Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. В. Манько, Комплексный росток Маслова в случае вырожденной точки покоя гамильтониана, *Матем. заметки*, 2002, том 71, выпуск 6, 946–950

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm656>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 13:08:31

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

КОМПЛЕКСНЫЙ РОСТОК МАСЛОВА В СЛУЧАЕ ВЫРОЖДЕННОЙ ТОЧКИ ПОКОЯ ГАМИЛЬТониАНА

О. В. Манько

В книге [1] для нахождения асимптотического решения уравнения Шрёдингера при больших временах порядка $1/\sqrt{\hbar}$ рассматривалась стандартная теория комплексного роста для гамильтонианов с невырожденными точками покоя.

Рассмотрим задачу Коши для уравнения Шрёдингера:

$$i\varepsilon \frac{\partial \psi_\varepsilon^t(x)}{\partial t} = H\left(x, -i\varepsilon \frac{\partial}{\partial x}\right) \psi_\varepsilon^t(x), \quad (1)$$

где

$$H = -\sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + U(x),$$

$t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\psi^t \in L^2(\mathbb{R}^n)$, ψ^t дифференцируема по t как вектор L^2 в сильном смысле, $\psi^t \in D[H]$ [2]; U — гладкая функция, которая обращается в нуль на гладкой m -мерной поверхности $X(\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}^m$, а вне ее положительна. Гамильтониан достигает своего минимума на поверхности $X(\tau)$.

Начальное условие выберем в виде

$$\psi^0(x) = \frac{1}{\varepsilon^{(n/4 + (l-m)/8)}} \int_{\mathbb{R}^l} e^{(i/\sqrt{\varepsilon})(S^0(\alpha) + P^0(\alpha)(\bar{\tau} - \tau^0(\alpha)))} f^0\left(\alpha, \frac{\bar{\tau} - \tau^0(\alpha)}{\varepsilon^{1/4}}, \frac{x - X(\bar{\tau})}{\varepsilon^{1/2}}\right) d\alpha, \quad (2)$$

где $\alpha \in \mathbb{R}^l$, $S^0(\alpha)$ — вещественная функция, $(P^0(\alpha), \tau^0(\alpha))$ — l -мерное изотропное, гладкое многообразие в $2m$ -мерном фазовом пространстве, $\bar{\tau}$ — точка на поверхности $X(\tau)$, ближайшая к x , $f^0 \in S(\mathbb{R}^{n+m+l})$. Самосопряженность в существенном полуограниченного снизу оператора H на области определения $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ позволяет утверждать, что существует единственное решение задачи Коши (1). В [3] показано, что для того чтобы волновая функция не являлась экспоненциально малой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие лагранжевости:

$$\frac{\partial S^0}{\partial \alpha} = P^0 \frac{\partial \tau^0}{\partial \alpha}. \quad (3)$$

При преобразовании координат $\tau = \tau(\tau')$ функция ψ_0 сохраняет свой вид, если

$$P_l^0 \frac{\partial \tau^l}{\partial \tau^{i'}} = P_{i'}^0, \quad f'(\alpha, \beta, \xi) = \exp\left\{\frac{i}{2} P_l^0 \beta^j \beta^k \frac{\partial^2 \tau^l}{\partial \tau^{j0} \partial \tau^{k0}}\right\} f\left(\alpha, \beta^j \frac{\partial \tau^l}{\partial \tau^{j0}}, \xi\right),$$

где

$$\xi = \frac{x - X(\tau)}{\varepsilon^{1/2}}, \quad \beta = \frac{\bar{\tau} - \tau^0(\alpha)}{\varepsilon^{1/4}}.$$

Рассмотрим новые координаты $(\tau_1, \dots, \tau_m, y_1, \dots, y_{n-m})$, где τ — параметр на поверхности $X(\tau)$, совпадающий с $\bar{\tau}$. Матрицу преобразования

$$a_i^n = \begin{pmatrix} b_i^n \\ c_i^n \end{pmatrix},$$

где

$$b_i^k(\tau, y) = \frac{\partial \tau^k}{\partial x^i}, \quad c_i^j(\tau, y) = \frac{\partial y^j}{\partial x^i},$$

предполагаем невырожденной.

В этих координатах

$$U(\tau, y)|_{y=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right) \Big|_{y=0} = 0.$$

Предположим, что для вторых производных справедливо условие равномерной невырожденности: линейные собственные значения матрицы

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^s \partial y^l} \right) \Big|_{y_{s,l}=0} = \omega_{sl}$$

оцениваются снизу некоторой положительной постоянной.

После выбора новых переменных $\xi = y/\sqrt{\varepsilon}$, $t' = t\sqrt{\varepsilon}$ приходим к уравнению, которое можно интерпретировать, как уравнение типа Шрёдингера для квантовомеханической системы, являющейся квазиклассической по переменной τ и квантовой по переменной ξ . При этом аналогом постоянной Планка будет является величина $\sqrt{\varepsilon}$:

$$\begin{aligned} i\sqrt{\varepsilon} \frac{\partial \psi^{t'/\sqrt{\varepsilon}}(\tau, \xi)}{\partial t'} = & \sum_{i=1}^n \left(-\frac{1}{2} \varepsilon b_i^k b_i^j \frac{\partial^2}{\partial \tau^j \partial \tau^k} - \sqrt{\varepsilon} b_i^k c_i^l \frac{\partial^2}{\partial \tau^k \partial \xi^l} \right) \psi^{t'/\sqrt{\varepsilon}}(\tau, \xi) \\ & + \sum_{i=1}^n \left(-\frac{1}{2} c_i^s c_i^l \frac{\partial^2}{\partial \xi^s \partial \xi^l} + \frac{1}{2} \omega_{sl}^2(\beta) \xi^s \xi^l - \frac{1}{2} \sqrt{\varepsilon} G(\tau, \xi) + \dots \right) \psi^{t'/\sqrt{\varepsilon}}(\tau, \xi). \end{aligned} \quad (4)$$

Явный вид первой поправки:

$$\begin{aligned} G(\tau, \xi) = & -\sqrt{\varepsilon} \left(b_i^j \frac{\partial b_i^k}{\partial \tau^j} + c_i^l \frac{\partial b_i^k}{\partial y^l} \right) \frac{\partial}{\partial \tau^k} - \left(b_i^k \frac{\partial c_i^l}{\partial \tau^k} + c_i^s \frac{\partial c_i^l}{\partial y^s} \right) \frac{\partial}{\partial \xi^l} \\ & - \xi^s \left(2\varepsilon b_i^k \frac{\partial b_i^j}{\partial y^s} \frac{\partial^2}{\partial \tau^k \partial \tau^j} + 2c_i^l \frac{\partial c_i^m}{\partial y^s} \frac{\partial^2}{\partial \xi^l \partial \xi^m} \right) \\ & - \sqrt{\varepsilon} \xi^s \left(b_i^k \frac{\partial c_i^l}{\partial y^s} + c_i^l \frac{\partial b_i^k}{\partial y^s} \right) \frac{\partial^2}{\partial \tau^k \partial \xi^l} + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 U}{\partial y^l \partial y^s \partial y^m} \xi^l \xi^s \xi^m. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь

$$b_i^k \equiv b_i^k(\tau, 0), \quad c_i^l \equiv c_i^l(\tau, 0).$$

Будем искать асимптотическое решение задачи Коши в виде, аналогичном (2) при

$$f = \sum_{k=0}^N \varepsilon^{k/2} f_k.$$

Рассмотрим функцию

$$f_0^{t'} \left(\alpha, \frac{\bar{\tau} - \tau(\alpha)}{\varepsilon^{1/4}}, \frac{x - X(\tau)}{\varepsilon^{1/2}} \right) = \chi_0^{t'}(\beta) F_{u_1 \dots u_{n-m}}(P^{t'}, \xi, \tau^{t'}), \quad (6)$$

$$\chi_0^{t'}(\beta) = P_n^{t'}(\beta) e^{\frac{i}{2} \beta^j \alpha_{jk}^{t'} \beta^k}, \quad (7)$$

где $P_n^{t'}(\beta)$ – полином n -ой степени по β , а α^t является решением следующего уравнения Риккати:

$$\dot{\alpha}^{t'} + a_1 + \alpha^{t'} a_2 + (a_2)^T \alpha^{t'} + \alpha^{t'} a_3 \alpha^{t'} = 0. \quad (8)$$

Существование и невырожденность такого решения для теории комплексного роста при $\text{Im } \alpha^0 > 0$ доказывается в [1].

Здесь a_1, a_2, a_3 – следующие матрицы:

$$a_1 = \frac{\partial^2 \lambda_u}{\partial \tau \partial \tau}, \quad a_2 = \frac{\partial^2 \lambda_u}{\partial P \partial \tau}, \quad a_3 = \frac{\partial^2 \lambda_u}{\partial P \partial P}.$$

Величины λ_u являются собственными значениями оператора гамильтона H , соответствующими собственной функции (здесь и далее по s подразумевается суммирование)

$$\begin{aligned} F_{u_1 \dots u_{n-m}}(P^{t'}, \xi, \tau^{t'}) = \exp \left\{ -i \sum_j \frac{1}{A^s} b_j^k P_k c_j^s \xi^s \right\} \frac{1}{\sqrt{u_1!}} \dots \frac{1}{\sqrt{u_{n-m}!}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{u_1 + \dots + u_{n-m}} \\ \times \left(\sqrt{\frac{\omega_1}{\sqrt{A^1}}} \xi^1 - \sqrt{\frac{\sqrt{A^1}}{\omega_1}} \frac{\partial}{\partial \xi^1} \right)^{u_1} \dots \left(\sqrt{\frac{\omega_{n-m}}{\sqrt{A^{n-m}}}} \xi^{n-m} - \sqrt{\frac{\sqrt{A^{n-m}}}{\omega_{n-m}}} \frac{\partial}{\partial \xi^{n-m}} \right)^{u_{n-m}} \\ \times \exp \left\{ -\frac{\omega_s}{2\sqrt{A^s}} (\xi^s)^2 \right\}; \end{aligned} \quad (9)$$

при этом имеет место равенство

$$\lambda_u(\tau, P) = \omega_s \sqrt{A^s} \left(u + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \sum_i P_k P_j b_i^k b_i^j - \frac{1}{2A^s} \left(\sum_i b_i^k P_k c_i^s \right)^2.$$

Здесь

$$A^s \frac{\partial^2}{\partial \xi^s \partial \xi^s}, \quad \omega_s \xi^s \xi^s,$$

– приведенные к каноническому виду квадратичные формы

$$c_i^l c_i^m \frac{\partial^2}{\partial \xi^l \partial \xi^m}, \quad \omega_{lm}^2 \xi^l \xi^m.$$

При этом $\|\psi^0\|_{L^2} = O(1)$.

Рассмотрим задачу Коши для следующей системы Гамильтона с гамильтонианом λ_u :

$$-\dot{P}_j = \frac{\partial \lambda_u}{\partial \tau^j}, \quad \dot{\tau}^j = \frac{\partial \lambda_u}{\partial P_j}. \quad (10)$$

Непрерывность всех λ_u , а также тот факт, что частные производные λ_u по τ и P являются ограниченными по модулю, дает нам право сформулировать следующую лемму.

ЛЕММА 1 [4]. *Существует единственное глобальное решение задачи Коши (1).*

Рассмотрим функцию

$$S^{t'} = S^0 + \int_0^{t'} \left(P^{t''} \frac{\partial \tau^{t''}}{\partial t''} - \lambda_u(\tau, P) \right) dt''.$$

Положим

$$\begin{aligned} \psi_{as}^{t'/\sqrt{\varepsilon}}(x) = \frac{1}{\varepsilon^{(n/4+(l-m)/8)}} \int e^{(i/\sqrt{\varepsilon}) S^{t'}(\alpha)} e^{(i/\sqrt{\varepsilon}) P^{t'}(\alpha) (\bar{\tau} - \tau^0(\alpha))} \\ \times f^{t'} \left(\alpha, \frac{\bar{\tau} - \tau^{t'}(\alpha)}{\varepsilon^{1/4}}, \frac{x - X(\bar{\tau})}{\varepsilon^{1/2}} \right) d\alpha, \end{aligned} \quad (11)$$

$$f^{t'} \left(\frac{\bar{\tau} - \tau^{t'}(\alpha)}{\varepsilon^{1/4}}, \frac{x - X(\bar{\tau})}{\varepsilon^{1/2}} \right) = \chi^{t'}(\beta) F_s(P, \tau \xi), \quad (12)$$

а $\chi^{t'}(\beta)$ имеет вид (9) и удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} i \frac{\partial \chi^{t'}(\beta)}{\partial t'} = \left\{ \frac{1}{2} \beta^j \frac{\partial^2 \lambda_u}{\partial \tau^j \partial \tau^k} \beta^k \right\} \chi^{t'}(\beta) + \left\{ \frac{1}{2} \left(-i \frac{\partial}{\partial \beta^j} \right) \frac{\partial^2 \lambda_u}{\partial P_j \partial P_k} \left(-i \frac{\partial}{\partial \beta^k} \right) \right. \\ \left. + \beta^j \frac{\partial^2 \lambda_u}{\partial \tau^j \partial P_k} \left(-i \frac{\partial}{\partial \beta^k} \right) + j^{t'} \right\} \chi^{t'}(\beta), \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$j^{t'} = i \left(F_u, \frac{dF_u}{dt} \right) - i \left(b_i^j \frac{\partial b_i^k}{\partial \tau^j} + c_i^l \frac{\partial b_i^k}{\partial y^l} \right) P_k + i P_k \left(b_i^k \frac{\partial c_i^s}{\partial y^s} + c_i^s \frac{\partial b_i^k}{\partial y^s} \right).$$

ЛЕММА 2 [3]. Квадрат нормы функции (8) имеет следующий предел:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\psi_{as}^{t'/\sqrt{\varepsilon}}\|^2 = \int d\alpha d\xi d\gamma f^*(\alpha, \xi, \beta) \exp \left\{ i \sum_{l=1}^m \gamma_l \left(\frac{\partial P}{\partial \tau^l} \xi - \frac{\partial Q}{\partial \tau^l} \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \right\} f(\alpha, \xi, \beta).$$

Основным результатом работы является следующая

ТЕОРЕМА. Для любого $T > 0$ найдется такая не зависящая от t постоянная A , что для любого наперед выбранного $t' \in [0, T]$ имеет место оценка

$$\|\psi^{t'/\sqrt{\varepsilon}} - \psi_{as}^{t'/\sqrt{\varepsilon}}\| \leq \varepsilon^{1/4} B.$$

Для доказательства проверяется, что справедливо следующее неравенство:

$$\left\| i\varepsilon \frac{\partial \psi_{as}^{t'/\sqrt{\varepsilon}}}{\partial t'} - \hat{H} \psi_{as}^{t'/\sqrt{\varepsilon}} \right\| \leq B_1 \varepsilon^{3/2}$$

для некоторой не зависящей от t' постоянной B_1 . После применяются результаты [5]: из равенства

$$\psi_{as}^{t'/\sqrt{\varepsilon}} - \psi^{t'/\sqrt{\varepsilon}} = \int_0^{t'} \frac{dt''}{i\sqrt{\varepsilon}} \exp \left\{ -i \frac{H}{\varepsilon^{3/2}} (t' - t'') \right\} \left(i\sqrt{\varepsilon} \frac{\partial \psi_{as}^{t''/\sqrt{\varepsilon}}}{\partial t''} - \frac{\hat{H}}{\varepsilon} \psi_{as}^{t''/\sqrt{\varepsilon}} \right)$$

следует, что выполнена оценка

$$\|\psi^{t'/\sqrt{\varepsilon}} - \psi_{as}^{t'/\sqrt{\varepsilon}}\| \leq t' B_1 \varepsilon^{1/4}.$$

Проиллюстрируем схему доказательства на примере, когда $U(y, \tau) = \omega^2(\tau)y^2/2$. После замены $\xi = y\sqrt{\varepsilon}$, $t' = t\sqrt{\varepsilon}$ приходим к уравнению

$$i\sqrt{\varepsilon} \frac{\partial \chi}{\partial t'} = \left[-\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\omega^2(\tau)\xi^2}{2} - \frac{\varepsilon}{2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right] \chi.$$

Далее используется операторная теория комплексного роста [3].

ПРИМЕР. Рассмотрим квазиклассический спектр системы с гамильтонианом

$$H = -\frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + U(x, y),$$

где потенциал $U(x_1, x_2)$ достигает своего минимального значения на некоторой одномерной кривой.

Тогда если τ^0 – точка минимума $\omega\sqrt{A}$ (в одномерном случае ω_s и A^s – просто функции), то $\tau^t = \tau^0$, $P^\tau = 0$ – решение системы (10). В этом случае формула (11) для асимптотической волновой функции может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} \psi_{as}^{t'/\sqrt{\varepsilon}}(x_1, x_2) &= \frac{1}{\varepsilon^{3/8}} F_u(\tau^0, 0) \chi(\beta) \exp \left\{ -\frac{i}{\sqrt{\varepsilon}} \lambda_u t' - i \lambda' t' \right\}, \\ \chi(\beta) &= C \exp \left(-\frac{y^2}{2} \right) H_n(y), \quad y = \sqrt[4]{\frac{a_1}{a_3}} \beta. \end{aligned} \quad (14)$$

Параметр λ_u интерпретируется как классическая энергия:

$$\lambda_u = E_{cl} = \omega(\tau^0) \sqrt{A} \left(u + \frac{1}{2} \right),$$

а λ' – как квантовая поправка к энергии:

$$\lambda' = \sqrt{a_1} \sqrt{[\omega(\tau^0) \sqrt{A}]''} \left(u + \frac{1}{2} \right) \left(m + \frac{1}{2} \right) + \gamma^0.$$

Из [5] вытекает, что асимптотический спектр имеет вид

$$E_{sm} = \varepsilon \lambda_u + \varepsilon^{3/2} \lambda' + O(\varepsilon^2).$$

Этот результат показывает, что наличие вырожденной точки покоя приводит к расщеплению уровней энергии порядка $\varepsilon^{3/2}$.

Автор выражает глубокую и искреннюю благодарность О. Ю. Шведову за постановку задачи, многочисленные советы и замечания, без которых написание этой работы не стало бы возможным, а также А. М. Чеботареву за ценные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Маслов В.П. Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях. М.: Наука, 1977.
2. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 1, 2. М.: Мир, 1977.
3. Маслов В.П., Шведов О.Ю. Метод комплексного роста в задаче многих частиц и квантовой теории поля. М.: УРСС, 2000.
4. Эльсгольц П.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1956.
5. Маслов В.П. Теория возмущений и асимптотические методы. М.: МГУ, 1965.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило
09.11.2001