Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. И. Нейман-заде, Эллиптические операторы с сингулярными коэффициентами, *Матем. заметки*, 2002, том 71, выпуск 5, 790–793

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm653>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 17:08:46

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ОПЕРАТОРЫ С СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

М. И. Нейман-заде

В этой заметке мы рассмотрим сильно эллиптические операторы вида

$$L = \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} D^\alpha c_{\alpha, \beta}(x) D^\beta \quad (1)$$

в предположении, что $x \in \mathbb{R}^n$, а коэффициенты $c_{\alpha, \beta}$ – сингулярные функции. Точнее, мы будем предполагать, что коэффициенты главного символа (при $|\alpha| = |\beta| = m$) существенно ограниченные функции, а при $|\alpha| + |\beta| < 2m$ являются обобщенными функциями. Основная цель работы – найти достаточные условия на эти коэффициенты, гарантирующие корректность определения оператора L . Одновременно мы получим результаты о возможности приближения изучаемых операторов в смысле равномерной резольвентной сходимости операторами такого же вида, но с гладкими коэффициентами.

Решается также задача о приближении спектров и собственных векторов (если они имеются). Результаты заметки обобщают результаты работы [1], где аналогичные вопросы изучались для оператора Шрёдингера $L = -\Delta + q(x)$, в предположении, что $q(x)$ – обобщенная функция.

Пусть

$$L_0 = \sum_{|\alpha| = |\beta| = m} D^\alpha c_{\alpha, \beta}(x) D^\beta \quad (2)$$

– главная часть оператора L . Мы используем стандартные обозначения

$$D^\alpha = i^{|\alpha|} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

С оператором L_0 ассоциируем полуторалинейную форму

$$\mathcal{L}_0(u, v) = \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{|\alpha| = |\beta| = m} c_{\alpha, \beta}(x) D^\beta u(x) \overline{D^\alpha v(x)} dx,$$

определенную для функций $u, v \in S$, где S – пространство Шварца гладких быстроубывающих функций. Далее предполагается, что функции $c_{\alpha, \beta}$ при $|\alpha| = |\beta| = m$ принадлежат пространству $L_\infty(\mathbb{R}^n)$, а также выполнена коэрцитивная оценка (неравенство Гординга)

$$\operatorname{Re} \mathcal{L}_0(u, u) \geq \delta \|\nabla^m u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}^2, \quad u \in S, \quad (3)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 01-01-00691 и № 00-15-96100.

при некотором $\delta > 0$. При условии $c_{\alpha, \beta}(x) \in L_{\infty}(\mathbb{R}^n)$ очевидна обратная оценка

$$|\mathcal{L}_0(u, u)| \leq \text{const} \|\nabla^m u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}^2, \quad u \in S, \quad (4)$$

а потому полуторалинейная форма $\mathcal{L}_0(u, v)$ является секториальной [2, гл. 6]. Следовательно, эта форма замыкаема, и согласно первой теореме о представлении существует единственный оператор в пространстве $L_2(\mathbb{R}^n)$, который мы также обозначим через L_0 , такой, что

$$\mathcal{L}_0(u, v) = (L_0 u, v)_{L_2(\mathbb{R}^n)}, \quad u, v \in S.$$

Пусть A_0 – самосопряженный оператор, отвечающий (согласно первой теореме о представлении) положительной вещественной квадратичной форме $\text{Re } \mathcal{L}_0(u, u)$. Из оценок (3), (4) легко следует, что область определения замыкания квадратичных форм $\text{Re } \mathcal{L}_0(u, u)$ и $\mathcal{L}_0(u, u)$ совпадает с областью определения квадратного корня $A_0^{1/2}$ и совпадает с соболевским пространством $H^m(\mathbb{R}^n)$. При этом известно [2, гл. 6, теорема 3.2], что оператор L_0 допускает представление

$$L_0 = A_0^{1/2}(1 + iB)A_0^{1/2}, \quad (5)$$

где B – некоторый ограниченный оператор в $L_2(\mathbb{R}^n)$. В частности, оператор L_0 гомеоморфно переводит пространство H^m в двойственное пространство $H^{-m}(\mathbb{R}^n)$.

Пусть $k, l \geq 0$. Обобщенную функцию $\varphi \in S'$ назовем *мультипликатором* из $H^k(\mathbb{R}^n)$ в $H^{-l}(\mathbb{R}^n)$, если

$$|(\varphi f, g)| \leq \text{const} \|f\|_k \|g\|_l \quad \forall f, g \in S, \quad (6)$$

причем константа в неравенстве не зависит от f и g . В этой записи $(\varphi f, g) := (\varphi, \bar{f}g)$ – значение функционала φf на функции g из основного пространства S . Для $\varphi \in S'$ и $f \in S$ определен оператор умножения $M_{\varphi} f = \varphi f$. Неравенство (6) эквивалентно тому, что M_{φ} продолжается как ограниченный оператор из пространства $H^k(\mathbb{R}^n)$ в $H^{-l}(\mathbb{R}^n)$.

Далее множество $\varphi \in S'$, для которого выполнена оценка (6), обозначаем через $M[H^k \rightarrow H^{-l}]$ или коротко $M[k, -l]$. Очевидно, линейное пространство $M[k, -l]$ превращается в банахово пространство, если норму в нем определить как инфимум констант, для которых выполнена оценка (6). В пространстве $M[k, -l]$ выделим подпространство $M_0[k, -l]$, состоящее из мультипликаторов φ таких, что $\forall \varepsilon > 0$ найдется константа $C(\varepsilon)$, гарантирующая оценку

$$\|\varphi f\|_{-l} \leq \varepsilon \|f\|_k + C(\varepsilon) \|f\|_{-l} \quad \forall f \in S.$$

Из определений легко следует, что $M[k, -l] = M[l, -k]$, $M_0[k, -l] = M_0[l, -k]$.

Приведем основные результаты заметки.

ТЕОРЕМА 1. Пусть k – целое число, $k \geq l$ и $k > n/2$. Тогда $H_2^{-l} \subset M_0[k, -l]$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть k – целое число, $k \geq l$ и $k < n/2$. Тогда $H_{\gamma}^{-l} \subset M_0[k, -l]$ при $\gamma \geq n/k$.

ТЕОРЕМА 3. Если $k \geq l$ и $k < n/2$, то $H_{\gamma}^0 = L_{\gamma}(\mathbb{R}^n) \subset M_0[k, -l]$ при $\gamma \geq n/(k+l)$. При $k = n/2$ вложение сохраняется, если $\gamma > n/(k+l)$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть функция φ зависит от p переменных и принадлежит пространству $M[k, -l]$ в $\mathbb{R}^p$, а функция ψ зависит от q переменных и принадлежит пространству $L_{\infty}(\mathbb{R}^q)$. Тогда функция $\varphi(x)\psi(y) \in M[k, -l]$ в $\mathbb{R}^{p+q}$ и справедлива оценка

$$\|\varphi\psi\|_{M[k, -l]} \leq \|\varphi\|_{M[k, -l]} \|\psi\|_{L_{\infty}}.$$

Если же $\varphi \in M_0[k, -l]$, то $\varphi\psi \in M_0[k, -l]$ в $\mathbb{R}^{p+q}$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть оператор L вида (1) таков, что коэффициенты его главной части L_0 (имеющей представление (2)) являются существенно ограниченными и выполнена коэрцитивная оценка (3). Пусть коэффициенты в (1) таковы, что

$$c_{\alpha,\beta}(x) \in M_0[m - |\alpha|, |\beta| - m] \quad \text{при } |\alpha| + |\beta| < 2m. \quad (7)$$

Тогда полуторалинейная форма (Lu, v) (определенная при $u, v \in S$) продолжается по непрерывности как замкнутая секториальная форма с областью определения $H^m(\mathbb{R}^n)$. Тем самым, формальному дифференциальному выражению (1) согласно первой теореме о представлении ставится в соответствие секториальный оператор в $L_2(\mathbb{R}^n)$, который продолжается по непрерывности как биективное отображение из $H^m(\mathbb{R}^n)$ в $H^{-m}(\mathbb{R}^n)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если предположить, что $c_{\alpha,\beta}$ при $|\alpha| = |\beta| = m$ непрерывны, то коэрцитивная оценка (3) выполняется автоматически для равномерно сильно эллиптических операторов L_0 (см. [3]).

ТЕОРЕМА 6. Утверждение теоремы 5 имеет место, если для всех α, β таких, что $|\alpha| + |\beta| < 2m$,

$$c_{\alpha,\beta}(x) \in H_\gamma^{|\alpha|-m}(\mathbb{R}^n) \quad \text{при } |\alpha| \geq |\beta|, \gamma > \max\left(2, \frac{n}{m-|\beta|}\right), \quad (8)$$

$$c_{\alpha,\beta}(x) \in H_\gamma^{|\beta|-m}(\mathbb{R}^n) \quad \text{при } |\alpha| \leq |\beta|, \gamma > \max\left(2, \frac{n}{m-|\alpha|}\right). \quad (9)$$

В случае $m - |\alpha| \neq n/2$ ($m - |\beta| \neq n/2$) допускаются также значения $\gamma = \max(2, n/(m - |\beta|))$ ($\gamma = \max(2, n/(m - |\alpha|))$).

ТЕОРЕМА 7. Обозначим через L_n операторы вида (1) с главной частью L_0 и гладкими коэффициентами $c_{\alpha,\beta,n}(x)$ при $|\alpha| + |\beta| < 2m$. Предположим, что при $|\alpha| \geq |\beta|$ (при $|\alpha| \leq |\beta|$ симметрично) последовательности функций $c_{\alpha,\beta,n}$ сходятся к $c_{\alpha,\beta}(x)$ в норме пространств $H_\gamma^{|\alpha|-m}(\mathbb{R}^n)$, $\gamma \geq \max(2, n/(m - |\beta|))$ (при $m - |\alpha| = n/2$ полагаем $\gamma > 2$). Тогда последовательность операторов L_n сходится к оператору L в смысле равномерной резольвентной сходимости.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В теореме 7 достаточно потребовать сходимости последовательностей $c_{\alpha,\beta,n}(x)$ в норме пространств $M[m - |\alpha|, |\beta| - m]$.

ТЕОРЕМА 8. Пусть выполнены условия теоремы 5 и оператор L , соответствующий дифференциальному выражению (1), имеет изолированное собственное значение λ_0 конечной алгебраической кратности p , причем длина максимальной жордановой цепочки равна p_0 . Предположим, что последовательности гладких функций $c_{\alpha,\beta,n}$ сходятся к $c_{\alpha,\beta}$ в норме пространств $M[m - |\alpha|, |\beta| - m]$. Тогда при достаточно больших n найдутся p собственных значений $\{\lambda_{n,k}\}_{k=1}^p$ соответствующих операторов L_n , для которых выполняется оценка

$$|\lambda_{n,k} - \lambda_0| \leq \text{const} \left(\sum_{|\alpha|, |\beta|=m} \|c_{\alpha,\beta,n}(x) - c_{\alpha,\beta}(x)\|_{M[m-|\alpha|, |\beta|-m]} \right)^{1/(2p_0-1)}.$$

Если λ_0 – простое собственное значение и ему соответствует собственная функция f , то соответствующие собственные функции операторов L_n сходятся к f , причем

$$\|f_n - f\|_{H^m} \leq \text{const} \sum_{|\alpha|, |\beta|=m} \|c_{\alpha,\beta,n}(x) - c_{\alpha,\beta}(x)\|_{M[m-|\alpha|, |\beta|-m]}.$$

Автор благодарит профессора А. А. Шкаликова за постановку задач и ценные советы. В частности, при доказательстве теорем 5 и 6 были использованы результаты Шкаликова и Бака о мультипликаторах в пространствах Соболева с негативными индексами гладкости.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нейман-заде М. И., Шкаликов А. А. // Матем. заметки. 1999. Т. 66. № 5. С. 723–733.
2. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.
3. Йосида К. Функциональный анализ. М.: Мир, 1967.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило
09.10.2001