Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Соболев, Доказательство гипотезы Дирака для одного класса конечномерных систем Гамильтона–Дирака, *Матем. заметки*, 2002, том 71, выпуск 5, 793–797

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm654>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 12:59:44

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ГИПОТЕЗЫ ДИРАКА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА КОНЕЧНОМЕРНЫХ СИСТЕМ ГАМИЛЬТОНА–ДИРАКА

А. С. Соболев

Введение. В статье доказано утверждение, впервые сформулированное Дираком в виде гипотезы в работе [1], в которой он изучал гамильтоновы системы со связями; теперь эти системы известны как системы Гамильтона–Дирака (СГД) (ср. [2] и [3]). В основе доказательства лежит метод, использующий теорию управляемых систем. Идея использования этого метода была заимствована из работы [4], однако в предлагаемом доказательстве применяется новый подход, который позволил доказать требуемое утверждение для более широкого класса СГД (мы называем его классом Дирака), чем это сделано в [4].

1. Основные определения и обозначения. Пусть E и E_{Φ} – евклидовы пространства.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Связи* в окрестности точки $x_0 \in E$ – это отображение $\Phi: E \rightarrow E_{\Phi}$, удовлетворяющее следующим условиям:

Φ непрерывно дифференцируемо в окрестности точки x_0 и $\Phi(x_0) = 0$;
отображение $\Phi'(x_0): E \rightarrow E_{\Phi}$ сюръективно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Система Гамильтона–Дирака* на фазовом пространстве E – это набор (H, Φ, E, I) , где $H: E \rightarrow \mathbb{R}^1$ – гладкая функция, называемая гамильтонианом, $\Phi: E \rightarrow E_{\Phi}$ – гладкое отображение, удовлетворяющее определению связей, E – четырехмерное евклидово пространство, $I: E \rightarrow E$ – симплектический оператор (ср. [2] и [3]).

Множество $\Gamma_{\Phi} = \{x \in E: \Phi(x) = 0\}$ называется *поверхностью связей*. Определим функцию $\mathcal{H}: E \times E_{\Phi} \rightarrow \mathbb{R}^1$ равенством $\mathcal{H}(x, \lambda) = H(x) + \Phi(x)\lambda$, $\lambda \in E_{\Phi}$. Будем говорить, что функция $x(\cdot): \mathbb{R}^1 \rightarrow E$ задает закон изменения состояния механической системы, описываемой СГД (H, Φ, E, I) , если найдется функция $\lambda(\cdot): \mathbb{R}^1 \rightarrow E_{\Phi}$ такая, что пара функций $(x(\cdot), \lambda(\cdot))$ удовлетворяет системе уравнений Гамильтона–Дирака (СУГД):

$$\dot{x}(t) = I \cdot (\mathcal{H}'_E)^*(x(t), \lambda(t)), \quad \Phi(x(t)) = 0.$$

Функция $\mathcal{H}$ называется *обобщенным гамильтонианом*. Для $\mathcal{H}$ будем полагать по определению, что $\{F, \mathcal{H}\}(x, \lambda) = \{F, H\}(x) + \{F, \Phi\}(x)(\lambda)$, где F – гладкая функция на E , $\{\cdot, \cdot\}(x)$ – обычная скобка Пуассона, задаваемая симплектическим оператором. Зафиксируем фазовое пространство $E = Q \times P$, $Q = P = \mathbb{R}^N$, и оператор $I: I(p, q) = (q, -p)$.

2. Системы Гамильтона–Дирака. В общем случае не через каждую точку Γ_{Φ} проходит решение СУГД для СГД (H, Φ) , и не для любой функции $\lambda(\cdot)$ существует решение СУГД. Задача определения полной поверхности связей (через каждую точку которой проходит решение) и класса допустимых функций $\lambda(\cdot)$ решается с помощью так называемой процедуры выявления связей (ПВС), в основе которой лежат уравнения сохранения связей во времени. Мы придерживаемся схемы ПВС, предложенной Дираком (см., также, [4]).

Пусть на s -м шаге ПВС получены новые связи Ψ^s , обобщенный гамильтониан $\mathcal{H}^s$ и поверхность связей $\Gamma_{\Psi^0, \dots, \Psi^s}$; здесь $\Psi^0 = \Phi$. При выполнении некоторых условий уравнение сохранения связей Ψ^s во времени $\{\Psi^s, \mathcal{H}^s\}(q, p, \lambda^s) = 0$ равносильно равенствам $\lambda_1^s = \hat{\lambda}_1^s(q, p, \lambda_2^s)$ и $\tilde{\Psi}^{s+1}(q, p) = 0$, где $\lambda^s = (\lambda_1^s, \lambda_2^s)$. Будем предполагать, что в окрестности некоторой точки множество $\Gamma_{\Psi^0, \dots, \Psi^s} \cap \Gamma_{\tilde{\Psi}^{s+1}}$ является гладкой поверхностью; в этом случае найдется отображение Ψ^{s+1} такое, что отображение $\Psi^{0, \dots, s+1} := (\Psi^0, \dots, \Psi^s, \Psi^{s+1})$ удовлетворяет определению связей, и в этой окрестности $\Gamma_{\Psi^0, \dots, \Psi^{s+1}} = \Gamma_{\Psi^0, \dots, \Psi^s} \cap \Gamma_{\tilde{\Psi}^{s+1}}$.

Будем говорить, что СГД (H, Φ) выдерживает ПВС, если на каждом $(s+1)$ -м шаге ПВС функции $\mathcal{H}^s$, Ψ^s и $\tilde{\Psi}^{s+1}$ удовлетворяют всем сформулированным выше условиям. Обозначим через Ψ все новые связи, они называются *вторичными*; при этом связи Φ называются *первичными*. Все связи (Φ, Ψ) будем также обозначать через Φ^* . Функцию на фазовом пространстве, коммутирующую со всеми связями на поверхности связей Γ_{Φ^*} , будем называть *величиной первого рода*, любую систему функций $\chi = (\chi_1, \dots, \chi_k)$, для которой матрица $\|\{\chi, \chi\}\|$ является неособенной на Γ_{Φ^*} , будем называть *системой функций второго рода*. Дирак показал, что связи Φ и Ψ можно разделить на связи первого и второго рода, мы будем обозначать их через (Φ_I, Φ_{II}) и (Ψ_I, Ψ_{II}) .

Связи Ψ^s , полученные на s -м шаге, в окрестности точки $(q_0, p_0) \in \Gamma_{\Phi^*}$ также можно разделить на связи первого и второго рода, т.е. представить их в виде (Ψ_I^s, Ψ_{II}^s) . Применяя к Ψ^s шаг процедуры выявления связей, получим новые связи $(\Psi_I^{s+1}, \Psi_{II}^{s+1})$. Рассмотрим, кроме того, отдельно уравнения сохранения связей Ψ_I^s во времени. Пусть непосредственным следствием этих уравнений являются равенства $\tilde{\Psi}^{s+1, I}(q, p) = 0$. Мы будем говорить, что связи первого рода, полученные на $(s+1)$ -м шаге, невырождены и не являются следствиями сохранения во времени связей второго рода, если в качестве функций Ψ_I^{s+1} можно взять некоторые из функций $\tilde{\Psi}^{s+1, I}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. СГД (H, Φ) принадлежит классу Дирака, если она удовлетворяет следующим условиям:

функции H и Φ аналитические;

СГД (H, Φ) выдерживает процедуру выявления связей;

никакая связь первого рода не является следствием сохранения во времени связи второго рода, и все связи первого рода, получаемые на каждом шаге процедуры выявления связей, невырождены.

3. Гипотеза Дирака.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Аналитическая функция f^{ph} , зависящая от $q, p, \dots, q^{(k)}, p^{(k)}$, называется *физической величиной* для СГД (H, Φ) , если для любых двух гладких пересекающихся решений $(q(\cdot), p(\cdot))$ и $(\tilde{q}(\cdot), \tilde{p}(\cdot))$ СУГД выполняется тождество

$$f^{ph}(q(t), p(t), \dots, q^{(k)}(t), p^{(k)}(t)) \equiv f^{ph}(\tilde{q}(t), \tilde{p}(t), \dots, \tilde{q}^{(k)}(t), \tilde{p}^{(k)}(t)).$$

Пусть траектория $(\tilde{q}(\cdot, \varepsilon), \tilde{p}(\cdot, \varepsilon))$ получена из $(q(\cdot), p(\cdot))$ с помощью канонического преобразования с производящей функцией

$$F(q, \tilde{p}, t, \varepsilon) = \sum_{i=1}^N q_i \tilde{p}_i + \varepsilon W(q, \tilde{p}, t),$$

где $W(q, \tilde{p}, t) = a_k(q, \tilde{p})\gamma^k(t)$. Пусть g – произвольная гладкая функция на фазовом пространстве. Будем говорить, что функция g не меняет своего значения при бесконечно малых канонических преобразованиях траектории $(q(\cdot), p(\cdot))$, генерируемых a_k , если

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} (g(\tilde{q}(t, \varepsilon), \tilde{p}(t, \varepsilon)) - g(q(t), p(t))) \right|_{\varepsilon=0} = 0.$$

ТЕОРЕМА 1 (гипотеза Дирака). Пусть СГД (H, Φ) принадлежит классу Дирака. Тогда если f^{ph} – физическая величина для СГД (H, Φ) , а $(q(\cdot), p(\cdot))$ – решение СУГД, то f^{ph} не меняет своего значения при бесконечно малых канонических преобразованиях траектории $(q(\cdot), p(\cdot))$, генерируемых всеми связями первого рода.

ЛЕММА 1. *Имеет место равенство*

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} (g(\tilde{q}(t, \varepsilon), \tilde{p}(t, \varepsilon)) - g(q(t), p(t))) \right|_{\varepsilon=0} = \{g, a_k\}(q(t), p(t)) \gamma^k(t).$$

4. Канонические переменные. Пусть СГД (H, Φ) принадлежит классу Дирака. Без ограничения общности можно считать, что $(0, 0) \in \Gamma_{\Phi}^*$, все дальнейшие рассуждения справедливы в некоторой окрестности точки $(0, 0)$. Мы воспользуемся каноническими переменными (ω, Q, Ω) , введенными в [4, § 5]. Они получаются с помощью канонического преобразования, выбранного таким образом, чтобы в новых координатах связи Φ^* были эквивалентны Ω , а связи Φ – эквивалентны $\Omega^{(1)}$. В новых координатах $\Omega^{(1)}$ и $\Omega^{(2)}$ – первичные и вторичные связи, $P^{(1)}$ и $P^{(2)}$ – первичные и вторичные связи первого рода, Q сопряжены P . Мы считаем, что вторичные связи первого рода существуют, иначе утверждение гипотезы Дирака тривиально. Рассуждения из [4, гл. 2, § 5] показывают, что в новых координатах обобщенный гамильтониан имеет вид

$$\mathcal{H}(\omega, Q, \Omega, \lambda) = H^{ph}(\omega) + P^{(2)} A(\omega, Q) + \Delta \mathcal{H} + (\lambda_{\Omega^{(1)}}, \Omega^{(1)})$$

(мы будем обозначать его так же, как и обобщенный гамильтониан в исходных переменных); здесь $\Delta \mathcal{H}$ – часть $\mathcal{H}$, не менее чем квадратичная по связям $\Omega^{(2)}$ и не зависящая от связей $\Omega^{(1)}$.

Исследуем процесс выявления связей в СГД. Имеем

$$\tilde{\Psi}^{1,I}(\omega, Q, \Omega) = -P^{(2)} A_1(\omega, Q) - F_1(\omega, Q, \Omega);$$

здесь F_1 не менее чем квадратична по $\Omega^{(2)}$. Так как СГД принадлежит классу Дирака, то все новые связи первого рода $\tilde{\Psi}_I^1$ могут быть выбраны из функций $\tilde{\Psi}^{1,I}$. Можно показать, что уравнения $\{\tilde{\Psi}^{1,I}, \mathcal{H}^1\}(\omega, Q, \Omega) = 0$ и $\{\tilde{\Psi}_I^1, \mathcal{H}^1\}(\omega, Q, \Omega) = 0$ на множестве Γ_{Φ, Ψ^1} эквивалентны, поэтому для удобства мы будем использовать уравнение сохранения $\tilde{\Psi}^{1,I}$ во времени. Функции $\tilde{\Psi}^{2,I}$, являющиеся следствиями этого уравнения, имеют аналогичный вид

$$\tilde{\Psi}^{1,I}; \tilde{\Psi}^{2,I}(\omega, Q, \Omega) = -P^{(2)} A_2(\omega, Q) - F_2(\omega, Q, \Omega),$$

и к ним применимы аналогичные утверждения. В результате процедуры выявления связей мы получим наборы функций $\tilde{\Psi}^{k,I}$ и $\tilde{\Psi}_{II}^k$, $k = 1, \dots, s_0$. Равенства $\tilde{\Psi}^{k,I}(\omega, Q, \Omega) = 0$, $k = 1, \dots, s_0$, равносильны равенству $P^{(2)} \bar{A}(\omega, Q) + \bar{F}(\omega, Q, \Omega) = 0$, где $\bar{A}(\omega, Q) = (A_1(\omega, Q), \dots, A_{s_0}(\omega, Q))$, $\bar{F}(\omega, Q, \Omega) = (F_1(\omega, Q, \Omega), \dots, F_{s_0}(\omega, Q, \Omega))$. Так как вторичные связи первого рода нашей СГД эквивалентны $P^{(2)}$, то в окрестности нуля ранг матрицы $\bar{A}$ равен $\#[P^{(2)}]$ (количество переменных $P^{(2)}$).

5. Вполне управляемые системы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Процесс $\dot{x} = A(t, x) + Bu(t)$, где $B: \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}^N$ – постоянная матрица, называется *локально вполне управляемым* вдоль решения $x(\cdot)$, соответствующего управлению $u_0(\cdot)$, на отрезке $[t_0, t_1]$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что каждая точка x , для которой $|x - x(t_1)| < \delta$, достигается из точки $x_0 = x(t_0)$ под действием гладкого управления $u(\cdot)$, удовлетворяющего условию $|u(t) - u_0(t)| < \varepsilon$ на отрезке $t_0 \leq t \leq t_1$.

ЛЕММА 2. *Процесс $\dot{x} = A(t, x) + Bu(t)$ является локально вполне управляемым вдоль решения $x_0(\cdot)$, соответствующего управлению $u(\cdot)$, на отрезке $[t_0, t_1]$, если не существует постоянного вектора $w \in \mathbb{R}^N$ такого, что $w \neq 0$ и $wI^{-1}(t)B \equiv 0$ на отрезке $[t_0, t_1]$, где $I(\cdot)$ – фундаментальное решение уравнений*

$$\dot{y} = \frac{\partial A}{\partial x}(t, x_0(t))y$$

с начальным условием $I(t_0) = \text{id}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Надо воспользоваться идеей доказательства теоремы 1 в [5, глава 6, § 1], а затем теоремой 6 в [5, глава 3, § 2].

6. Доказательство гипотезы Дирака. Пусть СГД (H, Φ) принадлежит классу Дирака. Преобразуем ее к каноническим координатам и проведем процедуру выявления связей. В результате СУГД преобразуется в эквивалентную ей систему:

$$\dot{\omega} = \{\omega, H^{ph}\}, \quad \dot{Q}^{(1)} = \lambda_{P(1)}, \quad \dot{Q}^{(2)} = A(\omega, Q), \quad \Omega = 0.$$

Определим $n_1 = \# [P^{(1)}]$ и $n_2 = \# [P^{(2)}]$. Запишем уравнения для $Q^{(1)}$ и $Q^{(2)}$ в виде

$$\dot{Q} = \tilde{A}(\omega, Q) + B\lambda_{P(1)}(t),$$

где $\tilde{A} = (0, A) \in \mathbb{R}^{n_1+n_2}$, $B: \mathbb{R}^{n_1} \rightarrow \mathbb{R}^{n_1+n_2}$ определяется равенством $Bx = (x, 0)$. Это уравнение будем называть Q -процессом. Пусть $\omega(\cdot)$ – произвольное решение системы $\dot{\omega} = \{\omega, H^{ph}\}$ на отрезке $[t_0, t_1]$, $Q(\cdot)$ – решение системы $\dot{Q} = \tilde{A}(\omega(t), Q)$ на $[t_0, t_1]$.

ЛЕММА 3. Пусть СГД (H, Φ) принадлежит классу Дирака и преобразована к каноническим переменным. Пусть $I(\cdot)$ – фундаментальное решение системы

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial \tilde{A}}{\partial Q}(\omega(t), Q(t))x(t)$$

на отрезке $[t_0, t_1]$, удовлетворяющее начальному условию $I(t_0) = \text{id}$. Тогда не существует вектора $w \in \mathbb{R}^{n_1+n_2}$, $w \neq 0$, такого, что $wI^{-1}(t)B \equiv 0$ на $[t_0, t_1]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что такой вектор w существует, и обозначим через $w^{(1)}$ первые n_1 его компонент, а через $w^{(2)}$ последние n_2 его компонент. Из тождества $wI^{-1}(t)B \equiv 0$ следует, что все производные выражения $wI^{-1}(t)B$ обращаются в нуль в точке t_0 . Очевидно,

$$wI^{-1}(t)B|_{t=t_0} = w^{(1)} = 0, \quad (wI^{-1}(t)B)'|_{t=t_0} = -w^{(2)} \frac{\partial A}{\partial Q^{(1)}}(\omega(t_0), Q(t_0)) = 0.$$

Непосредственно проверяется, что

$$(wI^{-1}(t)B)^{(k+1)}|_{t=t_0} = -w^{(2)} E_{k+1}(t_0),$$

где

$$E_{k+1}(t) = \dot{E}_k(t) - \frac{\partial A}{\partial Q^{(2)}}(\omega(t), Q(t))E_k(t), \quad E_1(t) = \frac{\partial A}{\partial Q^{(1)}}(\omega(t), Q(t)).$$

Напомним, что

$$\tilde{\Psi}^{1,I} = -P^{(2)} \frac{\partial A}{\partial Q^{(1)}} - F_1, \quad \tilde{\Psi}^{2,I} = -\tilde{F}_2 - P^{(2)} \left\{ \frac{\partial A}{\partial Q^{(1)}}, H^{ph} + P^{(2)} A \right\} + P^{(2)} \frac{\partial A}{\partial Q^{(2)}} \frac{\partial A}{\partial Q^{(1)}}.$$

Для любой функции G переменных (ω, Q) (в том числе матричнозначной) справедливо равенство

$$\{G, H^{ph} + P^{(2)} A\}(\omega(t_0), Q(t_0), P_0^{(2)}) = \dot{G}(\omega(t_0), Q(t_0)) + \sum_i \{G, A_i\}(\omega(t_0), Q(t_0))(P_0^{(2)})_i.$$

Тогда

$$\tilde{\Psi}^{2,I}(\omega(t_0), Q(t_0), \Omega) = -P^{(2)} E_2(t_0) - F_2(\omega(t_0), Q(t_0), \Omega),$$

т.е. равенство $\tilde{\Psi}^{2,I}(\omega(t_0), Q(t_0), \Omega) = 0$ с точностью до квадратичной по $\Omega^{(2)}$ части совпадает с равенством $(wI^{-1}(t)B)^{(2)}|_{t=t_0} = 0$. Можно доказать, что то же самое верно для всех $\tilde{\Psi}^{k,I}$ и $(wI^{-1}B)^{(k)}$, т.е. $E_k(t_0) = A_k(\omega(t_0), Q(t_0))$ для всех k . Было показано, что ранг матрицы $\bar{A}$ в каждой точке из окрестности нуля равен $\# [P^{(2)}] = \# [w^{(2)}]$. Следовательно, ранг аналогичной матрицы $\bar{E}(t_0)$ также равен $\# [w^{(2)}]$, и система $w^{(2)} E(t_0) = 0$ имеет единственное решение $w^{(2)} = 0$, что противоречит предположению.

Из лемм 2 и 3 следует, что Q -процесс является локально вполне управляемым вдоль решения $Q(\cdot)$ с управляющей функцией $\lambda_{P(1)}(\cdot) \equiv 0$. Пусть $\hat{f}^{ph}$ – физическая величина для СГД (H, Φ) ; нетрудно показать (см. [4, § 7]), что на решениях СУГД $\hat{f}^{ph}$ совпадает с некоторой физической величиной f^{ph} , зависящей только от ω , $Q^{(1)}$ и производных $Q^{(1)}$.

ЛЕММА 4. *Физическая величина f^{ph} зависит только от ω .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть (ω_1, Q_1) – произвольная точка на поверхности связей, $\omega(\cdot)$ – решение системы $\dot{\omega} = \{\omega, H^{ph}\}$ с начальным условием $\omega(t_1) = \omega_1$, $Q(\cdot)$ – решение системы $\dot{Q} = \tilde{A}(\omega(t), Q)$ с начальным условием $Q(t_1) = Q_1$. Возьмем $t_0: t_0 < t_1$ и обозначим $\omega_0 = \omega(t_0)$, $Q_0 = Q(t_0)$. Определим

$$\pi: \lambda_{P(1)}(\cdot) \mapsto Q_{Q_0, \lambda_{P(1)}}(t_1), \quad \tau: \lambda_{P(1)} \mapsto (\pi(\lambda_{P(1)}), \lambda'_{P(1)}(t_1), \dots, \lambda^{(k)}_{P(1)}(t_1)).$$

Так как Q -процесс локально вполне управляем, то образ π содержит окрестность O точки Q_1 ; отсюда и из непрерывности π следует, что образ τ всюду плотен в $O(Q_1) \times \mathbb{R}^{kn_1}$. Траектории $(\omega(t), Q(t))$ и $(\omega(t), Q_{Q_0, \lambda_{P(1)}}(t))$ пересекаются в точке (ω_0, Q_0) ; используя определение физической величины, при $t = t_1$ получим равенство $f(\omega_1, Q_1, 0, \dots, 0) = f(\omega_1, Q_1 + \Delta, \delta^1, \dots, \delta^k)$, которое выполняется для всюду плотного в $O(0) \times \mathbb{R}^{kn_1}$ множества $(\Delta, \delta^1, \dots, \delta^k)$. Из непрерывности f следует ее независимость от $Q^{(1)}$ и от производных $Q^{(1)}$.

СЛЕДСТВИЕ. *На решениях СУГД любая физическая величина совпадает с некоторой функцией, определенной только на фазовом пространстве.*

ЛЕММА 5. *Если $F^{ph}: Q \times P \rightarrow \mathbb{R}^1$ – физическая величина для СГД (H, Φ) , принадлежащей классу Дирака, то $\{F^{ph}, (\Phi_I^*)_i\}|_{\Gamma_{\Phi^*}} \equiv 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В канонических переменных

$$F^{ph}(q, p) = f_F^{ph}(\omega(q, p)) + \Omega g_F(\omega(q, p), Q(q, p), \Omega(q, p)),$$

$$(\Phi_I^*)_i(q, p) = \hat{\phi}_i(\omega(q, p), Q(q, p), \Omega(q, p)),$$

где $\hat{\phi}_i$ – линейная комбинация связей первого рода. Тогда

$$\{F^{ph}, (\Phi_I^*)_i\}|_{\Gamma_{\Phi^*}} = \{f_F^{ph}(\omega) + \Omega g_F(\omega, Q, \Omega), \hat{\phi}_i(\omega, Q, \Omega)\}|_{\Omega=0} = 0.$$

Из лемм 1 и 5 следует справедливость гипотезы Дирака для СГД из класса Дирака.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Dirac P. A. M. Lectures on Quantum Mechanics. New York: Belfer Graduate School of Science, 1964.
2. Альбеверио С., Смолянов О. Г. // Докл. РАН. 1997. Т. 355. № 1. С. 7–11.
3. Альбеверио С., Смолянов О. Г., Хренников А. Ю. // Докл. РАН. 2001. Т. 381. № 2. С. 1–5.
4. Гитман Д. М., Тютин И. В. Каноническое квантование полей со связями. М.: Наука, 1986.
5. Ли Э. Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972.