Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Дубинин, О принципах мажорации для мероморфных функций, *Матем. заметки*, 2008, том 84, выпуск 6, 803–808

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm6565>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 17:20:49

О принципах мажорации для мероморфных функций

В. Н. Дубинин

Рассматриваются дополнения к принципу Линделёфа о поведении функции Грина и принципу Неванлинны о поведении гармонической меры при мероморфных отображениях. Эти дополнения восходят к работам И. П. Митюка об изменении внутреннего радиуса области при отображении регулярными функциями.

Библиография: 11 названий.

*Моему учителю
Игорю Петровичу Митюку
посвящается*

1. Введение и формулировки результатов. Функцию Грина $g_D(z, \zeta)$ области D называют *классической*, если она обращается в нуль на границе D . В этом случае доопределим функцию $g_D(z, \zeta)$ нулем в дополнении $\mathbb{C}_z \setminus D$. Следующее утверждение принято называть *принципом Линделёфа* [1]. Пусть области D и G расширенной комплексной плоскости имеют классические функции Грина, и пусть функция $f: D \rightarrow G$ мероморфна в D . Тогда для любой фиксированной конечной точки w_0 , принадлежащей G , справедливо неравенство

$$g_G(f(z), w_0) \geq \sum_{k \geq 0} g_D(z, z_k), \quad z \in D, \quad (1)$$

где $z_0, z_1, \dots, z_k, \dots$ — нули функции $f - w_0$, причем каждый из них учитывается столько раз, какова его кратность. Равенство в (1) в какой-либо точке $z \in D$ влечет за собой равенство в (1) во всей области D . Даже ослабленный вариант этого принципа

$$g_G(f(z), w_0) \geq g_D(z, z_0)$$

является существенным обобщением леммы Шварца и имеет многочисленные приложения в геометрической теории функций (см., например, [1], [2]). Распространение принципа Линделёфа на случай функций Робена вместо функций Грина дано в недавней работе [3]. Обозначим через $r(D, \zeta)$ внутренний радиус области D относительно точки $\zeta \in D$, определяемый соотношением

$$g_D(z, \zeta) = -\log |z - \zeta| + \log r(D, \zeta) + o(1), \quad z \rightarrow \zeta. \quad (2)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-00028) и ДВО РАН (грант № 06-III-A-01-013).

В работе [4] Митюк заметил, что из неравенства (1) вытекает неравенство

$$r(G, w_0) \geq |a_p| r^p(D, z_0) \exp \sum_{k \geq 1} g_D(z_0, z_k), \quad (3)$$

где $f(z) = w_0 + a_p(z - z_0)^p + \dots$ – регулярная функция в области D . Более того, Митюк показал эффективное применение последнего неравенства в сочетании с методами симметризации [4]–[7]. В пособии [6] впервые указано на необходимость изучения обратных неравенств. Именно, следуя [6], рассмотрим функцию $f(z) = w_0 + a_p(z - z_0)^p + \dots$, регулярную в области D , и пусть A – множество предельных точек последовательностей $\{f(z'_\nu)\}$, когда $z'_\nu \in D$, $z'_\nu \rightarrow \partial D$, $\nu \rightarrow \infty$. Фиксируем конечную точку $w_0 \notin A$ и обозначим через G связную компоненту дополнения множества A , содержащую точку w_0 . Тогда

$$r(G, w_0) \leq |a_p| r^p(D, z_0) \exp \sum_{k \geq 1} g_D(z_0, z_k), \quad (4)$$

причем равенство в (4) имеет место в том и только том случае, когда $G = f(D)$ и функция f производит полное n -кратное накрытие области G областью D (здесь n – суммарная кратность нулей функции $f - w_0$). Последнее означает, что при стремлении точки z к границе области D все предельные значения функции $f(z)$ принадлежат границе G и каждой точке $w \in G$ соответствует ровно n прообразов в области D (с учетом кратности) [6; с. 22]. Сказанное выше можно перефразировать следующим образом: если $f(\partial D) \subset \overline{\mathbb{C}_w} \setminus G$, то справедливо неравенство (4). Заметим, что неравенство (3) выполняется при условии $f(D) \subset G$. Однако для неоднолистной функции f противоположного включения $f(D) \supset G$ недостаточно для выполнения неравенства (4), как показывает пример функции $f(z) = z^2$ и областей $D = \mathbb{C}_z \setminus \{z = x + iy : -\infty \leq x \leq -1, y = 0\}$ и $G = \{w : |w| < R\}$ при любом $R > 16$ ($z_0 = w_0 = 0$). Следующее утверждение содержит неравенство (4) как следствие при $z \rightarrow z_0$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть области D и G имеют классические функции Грина, $D \subset \overline{\mathbb{C}_z}$, $G \subset \overline{\mathbb{C}_w}$, и пусть w_0 – фиксированная точка области G . Предположим, что функция f является мероморфной в области D , принимает по крайней мере один раз значение w_0 в D и удовлетворяет условию $f(\partial D) \subset \overline{\mathbb{C}_w} \setminus G$ (т.е. при стремлении точки z к границе области D все предельные значения функции $f(z)$ лежат в дополнении G). Тогда для любой точки $z \in D$ справедливо неравенство

$$g_G(f(z), w_0) \leq \sum_{k=0}^m g_D(z, z_k), \quad (5)$$

где $z_0, \dots, z_m$ – нули функции $f - w_0$ в случае $w_0 \neq \infty$ и нули функции $1/f$ при $w_0 = \infty$, причем каждый нуль учитывается столько раз, какова его кратность. Равенство в (5) в какой-нибудь точке $z \in D$ влечет за собой равенство в (5) во всей области D и выполняется тогда и только тогда, когда $G = f(D)$ и функция f осуществляет полное $(m+1)$ -кратное накрытие области G областью D .

Неравенство (5) впервые встречается в работе Митюка [8] при несколько иных ограничениях на функцию f . Митюк рассматривал (5) как вспомогательное неравенство для иного, чем в [6], варианта доказательства оценки (4), дополняющей

его ранний результат (3). Вместе с тем, теорема 1 является важным дополнением к принципу Линделёфа и, как выяснилось много лет спустя, она содержит, в частности, многие классические и современные неравенства для полиномов и рациональных функций [9]. Отметим, что из неравенства (5) вытекает следующее утверждение (ср. следствие 2 работы [9]).

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть в условиях теоремы 1 область D имеет на своей границе открытую аналитическую дугу Жордана γ , $\infty \notin \gamma$, ни одна точка которой не является предельной для граничных точек, не принадлежащих γ , а область G имеет на своей границе такую же дугу Γ . Предположим, что функция f отображает дугу γ на некоторую дугу $f(\gamma) \subset \Gamma$ так, что положительной ориентации γ соответствует положительная ориентация на Γ .¹ Тогда для любой точки $z \in \gamma$ справедливо неравенство

$$|f'(z)| \frac{\partial g_G(f(z), w_0)}{\partial n} \leq \sum_{k=0}^m \frac{\partial g_D(z, z_k)}{\partial n}, \quad (6)$$

где $\partial/\partial n$ означает дифференцирование вдоль внутренней нормали к соответствующей граничной дуге. Равенство в какой-либо точке $z \in \gamma$ достигается лишь в случае, указанном в теореме 1.

Интегрируя последнее соотношение, приходим к дополнению принципа мажорации Неванлинны о поведении гармонической меры [1]. Ранее такого рода дополнения рассматривались Лукашовым [10]. В данной заметке доказывается более общий, чем в [10], результат, причем с утверждением о знаке равенства. Обозначим через $\omega(z, \alpha, D)$ гармоническую меру множества α относительно области D в точке z [1], [2].

ТЕОРЕМА 2. Пусть области $D \subset \overline{\mathbb{C}}_z$ и $G \subset \overline{\mathbb{C}}_w$ ограничены конечным числом жордановых кривых, w_0 – точка области G . Пусть функция f мероморфна в D , принимает по крайней мере один раз значение w_0 в D и удовлетворяет условию $f(\partial D) \subset \overline{\mathbb{C}}_w \setminus G$. Предположим, что множества $\gamma \in \partial D$ и $f(\gamma) \subset \partial G$ состоят из конечного числа открытых дуг, причем положительной ориентации дуг из γ соответствует при отображении f положительная ориентация на ∂G . Тогда

$$\omega(w_0, f(\gamma), G) \leq \sum_{k=0}^m \omega(z_k, \gamma, D), \quad (7)$$

где $z_0, \dots, z_m$ – нули функции $f - w_0$ в случае $w_0 \neq \infty$ и нули функции $1/f$ при $w_0 = \infty$, причем каждый нуль учитывается столько раз, какова его кратность. Равенство в (7) имеет место в том и только том случае, когда функция f осуществляет полное $(m+1)$ -кратное накрытие области G областью D , $G = f(D)$, и отображение $f: \gamma \rightarrow f(\gamma)$ является взаимно однозначным соответствием.

¹Здесь дуги γ и Γ являются граничными кривыми, при обходе которых соответствующая область остается слева, при этом граничные точки считаются различными, если они являются носителями различных достижимых граничных точек, а предельная точка понимается в соответствующей топологии.

2. Доказательства.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. В условиях теоремы 1 функция f принимает значение $w_0 \in G$ лишь в конечном числе точек $z_0, z_1, \dots, z_m$ области D . В противном случае существует последовательность точек $z'_\nu \in D$, $z'_\nu \rightarrow \partial D$, $\nu \rightarrow \infty$, такая, что $f(z'_\nu) = w_0$, что противоречит условию $f(\partial D) \subset \overline{\mathbb{C}_w} \setminus G$. Привлекая дробно-линейные отображения, можно считать, что все точки $z_0, z_1, \dots, z_m$ и w_0 конечные. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$h(z) := g_G(f(z), w_0) - \sum_{k=0}^m g_D(z, z_k), \quad z \in D.$$

Так как функция $g_G(w, w_0)$ – субгармоническая в $\overline{\mathbb{C}_w} \setminus w_0$, то суперпозиция $g_G(f(z), w_0)$ – субгармоническая в области $D \setminus \bigcup_{k=0}^m \{z_k\}$ и, следовательно, функция $h(z)$ – также субгармоническая в этой области. Пусть теперь z_k – нуль функции $f - w_0$ кратности n_k , $0 \leq k \leq m$. В окрестности точки z_k имеем

$$g_G(f(z), w_0) = -\log |f(z) - w_0| + h_1 = -n_k \log |z - z_k| + h_2,$$

$$\sum_{k=0}^m g_D(z, z_k) = -n_k \log |z - z_k| + h_3,$$

где h_j , $j = 1, 2, 3$, – гармонические функции. Таким образом, особенности сокращаются и функция $h(z)$ субгармоническая во всей области D . Из условия теоремы для любой граничной точки $\zeta \in \partial D$

$$\overline{\lim}_{z \rightarrow \zeta} h(z) = 0.$$

По принципу максимума

$$h(z) \leq 0 \quad \text{на } D,$$

что равносильно неравенству (5), причем равенство в одной точке влечет за собой равенство во всей области D .

Покажем, что в случае равенства в (5) выполняется $G = f(D)$ и функция f осуществляет полное $(m+1)$ -кратное накрытие области G областью D . Ввиду свойств аналитической функции и условия $f(\partial D) \subset \overline{\mathbb{C}_w} \setminus G$ каждая точка w области G имеет некоторую окрестность U_w , обладающую следующим свойством: число прообразов $f^{-1}(w')$ одно и то же для любой точки $w' \in U_w$ (возможно, нулевое). Заметим, что точка w_0 обладает окрестностью, для которой это число равно $m+1$. Поскольку любую другую точку области G можно соединить с w_0 кривой в G и покрыть эту кривую конечным числом указанных окрестностей, каждой точке G соответствует ровно $m+1$ прообразов. В частности, $f(D) \supset G$. Если теперь в (5) имеет место равенство для любой точки $z \in D$, то необходимо $f(D) \subset G$ и, следовательно, $f(D) = G$. Вновь учитывая условие $f(\partial D) \subset \overline{\mathbb{C}_w} \setminus G$, заключаем, что $f(\partial D) \subset \partial G$. Наоборот, пусть $G = f(D)$ и функция f осуществляет полное $(m+1)$ -кратное накрытие области G областью D . Тогда функция h – гармоническая в D и на границе D обращается в нуль. Следовательно, $h \equiv 0$ в D , что равносильно равенству в (5). Теорема 1 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 1. В условиях следствия 1 функция f продолжима на дугу γ так, что производная $f'(z)$ имеет смысл при $z \in \gamma$ (см., например, [6; гл. VI, п. 16]). Далее, в достаточно малой полукрестности точки $z \in \gamma$ выполняется $h(z) \leq 0$, а на соответствующем участке γ имеем $h(z) = 0$. Следовательно, $\partial h / \partial n \leq 0$ в указанной точке. Учитывая сохранение положительной ориентации при отображении f , получаем неравенство (6). Если теперь в некоторой $z \in \gamma$ имеет место равенство в (6), то, во-первых, $f'(z) \neq 0$, так как в противном случае приходим к противоречию лемме Хопфа для слагаемых в правой части (6) [11]. При $f'(z) \neq 0$ равенство в (6) равносильно равенству $\partial h / \partial n = 0$, что вновь по лемме Хопфа дает $h \equiv 0$ в D . Отсюда выполняются условия равенства в теореме 1. Следствие 1 доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Так как гармоническая мера является конформным инвариантом, то при доказательстве теоремы 2 можно считать, что области D и G ограничены конечным числом аналитических жордановых кривых. Из неравенства (6) следует

$$\begin{aligned} \omega(w_0, f(\gamma), G) &= \frac{1}{2\pi} \int_{f(\gamma)} \frac{\partial g_G(w, w_0)}{\partial n} ds \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{\partial g_G(f(z), w_0)}{\partial n} |f'(z)| ds \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \sum_{k=0}^m \frac{\partial g_D(z, z_k)}{\partial n} ds = \sum_{k=0}^m \omega(z_k, \gamma, D). \end{aligned}$$

Итоговое неравенство совпадает с (7). Если теперь в (7) имеет место знак равенства, то равенство выполняется во всех промежуточных соотношениях. В частности, ввиду непрерывности подынтегральных функций имеем равенство в (6) и, следовательно, $G = f(D)$, а функция f осуществляет полное $(m+1)$ -кратное накрытие области G областью D . Далее, если предположить, что две различные точки множества γ переходят при отображении f в одну точку на $f(\gamma)$, то существуют две открытые дуги на γ , переходящие в одну и ту же дугу на $f(\gamma)$, что при интегрировании положительной функции приводит к строгому неравенству в (7). Наоборот, пусть функция f осуществляет полное $(m+1)$ -кратное накрытие области G областью D , $G = f(D)$, и отображение $f: \gamma \rightarrow f(\gamma)$ является взаимно однозначным соответствием. Тогда неравенство (6) и выписанные выше неравенства для интегралов превращаются в равенства. Это завершает доказательство теоремы 2.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] С. Стоилов, *Теория функций комплексного переменного*, т. 2, ИЛ, М., 1962.
- [2] Г. М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного*, Наука, М., 1966.
- [3] V. N. Dubinin, M. Vuorinen, "Robin functions and distortion theorems for regular mappings", Preprint 454, *Reports in Mathematics*, Univ. of Helsinki, Helsinki, 2007.
- [4] И. П. Митюк, "Принцип симметризации для многосвязных областей", *Докл. АН СССР*, **157:2** (1964), 268–270.
- [5] И. П. Митюк, "Принцип симметризации для многосвязных областей и некоторые его применения", *Укр. матем. журн.*, **17:4** (1965), 46–54.
- [6] И. П. Митюк, *Симметризационные методы и их применение в геометрической теории функций. Введение в симметризационные методы*, Кубанский гос. ун-т, Краснодар, 1980.

- [7] И. П. Митюк, *Применение симметризационных методов в геометрической теории функций*, Кубанский гос. ун-т, Краснодар, 1985.
- [8] И. П. Митюк, “Оценки внутреннего радиуса (емкости) некоторой области (конденсатора)”, *Изв. Северо-Кавказ. научн. центра высш. шк. естеств. наук.*, 1983, № 3, 36–38.
- [9] В. Н. Дубинин, С. И. Калмыков, “Принцип мажорации для мероморфных функций”, *Матем. сб.*, **198**:12 (2007), 37–46.
- [10] А. Л. Лукашов, “Дополнения к принципу гармонической меры Р. Неванлинны”, *Матем. заметки*, **84**:4 (2008), 632–633.
- [11] М. Н. Protter, Н. F. Weinberger, *Maximum Principles in Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1984.

В. Н. Дубинин

Институт прикладной математики ДВО РАН

E-mail: dubinin@iam.dvo.ru

Поступило

14.03.2008