчивость экстремальных значений последовательности случайных величин (с.в.) и ее обобщения широко изучались (см. [1]–[3]), то бесконечномерный случай исследовался значительно меньше. Относительная устойчивость экстремальных случайных элементов (с.э.) установлена для пространства $C[0, 1]$ и для банаховых решеток, не содержащих равномерно l_∞^n (см. [4]).

В данной заметке доказывается справедливость равенства (1) для произвольной ограниченной нормальной с.ф., т.е. $\|X\| < \infty$ п.н.

ТЕОРЕМА. Пусть X – ограниченная нормально распределенная с.ф. Тогда последовательность экстремальных с.ф. (Z_n) относительно устойчива п.н.

При доказательстве теоремы будут использоваться следующие вспомогательные утверждения.

ЛЕММА 1 [5]. Пусть X – ограниченная нормально распределенная с.ф. Тогда существует нормальная последовательность с.в. (ξ_k) такая, что $(M|\xi_k|^2)^{1/2} \leq KM\|X\|/b_k$ и для любого $t \in T$

$$X(t) = \sum_{k \geq 1} \xi_k a_k(t), \quad (2)$$

где $\sum_{k \geq 1} a_k(t) \leq 1$, $a_k(t) \geq 0$, K – абсолютная константа, а ряд сходится п.н. и в L_2 .

Мы приводим несколько более грубую оценку для величины $(M|\xi_k|^2)^{1/2}$, чем в работе [5].

ЛЕММА 2. Если X – ограниченная нормально распределенная с.ф., то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{Z_n}{b_n} \right\| = \|\sigma_T X\|. \quad (3)$$

Лемма 2 следует из результатов работы [6].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Воспользуемся представлением (2) для с.ф. X . Обозначим через $X_n^{(m)}(t)$ независимые копии $X^{(m)}(t)$,

$$X^{(m)}(t) = \sum_{1 \leq k \leq m} \xi_k a_k(t), \quad Z_n^{(m)}(t) = \sup_{1 \leq k \leq n} X_n^{(m)}(t), \quad n \geq 1.$$

По неравенству треугольника

$$\left\| \frac{Z_n}{b_n} - \sigma_T X \right\| \leq \|Z_n - Z_n^{(m)}\| b_n^{-1} + \left\| \frac{Z_n^{(m)}}{b_n} - \sigma_T X^{(m)} \right\| + \|\sigma_T X^{(m)} - \sigma_T X\|. \quad (4)$$

Поскольку с.э. $X^{(m)}$ лежит в конечномерном пространстве, а для таких пространств равенство (1) выполняется (это следует из вложения конечномерного пространства в пространство $\overline{H}_m$ всех непрерывных функций из $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}$, однородных степени 1 [7, с. 42]), то п.н.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{Z_n^{(m)}}{b_n} - \sigma_T X^{(m)} \right\| = 0. \quad (5)$$

Без ограничения общности можно считать, что $MX(t) = 0$. Тогда

$$\sigma(t) = (M|X(t)|^2)^{1/2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} M|X(t)|.$$

Отсюда и из леммы 1 получаем

$$\begin{aligned} \|\sigma_T X^{(m)} - \sigma_T X\| &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sup_{t \in T} |M|X^{(m)}(t)| - M|X(t)|| \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sup_{t \in T} M \left| \sum_{k \geq m} \xi_k a_k(t) \right| \\ &\leq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sup_{t \in T} M \sum_{k \geq m} |\xi_k| a_k(t) \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}} KM \frac{\|X\|}{b_m}. \end{aligned} \quad (6)$$

Далее оценим сверху первое слагаемое в правой части неравенства (4). При этом воспользуемся леммой 2 и элементарным неравенством

$$\left| \max_{1 \leq k \leq n} c_k - \max_{1 \leq k \leq n} d_k \right| \leq \max_{1 \leq k \leq n} |c_k - d_k|.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \|Z_n - Z_n^{(m)}\| b_n^{-1} &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \left\| \sup_{1 \leq k \leq n} X_k(t) - \sup_{1 \leq k \leq n} X_k^{(m)}(t) \right\| b_n^{-1} \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \left\| \sup_{1 \leq k \leq n} |X_k(t) - X_k^{(m)}(t)| \right\| b_n^{-1} \leq \|\sigma_T(X^{(m)} - X)\|. \end{aligned} \quad (7)$$

Из цепочки неравенств (6) нетрудно вывести оценку

$$\|\sigma_T(X^{(m)} - X)\| \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}} K M \frac{\|X\|}{b_m}. \quad (8)$$

Для завершения доказательства теоремы остается заметить, что соотношения (4)–(8) содержат следующее неравенство:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{Z_n}{b_n} - \sigma_T X \right\| \leq \sqrt{2\pi} K M \frac{\|X\|}{b_m}.$$

Действительно, поскольку m – произвольное число, а $b_m \rightarrow \infty$ при $m \rightarrow \infty$, отсюда немедленно получаем равенство (1).

Для банаховой решетки E обозначим через $E_{(\lambda)}$ идеал, порожденный положительным элементом λ , т.е. $E_{(\lambda)} = \{x \in E: \exists \lambda > 0, |x| \leq \lambda u\}$. Тогда $E_{(\lambda)}$ с нормой $\|x\|_{\lambda} = \inf\{\lambda > 0: |x| \leq \lambda u\}$ будет банаховой решеткой, (o) -изометричным пространством $C(K)$ для некоторого компактного пространства Хаусдорфа K [8]. Известно, что (o) -изометрия банаховых решеток сохраняет порядок, модуль, верхнюю и нижнюю грани. Следовательно, из теоремы имеем

СЛЕДСТВИЕ. Пусть X – нормальный случайный элемент со значениями в сепарабельной банаховой решетке E , (X_n) – последовательность независимых копий X ,

$$Z_n = \sup_{1 \leq k \leq n} X_k, \quad \sigma_T X = \sqrt{\frac{\pi}{2}} M |X - MX|.$$

Если существует положительный элемент u такой, что $\|X\|_u < \infty$ п.н., то последовательность Z_n будет относительно устойчива п.н.; более того, существует последовательность с.в. (τ_n) такая, что $\tau_n \rightarrow 0$ п.н. при $n \rightarrow \infty$ и

$$\left| \frac{Z_n}{b_n} - \sigma_T X \right| \leq \tau_n u \quad \text{п.н.}$$

ПРИМЕР. В одномерном случае известно равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|Z_n - b_n \sigma_T X\| = 0. \quad (9)$$

Возникает вопрос: нельзя ли в условиях теоремы усилить относительную устойчивость до равенства (9)?

Ответ отрицательный. В работе [9] построен пример нормального случайного процесса X такого, что $\|\sigma_T X\| = 1$, $\|X\| < \infty$ п.н. и

$$M \exp \left(\frac{\|X\|^2}{2} - (1 + \varepsilon) \|X\| \right) = \begin{cases} +\infty & \text{при } \varepsilon = 0, \\ < \infty & \text{при } \varepsilon > 0. \end{cases}$$

Известно [10], что для ограниченной нормальной с.ф. X существует число d такое, что

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{-1} \left\{ \log P(\|X\| \geq r) + \frac{(r + d)^2}{2\|\sigma_T X\|^2} \right\} = 0.$$

Из двух последних равенств имеем $d = -1$. Тогда (см. [6]) для такого процесса выполняется равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|Z_n - b_n \sigma_T X\| = 1 \quad \text{п.н.,}$$

что противоречит (9).

Таким образом, для любого пространства $C(K)$ выполняется равенство (1). С другой стороны, существует компактное пространство Хаусдорфа K и нормальный с.э. X со значениями в пространстве $C(K)$, для которого равенство (9) не выполняется.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gnedenko B.V. // Ann. Math. 1943. V. 44. P. 423–453. 2. Barndorf-Nielsen O. // Ann. Math. Statist. 1963. V. 34. №3. P. 992–1002. 3. Галамбош Я. Асимптотическая теория экстремальных порядковых статистик. М.: Наука, 1984. 4. Мацак І. К. // Укр. матем. ж. 1995. Т. 47. № 7. С. 1006–1008. 5. Ledoux M., Talagrand M. Probability in Banach Spaces. Berlin: Springer, 1991. 6. Мацак І. К. // Теорія ймовірностей та матем. статист. 1997. № 56. С. 126–132. 7. Lindenstrauss J., Tzafriri L. Classical Banach Spaces. V. 2. Berlin: Springer, 1979. 8. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1984. 9. Talagrand M. // Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb. 1984. V. 68. № 1. P. 1–8. 10. Лифшиц М. А. Гауссовские случайные функции. Киев: ТвіМС, 1995.

г. Киев

Поступило

28.09.1999

Исправленный вариант

31.05.2001