Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. П. Струнков, К теореме Туэ–Зигеля–Рота, *Матем. заметки*, 2002, том 71, выпуск 5, 797–800

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm655>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 10:36:42

К ТЕОРЕМЕ ТУЭ–ЗИГЕЛЯ–РОТА

С.П. Струнков

В 1955 году Рот доказал замечательную теорему о конечности числа целых рациональных решений $Q > 0$, P неравенства

$$\left| \xi - \frac{P}{Q} \right| < \frac{1}{Q^{2+\delta}} \quad (1)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-01-00929.

для любого вещественного алгебраического иррационального числа ξ и любого вещественного числа $\delta > 0$ [1], [2]. Этот результат, принесший ее автору Филдсовскую премию в 1958 году и называемый теперь теоремой Туэ–Зигеля–Рота, подвел итог многочисленным исследованиям, проводившимся на протяжении более чем ста лет в этом направлении Лиувиллем, Туэ, Зигелем, Гельфондом, Дайсоном и другими, усилия которых были направлены на поиски наиболее точного значения степени знаменателя в правой части неравенства (1), при котором верна сформулированная выше теорема. Информация о правой части неравенства (1) в теореме Туэ–Зигеля–Рота играет важную роль не только в теории алгебраических и трансцендентных чисел, но также при исследовании вопросов о разрешимости и числе решений многих диофантовых уравнений высших степеней. Во многих задачах интерес представляют не все решения рассматриваемых диофантовых уравнений и неравенств, а только обладающие дополнительными свойствами, поэтому актуальной является задача исследования решений P, Q неравенства (1), принадлежащих различным подмножествам двумерной целочисленной решетки. Выбор таких подмножеств в качестве области определения неравенства (1), сделанный в настоящей работе, подсказан возможностью применения вариантов неравенства (1) для решения вопросов теории конечных групп, часто называемых вопросами бернсайдовского типа, о том, в какой мере показатель или свойство конечной группы быть π -группой для заданного множества простых чисел π определяет ее в различных классах групп [3].

Пусть $\pi = \{p_1, \dots, p_n\}$ – некоторое конечное множество простых чисел, $S(\pi)$ – мультипликативная полугруппа, порожденная простыми числами из множества π , т.е. множество всех натуральных чисел вида $p_1^{k_1} \dots p_n^{k_n}$, где числа $k_1 \geq 0, \dots, k_n \geq 0$ и целые. Целое рациональное число будем называть здесь π -числом, если его абсолютная величина принадлежит множеству $S(\pi)$. Целью настоящей работы является доказательство следующего результата.

ТЕОРЕМА. Пусть π – некоторое конечное множество простых чисел, ξ – произвольное ненулевое вещественное алгебраическое число. Тогда для любого вещественного числа $\delta > 0$ может существовать не более чем конечное число пар целых π -чисел $Q > 0, P$ таких, что

$$0 < \left| \xi - \frac{P}{Q} \right| < \frac{1}{Q^\delta}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что теорема неверна для некоторого конечного множества π простых чисел, алгебраического числа ξ и некоторого вещественного $\delta > 0$, т.е. имеется бесконечно много таких различных троек чисел x, y, z с целыми π -числами x, y , для которых выполняются соотношения

$$0 < |\xi y - x| = z, \quad z < y^{1-\delta}. \quad (2)$$

Очевидно, можно считать, не теряя общности, что число ξ и все числа x, y положительны. Если числа x, y имеют общий делитель, то, сократив обе части равенства в (2) на наибольший общий делитель чисел x, y , получим тройку чисел x', y', z' со взаимно простыми целыми π -числами x', y' , удовлетворяющих соотношениям

$$0 < |\xi y' - x'| = z', \quad (3)$$

$$z' < (y')^{1-\delta}. \quad (3')$$

Так как $1 - \delta < 1$, то после такого сокращения только конечное число различных троек чисел x, y, z , удовлетворяющих (2), может дать одну и ту же тройку x', y', z' со взаимно простыми целыми π -числами x', y' , для которых выполняются соотношения (3), (3'). Это означает, что существует бесконечно много различных троек чисел x', y', z' со взаимно простыми целыми π -числами x', y' , удовлетворяющих соотношениям (3), (3'). Заметим, что число таких троек x', y', z' с одинаковыми числами x' или y' конечно.

Возьмем некоторое натуральное число m , удовлетворяющее неравенствам $m > 4/\delta$ и $\sqrt[m]{\xi} < 2$. Тогда взаимно простые π -числа x', y' могут быть представлены в виде

$$x' = p_{i_1}^{mk_1 + \alpha_1} \dots p_{i_r}^{mk_r + \alpha_r}, \quad y' = p_{j_1}^{ml_1 + \beta_1} \dots p_{j_s}^{ml_s + \beta_s},$$

$$0 \leq \alpha_i, \beta_j \leq m - 1, \quad i = 1, \dots, r, \quad j = 1, \dots, s,$$

с некоторыми целыми неотрицательными числами $k_1, \alpha_1, \dots, k_r, \alpha_r, l_1, \beta_1, \dots, l_s, \beta_s$ и непересекающимися подмножествами $\pi' = \{p_{i_1}, \dots, p_{i_r}\}, \pi'' = \{p_{j_1}, \dots, p_{j_s}\}$ множества простых чисел π . Простые числа, входящие в эти подмножества π', π'' , мы будем располагать в порядке возрастания в каждом из них. Далее мы будем рассматривать бесконечное множество только таких троек чисел x', y', z' , удовлетворяющих соотношениям (3), (3'), для которых эти подмножества π', π'' и упорядоченные наборы $r + s$ чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_s$, входящих в выражение степеней простых чисел $p_{i_1}, \dots, p_{i_r}, p_{j_1}, \dots, p_{j_s}$ соответственно в разложениях чисел x' и y' , одинаковы. Очевидно, что такое бесконечное множество троек чисел x', y', z' существует. При этом бесконечность множества таких троек эквивалентна бесконечности множеств различных упорядоченных наборов из r и s целых неотрицательных чисел $k_1, \dots, k_r$ и $l_1, \dots, l_s$, также участвующих в представлениях π -чисел x', y' в виде произведений степеней простых чисел $p_{i_1}, \dots, p_{i_r}$ и $p_{j_1}, \dots, p_{j_s}$ соответственно. Для всех таких троек соотношения (3), (3') можно записать в виде

$$\left| \left(m \sqrt{\frac{\xi}{\xi_1}} \right)^m - \left(\frac{P}{Q} \right)^m \right| = \frac{z'}{p_{j_1}^{ml_1} \dots p_{j_s}^{ml_s} p_{i_1}^{\alpha_1} \dots p_{i_r}^{\alpha_r}}, \quad (4)$$

$$0 < z' < p_{j_1}^{(1-\delta)(ml_1+\beta_1)} \dots p_{j_s}^{(1-\delta)(ml_s+\beta_s)}, \quad (4')$$

где

$$\xi_1 = \frac{p_{i_1}^{\alpha_1} \dots p_{i_r}^{\alpha_r}}{p_{j_1}^{\beta_1} \dots p_{j_s}^{\beta_s}}, \quad P = p_{i_1}^{k_1} \dots p_{i_r}^{k_r}, \quad Q = p_{j_1}^{l_1} \dots p_{j_s}^{l_s}.$$

Перепишем равенство (4) в виде

$$\left| m \sqrt{\frac{\xi}{\xi_1}} - \frac{P}{Q} \right| = \frac{z'}{p_{j_1}^{ml_1} \dots p_{j_s}^{ml_s} p_{i_1}^{\alpha_1} \dots p_{i_r}^{\alpha_r}} \times \left(\left(m \sqrt{\frac{\xi}{\xi_1}} \right)^{m-1} + \left(m \sqrt{\frac{\xi}{\xi_1}} \right)^{m-2} \frac{P}{Q} + \dots + \left(\frac{P}{Q} \right)^{m-1} \right)^{-1}.$$

Так как, очевидно,

$$p_{i_1}^{\alpha_1} \dots p_{i_r}^{\alpha_r} \left(\left(m \sqrt{\frac{\xi}{\xi_1}} \right)^{m-1} + \left(m \sqrt{\frac{\xi}{\xi_1}} \right)^{m-2} \frac{P}{Q} + \dots + \left(\frac{P}{Q} \right)^{m-1} \right) > \xi^{(m-1)/m} > \frac{\xi}{2},$$

то, учитывая неравенства $m > 4/\delta$ и (4'), получим систему неравенств

$$0 < \left| m \sqrt{\frac{\xi}{\xi_1}} - \frac{P}{Q} \right| < \frac{C}{Q^4},$$

в которых

$$C = \frac{2p_{j_1}^{(1-\delta)\beta_1} \dots p_{j_s}^{(1-\delta)\beta_s}}{\xi}.$$

Выше мы отмечали, что число наборов целых неотрицательных чисел $l_1, \dots, l_s$, участвующих в выражении рациональных чисел P/Q , бесконечно. Поэтому множество различных рациональных чисел P/Q , удовлетворяющих системе неравенств

$$0 < \left| m \sqrt{\frac{\xi}{\xi_1}} - \frac{P}{Q} \right| < \frac{1}{Q^3},$$

также бесконечно.

Однако число $m \sqrt{\xi/\xi_1}$ является алгебраическим. Если оно иррационально, то противоречие сделанному в начале доказательства теоремы предположению получается из цитированной выше

теоремы Туэ–Зигеля–Рота. Если это число рационально, то противоречие устанавливается непосредственно. Тем самым теорема доказана.

Примеры применений частного случая доказанной теоремы для некоторых классов конечных π -групп перестановок приведены в [3]. Ее использование в методе Туэ позволяет легко устанавливать конечность числа π -решений для любого конечного множества π простых чисел некоторых алгебраических диофантовых уравнений с двумя неизвестными, для которых стандартный метод Туэ (со степенью $2 + \delta$ в правой части (1)) не работает.

Автор пользуется случаем выразить здесь свою благодарность Институту математики в Обервольфахе за поддержку в работе по проекту RIP, благодаря которой написана эта статья.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Roth K. F. // *Mathematika*. 1955. V. 2. P. 1–20.
2. Касселс Дж. В. С. Введение в теорию диофантовых приближений. М.: ИЛ, 1961.
3. Струнков С. П. // *Докл. РАН*. 2000. Т. 373. № 5. С. 590–592.

Московский государственный инженерно-физический институт
(технический университет)

Поступило
17.10.2001