Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Б. Шахмуров, Вложения и сепарабельные дифференциальные операторы в пространствах типа Соболева–Лионса, *Матем. заметки*, 2008, том 84, выпуск 6, 907–926

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm6567>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 12:57:02

Вложения и сепарабельные дифференциальные операторы в пространствах типа Соболева–Лионса

В. Б. Шахмуров

Изучаются теоремы вложения в анизотропные пространства типа Бесселя–Лионса $H_{p,\gamma}^l(\Omega; E_0, E)$, где E_0 и E – банаховы пространства. Найдены максимально регулярные пространства E_α , для которых операторы смешанного дифференцирования D^α из $H_{p,\gamma}^l(\Omega; E_0, E)$ в $L_{p,\gamma}(\Omega; E_\alpha)$ ограничены. Пространства E_α являются интерполяционными пространствами между E_0 и E и зависят от $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ и $l = (l_1, l_2, \dots, l_n)$. Полученные результаты применяются для доказательства сепарабельности анизотропных дифференциально-операторных уравнений с зависимыми коэффициентами.

Библиография: 43 названия.

1. Введение. Теоремы вложения в функциональные пространства рассматривались в работах [1]–[3]. Подробное введение в теорию вложений в функциональные пространства и исторические ссылки содержатся в книге [3]. Теоремы вложения в пространства вектор-функций были исследованы в работах [4]–[14]. Пространство типа Соболева–Лионса $W_{p,\gamma}^l(\Omega; E_0, E)$ возникает при изучении дифференциально-операторных уравнений (ДОУ); такое пространство состоит из функций $u \in L_{p,\gamma}(\Omega; E_0)$, обладающих обобщенными производными $D_k^{l_k} u \in L_{p,\gamma}(\Omega; E)$, и снабжено ассоциированной нормой. Здесь $l = (l_1, l_2, \dots, l_n)$, а E_0 и E – банаховы пространства, причем E_0 непрерывно и плотно вложено в E . Пространства Соболева–Лионса играют чрезвычайно важную роль в теории ДОУ. В этой связи оказывается весьма полезным определить максимально регулярный промежуточный класс E_α между E_0 и E , для которого оператор смешанного дифференцирования D^α из $W_{p,\gamma}^l(\Omega; E_0, E)$ в $L_{p,\gamma}(\Omega; E_\alpha)$ ограничен. Лионс и Питре показали [15], что если

$$u \in L_2(0, T; H_0), \quad u^{(m)} \in L_2(0, T; H),$$

то

$$u^{(i)} \in L_2(0, T; [H, H_0]_{i/m}), \quad i = 1, 2, \dots, m-1,$$

где H_0 и H – гильбертовы пространства, H_0 непрерывно и плотно вложено в H и $[H_0, H]_\theta$ – интерполяционное пространство между H_0 и H для $0 \leq \theta \leq 1$. В работах [7]–[13] подобный вопрос исследовался для анизотропных пространств Соболева $W_p^l(\Omega; H_0, H)$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Краевые задачи для ДОУ в пространствах функций

Работа выполнена при поддержке гранта UDP-748 от 11.05.2006 Оканского университета.

со значениями в гильбертовом пространстве H интенсивно исследовались многими авторами (см. [1], [5]–[14] [16]–[25] и имеющиеся в этих работах ссылки). Краевые задачи для ДОУ в пространствах функций, принимающих значения в банаховом пространстве, рассматривались в [5], [13], [17], [26]–[28]. В этой статье мы вводим пространства $H_{p,\gamma}^l(\Omega; E_0, E)$ функций со значениями в банаховом пространстве типа пространств Бесселя–Лионса и определяем максимально регулярный класс E_α между E_0 и E , для которого соответствующие дифференциальные операторы D^α из $W_{p,\gamma}^l(\Omega; E_0, E)$ в $L_{q,\gamma}(\Omega; E_\alpha)$ непрерывны. С помощью полученных результатов мы исследуем максимальную регулярность квазиэллиптических операторных уравнений в частных производных с переменными коэффициентами в пространствах $L_{p,\gamma}$ функций со значениями в банаховом пространстве.

Первый пункт статьи содержит введение. В п. 2 вводятся используемые определения и обозначения. В п. 3 рассматриваются весовые пространства $H_{p,\gamma}^l(\Omega; E(A), E)$ типа Бесселя–Лионса, где A – положительный оператор в E и $E(A)$ – область определения A с нормой графика; доказана ограниченность операторов $u \rightarrow D^\alpha u$ из $H_{p,\gamma}^l(\Omega; E(A), E)$ в $L_{q,\gamma}(\Omega; E(A^{1-\kappa}))$. В п. 4 полученные теоремы вложения применяются к конкретным пространствам вектор-функций. В п. 5 рассматривается анизотропное ДОУ с переменными коэффициентами. Это ДОУ может содержать неограниченные операторы в банаховом пространстве E и обладает, вообще говоря, различными производными относительно разных переменных; кроме того, главная часть уравнения содержит зависимые коэффициенты. С помощью этих теорем вложения доказана сепарабельность подобных задач в $L_{p,\gamma}$.

2. Обозначения и определения. Мы обозначаем множество вещественных чисел через $\mathbb{R}$ и множество комплексных чисел – через $\mathbb{C}$. Пусть E_1 и E_2 – банаховы пространства. Через $L(E_1, E_2)$ мы обозначаем пространство ограниченных линейных операторов из E_1 в E_2 . Для $E_1 = E_2 = E$ мы пишем $L(E)$ вместо $L(E, E)$. Тожественный оператор в E обозначается символом I . Для скаляра ξ мы иногда пишем $A + \xi$ или A_ξ вместо $A + \xi I$; через $(A + \xi I)^{-1}$ мы обозначаем обратный оператор к $A + \xi I$, т.е. резольвенту оператора A .

Пусть

$$S_\varphi = \{\xi : \xi \in \mathbb{C}, |\arg \xi| \leq \varphi\} \cup \{0\}, \quad 0 \leq \varphi < \pi.$$

Линейный оператор A в банаховом пространстве E называется *положительным* [3; § 1.15.1], если его область определения $D(A)$ плотна в E и

$$\|(A + \xi I)^{-1}\|_{L(E)} \leq M(1 + |\xi|)^{-1}$$

для $\xi \in S_\varphi$, где M – положительная константа, не зависящая от ξ .

Мы полагаем

$$E(A^\theta) = \{u : u \in D(A^\theta), \|u\|_{E(A^\theta)} = \|A^\theta u\|_E + \|u\| < \infty, -\infty < \theta < \infty\}.$$

Оператор $A(x)$ называется *равномерно φ -положительным* относительно x в E , если $D(A(x))$ не зависит от x , $D(A(x))$ плотно в E и

$$\|(A(x) + \xi I)^{-1}\| \leq \frac{M}{1 + |\xi|}$$

для всех $\xi \in S(\varphi)$ и $\varphi \in [0, \pi)$, где M – положительная константа, не зависящая от ξ и x .

Пусть $\gamma = \gamma(x)$ – положительная измеримая вещественнозначная функция на $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Символом $L_{p,\gamma}(\Omega; E)$ обозначается пространство всех сильно измеримых E -значных функций на измеримом подмножестве $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с нормой

$$\|u\|_{L_{p,\gamma}} = \|u\|_{L_{p,\gamma}(\Omega; E)} = \left(\int_{\Omega} \|u\|_E^p \gamma(x) dx \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

Для $\gamma(x) \equiv 1$ пространство $L_{p,\gamma}(\Omega; E)$ обозначается через $L_p(\Omega; E)$.

Весовая функция γ удовлетворяет условию A_p [29], или $\gamma \in A_p$, где $1 < p < \infty$, если существует такая константа C , что

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \gamma(x) dx \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \gamma^{-1/(p-1)}(x) dx \right)^{p-1} \leq C$$

для всех компактов $Q \subset \mathbb{R}^n$.

Через $S = S(\mathbb{R}^n; E)$ мы обозначаем пространство Шварца быстро убывающих гладких E -значных функций. Для $E = \mathbb{C}$ мы обозначаем это пространство символом $S = S(\mathbb{R}^n)$. Через $S'(E) = S'(\mathbb{R}^n; E)$ обозначается пространство линейных непрерывных отображений из S в E , которое называется *пространством Шварца E -значных распределений*. Для любого $r = (r_1, r_2, \dots, r_n)$, где $r_i \in [0, \infty)$, функция $(i\xi)^r$ определяется формулой

$$(i\xi)^r = \begin{cases} (i\xi_1)^{r_1} \cdots (i\xi_n)^{r_n}, & \text{если } \xi_1 \xi_2 \cdots \xi_n \neq 0; \\ 0, & \text{если } \xi_1 \xi_2 \cdots \xi_n = 0, \end{cases}$$

где

$$(i\xi_k)^{r_k} = \exp \left[r_k \left(\ln |\xi_k| + i\pi \operatorname{sgn} \frac{\xi_k}{2} \right) \right], \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Производные $D^r u$ E -значной функции u по Лиувиллю определяются так же, как в случае скалярных функций [15] (см., например, [30]).

Пусть E_0 и E – банаховы пространства. Предположим, что E_0 непрерывно и плотно вложено в E и $l = (l_1, l_2, \dots, l_n)$, где $l_i \in (0, \infty)$ для $i = 1, 2, \dots, n$. Мы будем рассматривать E -значные весовые пространства

$$H_{p,\gamma}^l(\mathbb{R}^n; E) = \{u : u \in S'(\mathbb{R}^n; E), F^{-1}(1 + |x_k|^{l_k})Fu \in L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^n; E), \|u\|_{H_{p,\gamma}^l(\mathbb{R}^n; E)} < \infty\},$$

где

$$\|u\|_{H_{p,\gamma}^l(\mathbb{R}^n; E)} = \|u\|_{L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^n; E)} + \sum_{k=1}^n \|F^{-1}(1 + |x_k|^{l_k})Fu\|_{L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^n; E)},$$

и

$$H_{p,\gamma}^l(\mathbb{R}^n; E_0, E) = H_{p,\gamma}^l(\mathbb{R}^n; E) \cap L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^n; E_0),$$

где

$$\|u\|_{H_{p,\gamma}^l(\mathbb{R}^n; E_0, E)} = \|u\|_{L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^n; E_0)} + \|u\|_{H_{p,\gamma}^l(\mathbb{R}^n; E)} < \infty,$$

$p \in (1, \infty)$.

Пусть Ω – область в $\mathbb{R}^n$ и $H_{p,\gamma}^l(\Omega; E_0, E)$ – пространство сужений на Ω всех функций из $H_{p,\gamma}^l(\mathbb{R}^n; E_0, E)$ с нормой, определенной правилом

$$\|u\|_{H_{p,\gamma}^l(\Omega; E_0, E)} = \inf_{g \in H_{p,\gamma}^l(\mathbb{R}^n; E_0, E), g|_{\Omega} = u} \|g\|_{H_{p,\gamma}^l(\mathbb{R}^n; E_0, E)}.$$

Пусть $l = (l_1, l_2, \dots, l_n)$, где l_i для $i = 1, 2, \dots, n$ – положительные целые числа, и пусть $D_k^{l_k} = \partial^{l_k} / \partial x_k^{l_k}$ для $k = 1, 2, \dots, n$. Мы будем рассматривать E -значное анизотропное весовое пространство $W_{p,\gamma}^l(\Omega; E_0, E)$, которое состоит из функций $u \in L_{p,\gamma}(\Omega; E_0)$, обладающих обобщенными производными $D_k^{l_k} u \in L_{p,\gamma}(\Omega; E)$, с нормой

$$\|u\|_{W_{p,\gamma}^l(\Omega; E_0, E)} = \|u\|_{L_{p,\gamma}(\Omega; E_0)} + \sum_{k=1}^n \|D_k^{l_k} u\|_{L_{p,\gamma}(\Omega; E)} < \infty, \quad 1 \leq p < \infty.$$

Для $\gamma \equiv 1$ мы обозначаем пространство $W_{p,\gamma}^l(\Omega; E_0, E)$ через $W_p^l(\Omega; E_0, E)$.

Для положительных измеримых функций $\gamma_k(x)$ на $\mathbb{R}$ положим

$$D^{[\alpha]} = D_1^{[\alpha_1]} D_2^{[\alpha_2]} \dots D_n^{[\alpha_n]}, \quad D_k^{[i]} = \left(\gamma_k(x_k) \frac{\partial}{\partial x_k} \right)^i, \quad \gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n).$$

Положим также

$$W_{p,\gamma}^{[l]}(\Omega; E_0, E) = \left\{ u : u \in L_p(\Omega; E_0), \right. \\ \left. D_k^{[l_k]} u \in L_p(\Omega; E), \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad \|u\|_{W_{p,\gamma}^{[l]}(\Omega; E_1, E)} < \infty \right\},$$

где

$$\|u\|_{W_{p,\gamma}^{[l]}(\Omega; E_1, E)} = \|u\|_{L_p(\Omega; E_0)} + \sum_{k=1}^n \|D_k^{[l_k]} u\|_{L_p(\Omega; E)} < \infty.$$

Банахово пространство E называется ζ -выпуклым [31], [32], если существует симметричная функция $\zeta(u, v)$ на $E \times E$, выпуклая относительно каждой переменной и удовлетворяющая условию

$$\zeta(0, 0) > 0, \quad \zeta(u, v) \leq \|u + v\| \quad \text{при} \quad \|u\|_E = \|v\|_E = 1.$$

Как показано в [31], гильбертов оператор

$$(Hf)(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x-y| > \varepsilon} \frac{f(y)}{x-y} dy$$

ограничен в $L_p(R; E)$ для $p \in (1, \infty)$ тогда и только тогда, когда банахово пространство E является ζ -выпуклым; ζ -выпуклые банаховы пространства известны также как UMD-пространства. Класс UMD-пространств содержит, например, пространства L_p и l_p , а также лоренцевы пространства L_{pq} , где $p, q \in (1, \infty)$.

Предположим, что число γ таково, что $S(\mathbb{R}^n; E_1)$ плотно в $L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^n; E_1)$ (см., например, теорему A1). Функция $\Psi \in C(\mathbb{R}^n; L(E_1, E_2))$ называется *мультипликатором* из $L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^n; E_1)$ в $L_{q,\gamma}(\mathbb{R}^n; E_2)$, если отображение $u \rightarrow Du = F^{-1}\Psi(\xi)Fu$, $u \in S(\mathbb{R}^n; E_1)$, корректно определено и продолжается до ограниченного линейного оператора

$$D: L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^n; E_1) \rightarrow L_{q,\gamma}(\mathbb{R}^n; E_2).$$

Обозначим множество всех мультипликаторов из $L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^n; E_1)$ в $L_{q,\gamma}(\mathbb{R}^n; E_2)$ через $M_{p,\gamma}^{q,\gamma}(E_1, E_2)$. Для $E_1 = E_2 = E$ мы пишем $M_{p,\gamma}^{q,\gamma}(E)$ вместо $M_{p,\gamma}^{q,\gamma}(E_1, E_2)$. Пусть Q – область в $\mathbb{R}^\sigma$, и пусть $h = (h_1, h_2, \dots, h_\sigma) \in Q$. Рассмотрим зависящее от параметра h семейство

$$\Phi(h) = \{\Psi_h : \Psi_h \in M_{p,\gamma}^{q,\gamma}(E_1, E_2), \quad h \in Q\}$$

мультипликаторов из множества $M_{p,\gamma}^{q,\gamma}(E_1, E_2)$. Мы говорим, что мультипликаторы Ψ_h *равномерно ограничены относительно h* , если найдется не зависящая от $h \in Q$ положительная константа C такая, что

$$\|F^{-1}\Psi_h F u\|_{L_{q,\gamma}(\mathbb{R}^n, E_2)} \leq C \|u\|_{L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^n, E_1)}$$

для всех $h \in Q$ и $u \in S(\mathbb{R}^n; E_1)$.

Изложение теории L_p -мультипликаторов преобразований Фурье, а также ссылки на работы, в которых рассматриваются смежные вопросы, содержится в [3; §§ 2.2.1–2.2.4]. Мультипликаторы Фурье в весовых L_p -пространствах исследовались в нескольких работах, в частности, в [33], [34]. Интегральные преобразования и мультипликаторы Фурье в пространствах вектор-функций изучались в [4], [21], [22], [28], [30], [32], [35]–[37]. Согласно работе [37] условий Михлина [29] недостаточно для получения теорем об операторнозначных мультипликаторах в L_p -пространствах функций со значениями в банаховых пространствах.

Множество $K \subset B(E_1, E_2)$ называется $\mathbb{R}$ -ограниченным (см., например, [31], [26], [28]), если найдется такая константа C (зависящая только от E_1 и E_2), что

$$\int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^m r_j(y) T_j u_j \right\|_{E_2} dy \leq C \int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^m r_j(y) u_j \right\|_{E_1} dy$$

для всех $T_1, T_2, \dots, T_m \in K$ и $u_1, u_2, \dots, u_m \in E_1$, где $m \in \mathbb{N}$ и $\{r_j\}$ – последовательность независимых симметричных $\{-1, 1\}$ -значных случайных величин на $[0, 1]$ ($\mathbb{N}$ обозначает множество натуральных чисел). Наименьшее такое C называется $\mathbb{R}$ -гранью семейства K и обозначается через $\mathbb{R}(K)$.

Множество $K(h) \subset B(E_1, E_2)$, зависящее от параметра $h \in Q$, называется *равномерно $\mathbb{R}$ -ограниченным по h* , если найдется такая положительная константа C , что для всех $T_1(h), T_2(h), \dots, T_m(h) \in K$ и $u_1, u_2, \dots, u_m \in E_1$, где $m \in \mathbb{N}$, выполнено условие

$$\int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^m r_j(y) T_j(h) u_j \right\|_{E_2} dy \leq C \int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^m r_j(y) u_j \right\|_{E_1} dy,$$

причем константа C не зависит от h .

Пусть

$$V_n = \{\xi : \xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n, \xi_j \neq 0\},$$

$$U_n = \{\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n), |\beta| \leq n\},$$

$$\xi^\beta = \xi_1^{\beta_1} \xi_2^{\beta_2} \dots \xi_n^{\beta_n}.$$

Для неотрицательных целых $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ положим

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \dots D_n^{\alpha_n} = \frac{\partial^\alpha}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Будем говорить, что банахово пространство E удовлетворяет мультипликаторному условию относительно $p, q \in (1, \infty)$ и весовой функции γ (относительно p и γ , если $q = p$), если для любого $\Psi \in C^{(n)}(\mathbb{R}^n; B(E))$ из $\mathbb{R}$ -ограниченности множества

$$\{\xi^{\beta+1/p-1/q} D^\beta \Psi(\xi) : \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \beta \in U_n\}$$

вытекает, что Ψ является мультипликатором Фурье, т.е. $\Psi \in M_p^q(E)$ для любых $p, q \in (1, \infty)$.

Банахово пространство E обладает свойством (α) (см., например, [21]), если найдется такая константа α , что

$$\left\| \sum_{i,j=1}^N \alpha_{ij} \varepsilon_i \varepsilon'_j x_{ij} \right\|_{L_2(\Omega \times \Omega'; E)} \leq \alpha \left\| \sum_{i,j=1}^N \varepsilon_i \varepsilon'_j x_{ij} \right\|_{L_2(\Omega \times \Omega'; E)}$$

для всех $N \in \mathbb{N}$, $x_{i,j} \in E$ и $\alpha_{ij} \in \{0, 1\}$ (где $i, j = 1, 2, \dots, N$) и любых независимых симметричных $\{-1, 1\}$ -значных случайных величин $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_N$, $\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \dots, \varepsilon'_N$ на вероятностных пространствах Ω и Ω' . В частности, пространства $L_p(\Omega)$, где $1 \leq p < \infty$, обладают свойством (α) .

ЗАМЕЧАНИЕ 0. Любое UMD-пространство E со свойством (α) удовлетворяет мультипликаторному условию для $\gamma \equiv 1$ относительно $p \in (1, \infty)$ (см. [26]).

Хорошо известно (см., например, [38]), что всякое гильбертово пространство удовлетворяет мультипликаторному условию. Однако существуют банаховы пространства, которые не являются гильбертовыми, но все равно удовлетворяют этому условию; таковы, например, UMD-пространства [21], [26], [28].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Положительный оператор A называется $\mathbb{R}$ -положительным в банаховом пространстве E , если существует $\varphi \in [0, \pi)$, для которого множество

$$L_A = \{\xi(A + \xi I)^{-1} : \xi \in S_\varphi\}$$

$\mathbb{R}$ -ограничено.

Заметим, что в гильбертовом пространстве всякое множество, ограниченное по норме, $\mathbb{R}$ -ограничено. Следовательно, в гильбертовом пространстве все положительные операторы $\mathbb{R}$ -положительны. Если A порождает сжимающую полугруппу на L_q , где $1 \leq q \leq \infty$ [39], мнимые степени A удовлетворяют условию $\|(-A^{it})\|_{B(E)} \leq Ce^{\nu|t|}$, где $\nu < \pi/2$ [26], [40], или A порождает полугруппу, удовлетворяющую гауссовой оценке [41] в $E \in \text{UMD}$, то оператор A $\mathbb{R}$ -положителен.

Следуя [3; § 2.3.3], мы полагаем

$$r = (r_1, r_2, \dots, r_n), \quad r + a = (r_1 + a, r_2 + a, \dots, r_n + a), \quad l = (l_1, l_2, \dots, l_n),$$

$$|(r + a) : l| = \sum_{k=1}^n \frac{r_k + a}{l_k}, \quad \xi^r = \xi_1^{r_1} \xi_2^{r_2} \dots \xi_n^{r_n}.$$

Через $\overline{\Omega}$ обозначается замыкание множества Ω .

3. Теоремы вложения для весов общего вида. В этом пункте мы доказываем, что обобщенный дифференциальный оператор D^r определяет непрерывные вложения пространств Соболева–Лионса. Теоремы о мультипликаторах в операторнозначных L_p -пространствах играют важную роль в теории вложений функциональных пространств и операторных дифференциальных уравнений.

Из результатов работы [12] получается следующая

ТЕОРЕМА A_0 . *Предположим, что выполнены следующие условия:*

- (1) E_1 и E_2 – UMD-пространства со свойством (α) ;
 (2) $\gamma = \prod_{k=1}^n \gamma_k(x_k)$, где $\gamma_k \in A_p$ и существуют положительные константы C_k , M_k и D_k , для которых

$$\begin{aligned} \gamma_k(y_1) &\leq C_k \gamma_k(y_2), & \gamma_k^{1/p}(y_2) \gamma_k^{-1/p}(y_1) &\leq M_k |y_2|^{\nu_k/p} |y_1|^{-\nu_k/p}, \\ |\gamma_k^{1/p}(y_2) \gamma_k^{-1/p}(y_1) - 1| &\leq D_k ||y_2|^{\nu_k/p} |y_1|^{-\nu_k/p} - 1|, \\ y_1, y_2 &\in \mathbb{R} \setminus \{0\}, & 0 &\leq \nu_k < p-1, \quad k = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Предположим также, что $\Psi_h \in C^n(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}; B(E_1, E_2))$ и найдется $C > 0$ такое, что

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, |\alpha| \leq n} \|D^\alpha \Psi_h(x)\|_{B(E_1, E_2)} \leq C$$

для всех $h \in Q$. Тогда если

$$\sup_{h \in Q} \mathbb{R} \{ \xi^\beta D_\xi^\beta \Psi_h(\xi) : \xi \in V_n, \beta \in U_n \} < \infty,$$

то $\Psi_h(\xi)$ – равномерно ограниченный мультипликатор, действующий из $L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^n; E_1)$ в $L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^n; E_2)$.

При $n = 1$ это утверждение верно для всех $E_1, E_2 \in \text{UMD}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Ясно, что теорема A₀ верна также для мультипликаторов, не зависящих от параметра (в этом случае условие на h не нужно).

ТЕОРЕМА A₁. Пусть E – банахово пространство, $1 \leq p < \infty$ и γ – положительная измеримая функция на открытом подмножестве Ω пространства $\mathbb{R}^n$, существенно ограниченная на компактных подмножествах множества Ω . Тогда пространство $D(\Omega; E)$ плотно в $L_{p,\gamma}(\Omega; E)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $u \in L_{p,\gamma}(\Omega; E)$ и $n \in \mathbb{N}$ определим функцию $u_n : \Omega \rightarrow E$ правилом

$$u_n = \begin{cases} u(x), & \text{если } \|u(x)\| \leq n; \\ 0, & \text{если } \|u(x)\| > n. \end{cases}$$

По теореме о мажорируемой сходимости имеем $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u - u_n\|_{L_{p,\gamma}(\Omega; E)} = 0$; значит, финитную функцию можно аппроксимировать ограниченными финитными функциями, точнее, финитными функциями, принадлежащими пространству $L_p(\Omega; E)$. Из стандартного доказательства теоремы о плотности в случае невесовых пространств вытекает, что если u – финитная функция из пространства $L_p(\Omega; E)$, то существуют компакт $K \subset \Omega$, содержащий $\text{supp } u \subseteq K$, и последовательность функций $u_n \in D(\Omega; E)$ с $\text{supp } u_n \subseteq K$ такие, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u - u_n\|_{L_p(\Omega; E)} = 0$; поскольку

$$\|u - u_n\|_{L_{p,\gamma}(\Omega; E)} = \left(\int_K \|u(x) - u_n(x)\|^p \gamma(x) dx \right)^{1/p} \leq \left(\sup_{x \in K} \gamma(x) \right)^{1/p} \|u - u_n\|_{L_p(\Omega; E)},$$

получаем $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u - u_n\|_{L_{p,\gamma}(\Omega; E)} = 0$.

Из результатов работы [11] вытекает

ЛЕММА A_1 . Пусть A – положительный оператор в банаховом пространстве E , $r = (r_1, r_2, \dots, r_n)$, $r_k \in \{0, b\}$, $b > 0$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $l = (l_1, l_2, \dots, l_n)$, $\alpha_k \in [0, \infty)$ и $l_k \in (0, \infty)$, причем $\varkappa = |(\alpha + r) : l| \leq 1$, и пусть $0 < h \leq h_0 < \infty$. Тогда для любого $0 \leq \mu \leq 1 - \varkappa$ оператор-функция

$$\Psi = |\xi_1|^{\alpha_1+r_1} \dots |\xi_n|^{\alpha_n+r_n} A^{1-\varkappa-\mu} h^{-\mu} \left[A + \sum_{k=1}^n (1 + |\xi_k|^{l_k}) + h^{-1} \right]^{-1}$$

является равномерно ограниченным оператором в E относительно ξ и h , т.е. найдется константа C_μ , для которой

$$\|\Psi(\xi)\|_{L(E)} \leq C_\mu. \quad (1)$$

ТЕОРЕМА 1. Предположим, что выполнены следующие условия:

- (1) E является банаховым пространством, удовлетворяющим мультипликативному условию относительно p, q и весовой функции γ , где $1 < p \leq q < \infty$, и A – $\mathbb{R}$ -положительный оператор в E ;
- (2) наборы $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ и $l = (l_1, l_2, \dots, l_n)$, где $\alpha_k \in [0, \infty)$ и $l_k \in (0, \infty)$, удовлетворяют условию $\varkappa = |(\alpha + 1/p - 1/q) : l| \leq 1$, $0 \leq \mu \leq 1 - \varkappa$ и $0 < h \leq h_0 < \infty$.

Тогда вложение

$$D^\alpha H_{p,\gamma}^l(\mathbb{R}^n; E(A), E) \subset L_{q,\gamma}(\mathbb{R}^n; E(A^{1-\varkappa-\mu}))$$

непрерывно и существует такая положительная константа C_μ , зависящая только от μ , что

$$\|D^\alpha u\|_{L_{q,\gamma}(\mathbb{R}^n; E(A^{1-\varkappa-\mu}))} \leq C_\mu [h^\mu \|u\|_{H_{p,\gamma}^l(\mathbb{R}^n; E(A), E)} + h^{-(1-\mu)} \|u\|_{L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^n; E)}] \quad (2)$$

для всех $u \in H_{p,\gamma}^l(\mathbb{R}^n; E(A), E)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства неравенства (2) достаточно показать, что

$$\|F^{-1}[(i\xi)^\alpha A^{1-\varkappa-\mu} \hat{u}]\|_{L_{q,\gamma}(\mathbb{R}^n; E)} \leq C_\mu \left\| F^{-1} \left[h^\mu \left(A + \sum_{k=1}^n |\xi_k|^{l_k} \right) + h^{-(1-\mu)} \right] \hat{u} \right\|_{L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^n; E)} \quad (3)$$

для подходящих $C_\mu > 0$ и для всех $u \in H_{p,\gamma}^l(\mathbb{R}^n; E(A), E)$, а для доказательства неравенства (3) достаточно показать, что оператор-функция $\Psi_h = |\xi_1|^{\alpha_1} \dots |\xi_n|^{\alpha_n} \times A^{1-\varkappa-\mu} Q_h^{-1}(\xi)$ является мультипликатором из $L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^n; E)$ в $L_{q,\gamma}(\mathbb{R}^n; E)$, равномерным относительно параметра h , где

$$Q_h(\xi) = h^\mu \left(A + \sum_{k=1}^n |\xi_k|^{l_k} \right) + h^{-(1-\mu)};$$

это утверждение, в свою очередь, будет доказано, если мы покажем, что множество

$$\{\xi^{\beta+1/p-1/q} D^\beta \Psi_h(\xi) : \xi \in V_n, \beta \in U_n\}$$

$\mathbb{R}$ -ограничено в E , причем $\mathbb{R}$ -грань не зависит от λ . Оценка (1) из леммы A_1 для $r_k = \eta = 1/p - 1/q$ влечет

$$|\xi|^{(\beta+\eta)} \|D^\beta \Psi(\xi)\|_{L(E)} \leq C, \quad \beta \in U_n, \quad \xi \in V_n. \quad (4)$$

Из $\mathbb{R}$ -положительности оператора A и оценки (4) вытекает, что множества

$$\{AQ_h^{-1}(\xi) : \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\}, \quad \left\{ \left(1 + \sum_{k=1}^n |\xi_k|^{l_k} + h^{-1} \right) Q_h^{-1}(\xi) : \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \right\}$$

равномерно $\mathbb{R}$ -ограничены относительно h . Кроме того, для $u_1, u_2, \dots, u_m \in E$, $m \in \mathbb{N}$ и $\xi^j = (\xi_{1j}, \xi_{2j}, \dots, \xi_{nj}) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ имеем

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{j=1}^m r_j(y) (\xi^j)^\eta \Psi_h(\xi^j) u_j \right\|_{L_p(0,1;E)} \\ &= \left\| \sum_{j=1}^m r_j(y) (\xi^j)^\eta (\xi^j)^\alpha A^{1-\varkappa-\mu} Q_h^{-1}(\xi^j) u_j \right\|_{L_p(0,1;E)} \\ &= \left\| \sum_{j=1}^m r_j(y) (\xi^j)^{\alpha+\eta} \left(1 + \sum_{k=1}^n |\xi_{kj}|^{l_k} + h^{-1} \right)^{-(\varkappa+\mu)} \right. \\ & \quad \times \left[\left(1 + \sum_{k=1}^n |\xi_{kj}|^{l_k} + h^{-1} \right) Q_h^{-1}(\xi^j) \right]^{(\varkappa+\mu)} [AQ_h^{-1}(\xi^j)]^{1-(\varkappa+\mu)} u_j \left. \right\|_{L_p(0,1;E)}, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\{r_j\}$ – последовательность независимых симметричных $\{-1, 1\}$ -значных случайных величин на $[0, 1]$. В силу неравенства (3) и принципа сжимающих отображений Кахана [26; лемма 3.5] из (5) вытекает, что

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{j=1}^m r_j(y) (\xi^j)^{1/p-1/q} \Psi_h(\xi^j) u_j \right\|_{L_p(0,1;E)} \\ & \leq 2M_0 \left\| \sum_{j=1}^m r_j(y) \left[\left(1 + \sum_{k=1}^n |\xi_{kj}|^{l_k} + h^{-1} \right) Q_h^{-1}(\xi^j) \right]^{(\varkappa+\mu)} \right. \\ & \quad \times [AQ_h^{-1}(\xi^j)]^{1-(\varkappa+\mu)} u_j \left. \right\|_{L_p(0,1;E)}. \end{aligned}$$

Из (4) и мультипликативных свойств набора $\mathbb{R}$ -ограниченных операторов (см., например, [26; предложение 3.4]) следует равномерная $\mathbb{R}$ -ограниченность множества $\{\Psi_h(\xi) : \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\}$ относительно h . Аналогично, используя принцип сжимающих отображений Кахана, а также мультипликативные и некоторые другие свойства набора $\mathbb{R}$ -ограниченных операторов [26; предложение 3.4], мы можем показать, что множество

$$\{\xi^{\beta+\eta} D^\beta \Psi_h(\xi) : \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \beta \in U_n\}$$

равномерно $\mathbb{R}$ -ограничено, т.е.

$$\sup_h \mathbb{R}\{\xi^{\beta+\eta} D^\beta \psi_h(\xi) : \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \beta \in U_n\} < \infty.$$

Следовательно, оператор-функция $\Psi_h(\xi)$ представляет собой равномерное семейство мультипликаторов в $M_{p,\gamma}^{q,\gamma}(E)$. Теорема доказана.

Теорему 1 можно сформулировать в более общем виде. Для этого нам понадобится понятие оператора продолжения.

УСЛОВИЕ 1. Мы предполагаем, что E – банахово пространство, удовлетворяющее мультипликаторному условию относительно p, q и весовой функции γ , A – φ -положительный оператор в E и $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – область, для которой существует ограниченный линейный оператор продолжения из $H_{p,\gamma}^l(\Omega; E(A), E)$ в $H_{p,\gamma}^l(\mathbb{R}^n; E(A), E)$ для $1 < p < \infty$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ удовлетворяет *сильному условию l -рога* (см. [1; § 8], $\gamma(x) \equiv 1$, $E = \mathbb{R}$ и $A = I$, то существует ограниченный линейный оператор продолжения из $H_p^l(\Omega) = H_p^l(\Omega; \mathbb{R}, \mathbb{R})$ в $H_p^l(\mathbb{R}^n) = H_p^l(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}, \mathbb{R})$.

ТЕОРЕМА 2. Если выполнены все предположения теоремы 1 и условие 1, то вложение

$$D^\alpha H_{p,\gamma}^l(\Omega, E(A), E) \subset L_{q,\gamma}(\Omega, E(A^{1-\kappa-\mu}))$$

непрерывно и существует такая константа C_μ , зависящая только от μ , что

$$\|D^\alpha u\|_{L_{q,\gamma}(\Omega, E(A^{1-\kappa-\mu}))} \leq C_\mu [h^\mu \|u\|_{H_{p,\gamma}^l(\Omega, E(A), E)} + h^{-(1-\mu)} \|u\|_{L_{p,\gamma}(\Omega; E)}] \quad (6)$$

для всех $u \in H_{p,\gamma}^l(\Omega; E(A), E)$ и $0 < h \leq h_0 < \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать оценку (6). Пусть B – ограниченный линейный оператор продолжения из $L_{p,\gamma}(\Omega; E)$ в $L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^n; E)$ и из $H_{p,\gamma}^l(\Omega; E(A), E)$ в $H_{p,\gamma}^l(\mathbb{R}^n; E(A), E)$, и пусть B_Ω – оператор сужения на Ω функций, определенных на $\mathbb{R}^n$. Согласно теореме 1 любая функция $u \in H_{p,\gamma}^l(\Omega; E(A), E)$ удовлетворяет условию

$$\begin{aligned} \|D^\alpha u\|_{L_{q,\gamma}(\Omega; E(A^{1-\kappa-\mu}))} &= \|D^\alpha B_\Omega B u\|_{L_{q,\gamma}(\Omega; E(A^{1-\kappa-\mu}))} \leq C \|D^\alpha B u\|_{L_{q,\gamma}(\mathbb{R}^n; E(A^{1-\kappa-\mu}))} \\ &\leq h^\mu \|B u\|_{H_{p,\gamma}^l(\mathbb{R}^n; E(A), E)} + h^{-(1-\mu)} \|B u\|_{L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^n; E)} \\ &\leq h^\mu \|u\|_{H_{p,\gamma}^l(\Omega; E(A), E)} + h^{-(1-\mu)} \|u\|_{L_{p,\gamma}(\Omega; E)}. \end{aligned}$$

Вывод 1. Если выполнены условия теоремы 2, то имеет место мультипликативная оценка

$$\|D^\alpha u\|_{L_{q,\gamma}(\Omega; E(A^{1-\kappa-\mu}))} \leq C_\mu \|u\|_{H_{p,\gamma}^l(\Omega; E(A), E)}^{1-\mu} \|u\|_{L_{p,\gamma}(\Omega; E)}^\mu$$

для всех $u \in H_{p,\gamma}^l(\Omega; E(A), E)$.

Чтобы убедиться в этом, достаточно положить $h = \|u\|_{L_{p,\gamma}(\Omega; E)} \cdot \|u\|_{H_{p,\gamma}^l(\Omega; E(A), E)}^{-1}$ в оценке (6).

ЛЕММА 1. Предположим, что выполнено условие 1 и $l = (l_1, l_2, \dots, l_n)$, где l_i для $i = 1, 2, \dots, n$ – целые числа. Тогда пространства $W_{p,\gamma}^l(\Omega; E(A), E)$ и $H_{p,\gamma}^l(\Omega; E(A), E)$ совпадают.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала положим $\Omega = \mathbb{R}^n$ и докажем равенство

$$W_{p,\gamma}^l(\mathbb{R}^n; E(A), E) = H_{p,\gamma}^l(\mathbb{R}^n; E(A), E).$$

Ясно, что

$$\|u\|_{W_{p,\gamma}^l(\mathbb{R}^n; E(A), E)} \sim \|F^{-1}A\hat{u}\|_{L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^n; E)} + \sum_{k=1}^n \|F^{-1}[(i\xi_k)^{l_k}\hat{u}]\|_{L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^n; E)}.$$

Следовательно, требуемое утверждение эквивалентно отношению

$$\begin{aligned} & \|F^{-1}A\hat{u}\|_{L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^n; E)} + \sum_{k=1}^n \|F^{-1}[(i\xi_k)^{l_k}\hat{u}]\|_{L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^n; E)} \\ & \sim \|u\|_{L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^n; E_0)} + \sum_{k=1}^n \|F^{-1}(1 + |\xi_k|^{l_k})Fu\|_{L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^n; E)}. \end{aligned} \quad (7)$$

Чтобы доказать (7), достаточно показать, что оператор-функции

$$\begin{aligned} B_1(\xi) &= \left[A + 1 + \sum_{k=1}^n \xi_k^{l_k} \right] \left[A + \sum_{k=1}^n |\xi_k|^{l_k} \right]^{-1}, \\ B_2(\xi) &= \left[A + \sum_{k=1}^n |\xi_k|^{l_k} \right] \left[A + 1 + \sum_{k=1}^n \xi_k^{l_k} \right]^{-1} \end{aligned}$$

являются мультипликаторами в $L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^n; E)$. Это доказывается так же, как теорема 1.

Для областей $\Omega \in \mathbb{R}^n$ требуемое утверждение выводится из отношения (7) с помощью оператора продолжения.

ТЕОРЕМА 3. Если выполнены условия теоремы 1, то для $0 < \mu < 1 - \varkappa$ вложение

$$D^\alpha H_{p,\gamma}^l(\mathbb{R}^n; E(A), E) \subset L_{q,\gamma}(\mathbb{R}^n; (E(A), E)_{\varkappa+\mu,p})$$

непрерывно и существует такая константа C_μ , зависящая только от μ , что

$$\|D^\alpha u\|_{L_{q,\gamma}(\mathbb{R}^n; (E(A), E)_{\varkappa+\mu,p})} \leq h^\mu \|u\|_{H_{p,\gamma}^l(\mathbb{R}^n; E(A), E)} + h^{-(1-\mu)} \|u\|_{L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^n; E)} \quad (8)$$

для всех $u \in H_{p,\gamma}^l(\mathbb{R}^n; E(A), E)$ и $0 < h \leq h_0 < \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать оценку (8) для всех $u \in H_{p,\gamma}^l(\mathbb{R}^n; E(A), E)$. По определению интерполяционных пространств $(E(A), E)_{\varkappa+\mu,p}$ (см. [3; § 1.14.5]) оценка (8) эквивалентна неравенству

$$\begin{aligned} & \|F^{-1}y^{1-\varkappa-\mu-1/p}[A^{\chi+\mu}(A+y)^{-1}]\xi^\alpha\hat{u}\|_{L_{p,\gamma}(R_+^{n+1}; E)} \\ & \leq C_\mu \left\| F^{-1} \left[h^\mu \left(A + \sum_{k=1}^n A + \sum_{k=1}^n |\xi_k|^{l_k} + h^{-(1-\mu)} \right) \right] \hat{u} \right\|_{L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^n; E)}. \end{aligned} \quad (9)$$

Из определения мультипликатора ясно, что если оператор-функция

$$\Psi = (i\xi)^\alpha y^{1-\varkappa-\mu-1/p} A^{\chi+\mu} (A+y)^{-1} \left[h^\mu \left(A + \sum_{k=1}^n |\xi_k|^{l_k} + h^{-(1-\mu)} \right) \right]^{-1}$$

является мультипликатором из $L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^n; E)$ в $L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^n; L_p(R_+; E))$, то неравенство (8) непосредственно вытекает из (9). То, что указанная выше оператор-функция является мультипликатором, доказывается так же, как теорема 1. Значит, оценка (8) верна.

Следующая теорема доказывается с использованием той же техники, что и теорема 2.

ТЕОРЕМА 4. Если выполнены все условия теоремы 3, то для $0 < \mu < 1 - \varkappa$ вложение

$$D^\alpha H_{p,\gamma}^l(\Omega; E(A), E) \subset L_{q,\gamma}(\Omega; (E(A), E)_{\varkappa+\mu,p})$$

непрерывно и существует такая константа C_μ , зависящая только от μ , что

$$\|D^\alpha u\|_{L_{q,\gamma}(\Omega; (E(A), E)_{\varkappa+\mu,p})} \leq C_\mu [h^\mu \|u\|_{H_{p,\gamma}^l(\Omega; E(A), E)} + h^{-(1-\mu)} \|u\|_{L_{p,\gamma}(\Omega; E)}] \quad (10)$$

для всех $u \in H_{p,\gamma}^l(\Omega; E(A), E)$ и $0 < h \leq h_0 < \infty$.

Вывод 2. Если выполнены условия теоремы 4, то для всех $u \in H_{p,\gamma}^l(\Omega; E(A), E)$ имеет место мультипликативная оценка

$$\|D^\alpha u\|_{L_{q,\gamma}(\Omega; (E(A), E)_{\varkappa+\mu,p})} \leq C_\mu \|u\|_{H_{p,\gamma}^l(\Omega; E(A), E)}^{1-\mu} \|u\|_{L_{p,\gamma}(\Omega; E)}^\mu. \quad (11)$$

В самом деле, полагая $h = \|u\|_{L_{p,\gamma}(\Omega; E)} \cdot \|u\|_{H_{p,\gamma}^l(\Omega; E(A), E)}^{-1}$ в оценке (10), мы получаем (11).

Вывод 3. Если $l_k = m$ для $k = 1, 2, \dots, n$, то вложение в изотропный класс $H_{p,\gamma}^m(\Omega; E(A)E)$ непрерывно.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Полагая

$$E = H, \quad \gamma(x) \equiv 1, \quad p = q = 2, \quad \Omega = (0, T), \quad l_1 = l_2 = \dots = l_n = m, \quad A = A^\times \geq cI$$

в теореме 2, мы получаем теорему Лионса–Питре [6]; более того, даже в одномерном случае теорема 2 улучшает теорему Лионса–Питре для несамосопряженных положительных операторов A . Для $E = \mathbb{R}$ и $A = I$ получается вложение $D^\alpha W_{p,\gamma}^l(\Omega) \subset L_{q,\gamma}(\Omega)$ весовых пространств Соболева $W_{p,\gamma}^l(\Omega)$.

4. Вложения в пространства вектор-функций. Пусть $s \in \mathbb{R}$ и $s > 0$. Рассмотрим пространство

$$l_\sigma^s = \{u : u = \{u_i\}, i = 1, 2, \dots, \infty, u_i \in \mathbb{C}\}$$

с нормой

$$\|u\|_{l_\sigma^s} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} 2^{ips} |u_i|^\sigma \right)^{1/\sigma} < \infty.$$

Заметим, что $l_\sigma^0 = l_\sigma$. Пусть A – бесконечная матрица, определенная на пространстве l_σ , для которой $D(A) = l_\sigma^s$, $1 < \sigma < \infty$, и $A = [\delta_{ij} 2^{si}]$, где $\delta_{ij} = 0$ для $i \neq j$ и $\delta_{ij} = 1$ для $i = j$, $i, j = 1, 2, \dots, \infty$. Ясно, что оператор A $\mathbb{R}$ -положителен в l_σ . Из теоремы 4 следует, что для $0 \leq \mu \leq 1 - \varkappa$ вложение

$$D^\alpha H_{p,\gamma}^l(\Omega; l_\sigma^s, l_\sigma) \subset L_{q,\gamma}(\Omega; l_\sigma^{s(1-\varkappa-\mu)})$$

непрерывно и выполнена оценка типа (6).

Насколько известно автору, это вложение не было известно до сих пор и не получается классическими методами.

5. Максимально регулярные дифференциально-операторные уравнения с переменными коэффициентами. Рассмотрим дифференциально-операторное уравнение

$$(L + \lambda)u = \sum_{|\alpha:l|=1} a_\alpha(x) D^\alpha u + A_\lambda(x)u + \sum_{|\alpha:l|<1} A_\alpha(x) D^\alpha u = f \quad (12)$$

в $L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^n; E)$, где $A(x)$ и $A_\alpha(x)$ – операторы (возможно, неограниченные) в банаховом пространстве E , a_k – комплекснозначные функции, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $l = (l_1, l_2, \dots, l_n)$, l_i положительны, α_i – неотрицательные целые и $\lambda \in S(\varphi_0)$. Свойство максимальной регулярности для эллиптических краевых задач исследовалось, например, в [42], [43], а для ДОО в банаховых пространствах – в [5], [11]–[14], [26], [28]. Для начала рассмотрим ДОО с постоянными коэффициентами

$$(L_0 + \lambda)u = \sum_{|\alpha:l|=1} b_\alpha D^\alpha u + A_\lambda u = f, \quad (13)$$

где A – оператор (возможно, неограниченный) в банаховом пространстве E , $A_\lambda = A + \lambda$ и b_α – комплексные числа.

ТЕОРЕМА 5. *Предположим, что выполнены следующие условия:*

- (1) E – банахово пространство, удовлетворяющее мультипликаторному условию относительно p и весовой функции γ ;
- (2) A – $\mathbb{R}$ -положительный оператор в E с $\varphi \in [0, \pi)$ и

$$B(\xi) = - \sum_{|\alpha:l|=1} b_\alpha (i\xi_1)^{\alpha_1} (i\xi_2)^{\alpha_2} \dots (i\xi_n)^{\alpha_n} \in S(\varphi_1),$$

$$|B(\xi)| \geq C \sum_{k=1}^n |\xi_k|^{l_k}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \varphi_0 + \varphi_1 \leq \varphi, \quad 1 < p < \infty.$$

Тогда для любой функции $f \in L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^n; E)$ и $\lambda \in S(\varphi_0)$ с достаточно большим $|\lambda|$ уравнение (13) имеет единственное решение $u(x)$ в пространстве $W_{p,\gamma}^l(\mathbb{R}^n; E(A), E)$, причем имеет место равномерная по λ коэцидивная оценка

$$\sum_{|\alpha:l| \leq 1} |\lambda|^{1-|\alpha:l|} \|D^\alpha u\|_{L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^n; E)} + \|Au\|_{L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^n; E)} \leq C \|f\|_{L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^n; E)}. \quad (14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя преобразование Фурье к уравнению (13), мы получаем

$$B(\xi) + A_\lambda \hat{u}(\xi) = \hat{f}(\xi). \quad (15)$$

Поскольку $B(\xi) \in S(\varphi)$ для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$, оператор $A + [\lambda + B(\xi)]$ обратим в E . Значит, решение уравнения (15) можно представить в виде

$$u(x) = F^{-1}[A + \lambda + B(\xi)]^{-1} \hat{f}. \quad (16)$$

Используя (16), мы приходим к

$$\|Au\|_{L_p} = \|F^{-1}A[A + (\lambda + B(\xi))]^{-1} \hat{f}\|_{L_p},$$

$$\|D^\alpha u\|_{L_p} = \|F^{-1}(i\xi_1)^{\alpha_1} (i\xi_2)^{\alpha_2} \dots (i\xi_n)^{\alpha_n} [A + (\lambda + B(\xi))]^{-1} \hat{f}\|_{L_p}.$$

Таким образом, достаточно показать, что оператор-функции

$$\begin{aligned}\sigma_\lambda(\xi) &= A[A + (\lambda + B(\xi))]^{-1}, \\ \sigma_{\alpha\lambda}(\xi) &= |\lambda|^{1-|\alpha:l|} (i\xi_1)^{\alpha_1} (i\xi_2)^{\alpha_2} \dots (i\xi_n)^{\alpha_n} [A + (\lambda + B(\xi))]^{-1}\end{aligned}$$

являются равномерными мультипликаторами в $L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^n; E)$ относительно $\lambda \in S(\varphi_0)$. Положительность оператора A , лемма 2.3 из [20] и рассуждения из доказательства теоремы 1 влекут равномерную ограниченность оператор-функций $\sigma_\lambda(\xi)$ и $\sigma_{\alpha\lambda}(\xi)$ относительно λ . Это означает, что

$$\|\sigma_\lambda(\xi)\|_{B(E)} \leq C, \quad \|\sigma_{\alpha\lambda}(\xi)\|_{B(E)} \leq C_\alpha. \quad (17)$$

Из $\mathbb{R}$ -положительности оператора A , принципа сжимающих отображений Кахана и неравенств (17) для $\lambda \in S(\varphi)$ вытекают оценки

$$\begin{aligned}R(\{\xi^\beta D_\xi^\beta \sigma_\lambda(\xi) : \xi \in V_n\}) &\leq M, \\ R(\{\xi^\beta D_\xi^\beta \sigma_{\alpha\lambda}(\xi) : \beta \in U_n, \xi \in V_n\}) &\leq M_\alpha.\end{aligned} \quad (18)$$

В силу (18) оператор-функции $\sigma_\lambda(\xi)$ и $\sigma_{\alpha\lambda}(\xi)$ являются равномерно (по λ) $\mathbb{R}$ -ограниченными мультипликаторами, причем их $\mathbb{R}$ -границы не зависят от t и λ . Согласно определению 1 оператор-функции $\sigma_\lambda(\xi)$ и $\sigma_{\alpha\lambda}(\xi)$ являются мультипликаторами Фурье из $L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^n; E)$ в $L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^n; E)$, равномерными по λ . Таким образом, для каждой функции $f \in L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^n; E)$ уравнение (13) имеет единственное решение вида $u(x) = F^{-1}[A + (\lambda + B(\xi))]^{-1} \hat{f}$, причем выполнена оценка (14).

ТЕОРЕМА 6. *Предположим, что выполнено условие (1) из теоремы 5, а также следующие условия:*

- (1) операторы $A(x)$ $\mathbb{R}$ -положительны в E равномерно по x , и $A(x)A^{-1}(x_0) \in C_b(R; B(E))$ для $x_0 \in (-\infty, \infty)$, $a_\alpha \in C_b(R)$ и $\varphi \in [0, \pi)$;
- (2) $A_\alpha(x)A^{-(1-|\alpha:l|-\mu)} \in L_\infty(\mathbb{R}^n; L(E))$ для $0 < \mu < 1 - |\alpha:l|$, и $1 < p < \infty$;
- (3) $B(x, \xi) \in S(\psi)$ и $|B(x, \xi)| \geq C \sum_{k=1}^n |\xi_k|^{l_k}$, где $\varphi_0 + \psi \leq \varphi$ и $x, \xi \in \mathbb{R}^n$.

Тогда для любой функции $f \in L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^n; E)$ и любого $\lambda \in S(\varphi_0)$ с достаточно большим $|\lambda|$ уравнение (12) имеет единственное решение $u(x)$ в пространстве $W_{p,\gamma}^l(\mathbb{R}^n; E(A), E)$, причем выполнена равномерная по λ коэрцитивная оценка

$$\sum_{|\alpha:l| \leq 1} |\lambda|^{1-|\alpha:l|} \|D^\alpha u\|_{L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^n; E)} + \|Au\|_{L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^n; E)} \leq C \|f\|_{L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^n; E)}. \quad (19)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим дифференциальные операторы L_0 и L в пространстве $L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^n; E)$, порожденные задачами (13) и (12) соответственно, т.е.

$$\begin{aligned}D(L_0) &= D(L) = W_{p,\gamma}^l(\mathbb{R}^n, E(A), E), \quad L_0 u = \sum_{|\alpha:l|=1} a_\alpha(x) D^\alpha u + Au, \\ Lu &= L_0 u + L_1 u, \quad L_1 u = \sum_{|\alpha:l| < 1} A_\alpha(x) D^\alpha u.\end{aligned}$$

Пусть $\varphi_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, где $j = 1, 2, \dots$, — разбиение единицы, в котором $0 \leq \varphi_j \leq 1$ и $\text{supp } \varphi_j \subset G_j$, $\sum_j \varphi_j(x) = 1$. Тогда для всех $u \in W_{p,\gamma}^l(\mathbb{R}^n; E(A), E)$ выполнено условие $u(x) = \sum_j u_j(x)$, где $u_j(x) = u(x)\varphi_j(x)$. Из равенства (12) для $u \in$

$W_{p,\gamma}^l(\mathbb{R}^n; E(A), E)$ вытекает, что

$$(L + \lambda)u_j = \sum_{|\alpha:l|=1} a_\alpha(x) D^\alpha u_j + A_\lambda(x) u_j(x) = f_j(x), \quad (20)$$

где

$$f_j = f\varphi_j - \sum_{|\alpha:l|<1} b_{\alpha j}(x) D^\alpha u - \sum_{|\alpha:l|<1} A_\alpha(x) D^\alpha u_j \quad (21)$$

и $b_{\alpha j}(x)$ – непрерывные равномерно ограниченные функции, содержащие производные функций φ_j . Выберем большой шар $B_{r_0}(0)$ такой, что $|a_\alpha(x) - a_\alpha(\infty)| \leq \delta$ для всех $|x| \geq r_0$ и $G_0 = \mathbb{R}^n \setminus \overline{B_{r_0}(0)}$. Покроем его замыкание $\overline{B_{r_0}(0)}$ конечным числом шаров $G_j = B_{r_j}(x_{0j})$ таких, что $|a_\alpha(x) - a_\alpha(x_{0j})| \leq \delta$ для всех $|x - x_{0j}| \leq r_j$, где $j = 1, 2, \dots, N$. Определим коэффициенты локальных операторов L_j как в [27; теорема 5.7], т.е. положим

$$a_\alpha^0(x) = \begin{cases} a_\alpha(x), & \text{если } x \notin \overline{B_{r_0}(0)}, \\ a_\alpha\left(r_0^2 \frac{x}{|x|^2}\right), & \text{если } x \in \overline{B_{r_0}(0)}, \end{cases}$$

$$a_\alpha^j(x) = \begin{cases} a_\alpha(x), & \text{если } x \in \overline{B_{r_j}(x_{0j})}, \\ a_\alpha\left(x_{0j} + r_0^2 \frac{x - x_{0j}}{|x - x_{0j}|^2}\right), & \text{если } x \notin \overline{B_{r_j}(x_{0j})}, \end{cases}$$

для каждого $j = 1, 2, \dots$. Имеем $|a_\alpha(x) - a_\alpha(x_{0j})| \leq \delta$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$ и $j = 0, 1, 2, \dots$. Фиксируя коэффициенты в уравнении (21), мы получаем

$$\sum_{|\alpha:l|=1} a_\alpha(x_{0j}) D^\alpha u_j + A_\lambda(x_{0j}) u_j(x) = F_j(x), \quad (22)$$

где

$$F_j = f_j + \sum_{|\alpha:l|=1} [a_\alpha(x_{0j}) - a_\alpha(x)] D^\alpha u_j + [A(x_{0j}) - A(x)] u_j. \quad (23)$$

Согласно теореме 5 задача (22) имеет единственное решение u_j и для $\lambda \in S(\varphi_0)$ с достаточно большими $|\lambda|$ выполнена коэрцитивная оценка

$$\sum_{|\alpha:l| \leq 1} |\lambda|^{1-|\alpha:l|} \|D^\alpha u_j\|_{G_j, p, \gamma} + \|A u_j\|_{G_j, p, \gamma} \leq C \|F_j\|_{G_j, p, \gamma}. \quad (24)$$

Отсюда, используя гладкость коэффициентов уравнений (21), (23) и выбирая шары G_j с достаточно маленькими диаметрами, получаем

$$\|F_j\|_{G_j, p, \gamma} \leq \varepsilon \|u_j\|_{W_{p,\gamma}^l(G_j; E(A), E)} + C(\varepsilon) \|u_j\|_{G_j, p, \gamma} + C \|f\|_{G_j, p, \gamma}, \quad (25)$$

где ε достаточно мало и $C(\delta)$ – непрерывная функция. Таким образом, из (24) и (25) вытекает неравенство

$$\sum_{|\alpha:l| \leq 1} |\lambda|^{1-|\alpha:l|} \|D^\alpha u_j\|_{G_j, p, \gamma} \leq C \|f\|_{G_j, p, \gamma} + \delta \|u_j\|_{W_{p,\gamma}^2} + C(\delta) \|u_j\|_{G_j, p, \gamma}.$$

Для $\delta < 1$ из этого неравенства имеем

$$\sum_{|\alpha:l|\leq 1} |\lambda|^{1-|\alpha:l|} \|D^\alpha u_j\|_{G_j,p,\gamma} \leq C[\|f\|_{G_j,p,\gamma} + \|u_j\|_{G_j,p,\gamma}]. \quad (26)$$

Используя равенство $u(x) = \sum_j u_j(x)$ и оценку (26) для $u \in W_{p,\gamma}^l(\mathbb{R}^n; E(A), E)$, получаем

$$\sum_{|\alpha:l|\leq 1} |\lambda|^{1-|\alpha:l|} \|D^\alpha u_j\|_{G_j,p,\gamma} \leq C[\|(L + \lambda)u\|_{p,\gamma} + \|u\|_{p,\gamma}]. \quad (27)$$

Пусть $u \in W_{p,\gamma}^l(\mathbb{R}^n; E(A), E)$ – решение задачи (12). Тогда для $\lambda \in S(\varphi_0)$ имеем

$$\|u\|_{p,\gamma} = \|(L + \lambda)u - Lu\|_{p,\gamma} \leq \frac{1}{\lambda} [\|(L + \lambda)u\|_{p,\gamma} + \|u\|_{W_{p,\gamma}^l}]. \quad (28)$$

Из теоремы 1 и неравенств (27) и (28) вытекает, что для достаточно больших $|\lambda|$

$$\sum_{|\alpha:l|\leq 1} |\lambda|^{1-|\alpha:l|} \|D^\alpha u_j\|_{p,\gamma} \leq C\|(L + \lambda)u\|_{p,\gamma}. \quad (29)$$

Из оценки (29) следует, что задача (12) имеет единственное решение и оператор $(L + \lambda)$ обратим в своем ранговом пространстве. Покажем, что это ранговое пространство совпадает с пространством $L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^n; E)$. Для каждого j построим функцию u_j , определенную на области G_j и являющуюся решением задачи (12). Предположим, что функция $g_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет условию $g_j(x) \equiv 1$ на $\text{supp } \varphi_j$. Задачу (12) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} & \sum_{|\alpha:l|=1} a_\alpha(x_{0j}) D^\alpha u_j + A_\lambda(x_j) u_j(x) \\ &= g_j f + [A(x_{0j}) - A(x)] u_j - \sum_{|\alpha:l|<1} A_\alpha(x) D^\alpha u_j, \quad j = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (30)$$

Поскольку функции u_j и g_j имеют один и тот же компактный носитель, мы можем продолжить обе части уравнения (30) нулем и рассмотреть задачу (30) как краевую задачу в $\mathbb{R}^n$. Пусть $O_{j\lambda}$ – операторы в $L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^n; E)$, порожденные ДОУ

$$\sum_{|\alpha:l|=1} a_\alpha(x_{0j}) D^\alpha u_j + A_\lambda(x_{0j}) u_j(x) = g_j f$$

с постоянными коэффициентами, т.е.

$$D(O_{j\lambda}) = W_{p,\gamma}^l(\mathbb{R}^n; E(A), E), \quad O_{j\lambda} u = \sum_{|\alpha:l|=1} a_\alpha(x_{0j}) D^\alpha u_j + A_\lambda(x_{0j}) u_j(x).$$

В силу теоремы 5 для всех функций $f \in L_{p,\gamma}(G_j; E)$ и всех $\lambda \in S(\varphi_0)$ с достаточно большими $|\lambda|$ мы имеем

$$\sum_{|\alpha:l|\leq 1} |\lambda|^{1-|\alpha:l|} \|D^\alpha O_{j\lambda}^{-1} f\|_{p,\gamma} + \|A O_{j\lambda}^{-1} f\|_{p,\gamma} \leq C\|f\|_{p,\gamma}. \quad (31)$$

Продолжая функции u_j в (30) нулем на дополнения до их носителей $\text{supp } \varphi_j$ и производя замены $u_j = O_{j\lambda}^{-1}v_j$, получаем следующие операторные уравнения относительно v_j :

$$v_j = K_{j\lambda}v_j + g_jf, \quad j = 1, 2, \dots \quad (32)$$

Из теоремы 1 и оценки (31), а также гладкости коэффициентов в выражениях $K_{j\lambda}$ для $\lambda \in S(\varphi_0)$ с достаточно большими $|\lambda|$, вытекает, что $\|K_{j\lambda}\| < \varepsilon$, где ε достаточно мало. Следовательно, каждое из уравнений в (32) имеет единственное решение $v_j = [I - K_{j\lambda}]^{-1}g_jf$. Кроме того,

$$\|v_j\|_{p,\gamma} = \|[I - K_{j\lambda}]^{-1}g_jf\|_{p,\gamma} \leq \|f\|_{p,\gamma}.$$

Значит, $[I - K_{j\lambda}]^{-1}g_j$ – ограниченные линейные операторы, действующие из $L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^n; E)$ в $L_{p,\gamma}(G_j; E)$. Таким образом, функции $u_j = U_{j\lambda}f = O_{j\lambda}^{-1}[I - K_{j\lambda}]^{-1}g_jf$ являются решениями уравнений (32). Рассмотрим линейный оператор $(U + \lambda)$ в пространстве $L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^n; E)$, определенный правилом

$$(U + \lambda)f = \sum_j \varphi_j(y)U_{j\lambda}f.$$

Из построения U_j и оценки (31) следует, что $U_{j\lambda}$ – ограниченные линейные операторы из $L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^n; E)$ в $W_{p,\gamma}^l(\mathbb{R}^n; E(A), E)$, причем

$$\sum_{|\alpha:l| \leq 1} |\lambda|^{1-|\alpha:l|} \|D^\alpha U_{j\lambda}^{-1}f\|_{p,\gamma} + \|AU_{j\lambda}^{-1}f\|_{p,\gamma} \leq C\|f\|_{p,\gamma} \quad (33)$$

для $\lambda \in S(\varphi_0)$ с достаточно большими $|\lambda|$. Значит, $U + \lambda I$ – ограниченный линейный оператор из $L_{p,\gamma}$ в $L_{p,\gamma}$. Действуя оператором $L + \lambda$ на $u = \sum_j \varphi_j U_{j\lambda}f$, мы получаем $(L + \lambda)u = f + \sum_j \Phi_{j\lambda}f$, где $\Phi_{j\lambda}$ – линейные комбинации операторов $U_{j\lambda}$ и $(d/dy)U_{j\lambda}$. Из теоремы 1, оценки (33) и выражения для $\Phi_{j\lambda}$ вытекает, что $\Phi_{j\lambda}$ – ограниченные линейные операторы из $L_{p,\gamma}$ в $L_{p,\gamma}(G_j; E)$, причем $\|\Phi_{j\lambda}\| < \delta$. Следовательно, существует ограниченный линейный обратный оператор

$$\left(I + \sum_j \Phi_{j\lambda} \right)^{-1}.$$

Отсюда вытекает, что для всех $f \in L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^n; E)$ краевая задача (12) имеет единственное решение

$$u = (U + \lambda) \left(I + \sum_j \Phi_{j\lambda} \right)^{-1} f,$$

что доказывает теорему 6.

Вывод 4. Из теоремы 6 следует, что дифференциальный оператор L имеет резольвенту $(L + \lambda)^{-1}$ для $\lambda \in S(\varphi_0)$, причем выполнена оценка

$$\sum_{|\alpha:l| \leq 1} |\lambda|^{1-|\alpha:l|} \|D^\alpha (L + \lambda)^{-1}\|_{B(L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^n; E))} + \|A(L + \lambda)^{-1}\|_{B(L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^n; E))} \leq C.$$

Рассмотрим вырожденное ДОУ в $L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^n; E)$

$$(L + \lambda)u = \sum_{|\alpha:l|=1} a_\alpha(x) D^{[\alpha]}u + A_\lambda(x)u + \sum_{|\alpha:l|<1} A_\alpha(x) D^{[\alpha]}u = f. \quad (34)$$

Положим

$$\tau_k = \int_0^{x_k} \gamma_k^{-1}(y) dy \quad (35)$$

и

$$\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}(\tau) = \prod_{k=1}^n \gamma_k(x_k(\tau_k)).$$

Теорема 6 влечет

Вывод 5. Пусть E – банахово пространство, удовлетворяющее мультипликаторному условию относительно p и весовой функции $\tilde{\gamma} \in A_p$. Предположим, что выполнены условия (1)–(3) в теореме 6. Тогда для любых $f \in L_p(\mathbb{R}^n; E)$ и $\lambda \in S(\varphi_0)$ с достаточно большими $|\lambda|$ уравнение (34) имеет единственное решение $u \in W_p^{[l]}(\mathbb{R}^n; E(A), E)$, причем выполнена равномерная по λ коэрцитивная оценка

$$\sum_{|\alpha:l| \leq 1} |\lambda|^{1-|\alpha:l|} \|D^{[\alpha]}u\|_{L_p(\mathbb{R}^n; E)} + \|Au\|_{L_p(\mathbb{R}^n; E)} \leq C \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n; E)}.$$

Действительно, подстановка (35) изоморфно отображает пространство $L_p(\mathbb{R}^n; E)$ на весовое пространство $L_{p,\tilde{\gamma}}(\mathbb{R}^n; E)$, а пространство $W_{p,\gamma}^{[l]}(\mathbb{R}^n; E(A), E)$ – на $W_{p,\tilde{\gamma}}^{[l]}(\mathbb{R}^n; E(A), E)$. Более того, при этой подстановке (35) вырожденная задача (34) превращается в невырожденную задачу (12). Таким образом, из теоремы 6 действительно вытекает требуемое утверждение.

Замечание 4. В конкретных банаховых пространствах можно определять много разных положительных операторов. Рассматривая конкретные банаховы пространства вместо E и конкретные положительные дифференциальные или псевдодифференциальные операторы, конечные или бесконечные матрицы и т.п. вместо оператора A в ДОУ (12) и применяя теорему 6, можно доказывать максимальную регулярность разных классов краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных или систем уравнений.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский, *Интегральные представления функций и теоремы вложения*, Наука, М., 1975.
- [2] В. Г. Мазья, *Пространства С. Л. Соболева*, Изд-во ЛГУ, Ленинград, 1985.
- [3] H. Triebel, *Interpolation Theory. Function Spaces. Differential Operators*, North-Holland Publ., Amsterdam–New York, 1978.
- [4] H. Amann, “Operator-valued Fourier multipliers, vector-valued Besov spaces, and applications”, *Math. Nachr.*, **186** (1997), 5–56.
- [5] H. Amann, *Linear and Quasi-Linear Equations*, v. 1, Birkhäuser, Basel, 1995.
- [6] J.-L. Lions, J. Peetre, “Sur une classe d’espaces d’interpolation”, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **19**:1 (1964), 5–68.

- [7] В. Б. Шахмуров, “Коэрцитивные краевые задачи для сильно вырождающихся абстрактных уравнений”, *Докл. АН СССР*, **290**:3 (1986), 553–556.
- [8] В. Б. Шахмуров, “Теоремы вложения абстрактных функциональных пространств и их применения”, *Матем. сб.*, **134**:2 (1987), 260–273.
- [9] В. Б. Шахмуров, “Теоремы о компактных вложениях и приложения”, *Докл. АН СССР*, **241**:6 (1978), 1285–1287.
- [10] В. Б. Шахмуров, “Теоремы вложения и их приложения к вырожденным уравнениям”, *Дифференц. уравнения*, **24**:4 (1988), 672–682.
- [11] V. B. Shakhmurov, “Embedding theorems and maximal regular differential-operator equations in Banach-valued function spaces”, *J. Inequal. Appl.*, **2**:4 (2005), 329–345.
- [12] V. B. Shakhmurov, “Embedding and maximal regular differential operators in Sobolev–Lions spaces”, *Acta Math. Sin. (Engl. Ser.)*, **22**:5 (2006), 1493–1508.
- [13] V. B. Shakhmurov, “Coercive boundary value problems for regular degenerate differential-operator equations”, *J. Math. Anal. Appl.*, **292**:2 (2004), 605–620.
- [14] V. B. Shakhmurov, “Nonlinear abstract boundary value problems in vector-valued function spaces and applications”, *Nonlinear Anal.*, **67**:3 (2007), 745–762.
- [15] П. И. Лизоркин, “Обобщенное ливиллевское дифференцирование и функциональные пространства $L_p^r(E_n)$. Теоремы вложения”, *Матем. сб.*, **60**:3 (1963), 325–353.
- [16] A. Ashyralyev, “On well-posedness of the nonlocal boundary value problem for elliptic equations”, *Numer. Funct. Anal. Optim.*, **24**:1–2 (2003), 1–15.
- [17] J. P. Aubin, “Abstract boundary-value operators and their adjoint”, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, **43** (1970), 1–33.
- [18] D. L. Burkholder, “A geometrical condition that implies the existence of a certain singular integral of Banach space-valued functions”, *Conference on Harmonic Analysis in Honor of Antoni Zygmund*, vol. I, II (Chicago, Ill., 1981), Wadsworth Math. Ser., Wadsworth, Belmont, CA, 1983, 270–286.
- [19] Ю. А. Дубинский, “О некоторых дифференциально-операторных уравнениях произвольного порядка”, *Матем. сб.*, **90**:1 (1973), 3–22.
- [20] G. Dore, S. Yakubov, “Semigroup estimates and non coercive boundary value problems”, *Semigroup Forum*, **60**:1 (2000), 93–121.
- [21] R. Haller, H. Heck, A. Noll, “Mikhlin’s theorem for operator-valued Fourier multipliers in n variables”, *Math. Nachr.*, **244**:1 (2002), 110–130.
- [22] S. G. Krein, *Linear Differential Equations in Banach Space*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1971.
- [23] S. Yakubov, *Completeness of Root Functions of Regular Differential Operators*, Pitman Monogr. Surveys Pure Appl. Math., **71**, Longman Sci. & Tech., Harlow, 1994.
- [24] S. Yakubov, “A nonlocal boundary value problem for elliptic differential-operator equations and applications”, *Integral Equations Operator Theory*, **35**:4 (1999), 485–506.
- [25] S. Yakubov, Ya. Yakubov, *Differential-Operator Equations. Ordinary and Partial Differential Equations*, Chapman Hall/CRC Monogr. Surv. Pure Appl. Math., **103**, Chapman & Hall, Boca Raton, FL, 2000.
- [26] R. Denk, M. Hieber, J. Prüss, *$\mathcal{R}$ -Boundedness, Fourier Multipliers and Problems of Elliptic and Parabolic Type*, Mem. Amer. Math. Soc., **166**, no. 788, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.
- [27] A. Favini, “Su un problema al limit per certa equazioni astratte del secondo ordine”, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, **53** (1975), 211–230.
- [28] L. Weis, “Operator-valued Fourier multiplier theorems and maximal L_p -regularity”, *Math. Ann.*, **319**:4 (2001), 735–758.
- [29] E. M. Stein, *Singular Integrals and Differential Properties of Functions*, Princeton Math. Ser., **30**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1970.
- [30] В. С. Гулиев, “К теории мультипликаторов интегралов Фурье для функций со значениями в банаховых пространствах”, *Исследования по теории дифференцируемых функций многих переменных и ее приложениям*, ч. 17, Тр. МИАН, **214**, Наука, М., 1996, 164–181.

- [31] J. Bourgain, “Some remarks on Banach spaces in which martingale differences are unconditional”, *Ark. Mat.*, **21**:2 (1983), 163–168.
- [32] Ph. Clement, B. de Pagter, F.A. Sukochev, H. Witvlet, “Schauder decomposition and multiplier theorems”, *Studia Math.*, **138**:2 (2000), 135–163.
- [33] P. Kree, “Sur les multiplicateurs dans $\mathcal{F}L_p$ avec poids”, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **16**:2 (1966), 91–121.
- [34] D.S. Kurtz, R.L. Wheeden, “Result on weighted norm inequalities for multiplier”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **255** (1979), 343–362.
- [35] В.И. Горбачук, М.Л. Горбачук, *Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений*, Наукова думка, Киев, 1984.
- [36] T.R. McConnell, “On Fourier Multiplier Transformations of Banach-Valued Functions”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **285**:2 (1984), 739–757.
- [37] G. Pisier, “Les inégalités de Khintchine–Kahane d’après C. Borel”, Exp. No. 7, *Séminaire sur la Géométrie des Espaces de Banach* (1977–1978), École Polytech., Palaiseau, 1978.
- [38] П.И. Лизоркин, “ (L_p, L_q) -Мультипликаторы интегралов Фурье”, *Докл. АН СССР*, **152**:4 (1963), 808–811.
- [39] D. Lamberton, “Équations d’évolution linéaires associées à des semi-groupes de contractions dans les espaces L_p ”, *J. Funct. Anal.*, **72**:2 (1987), 252–262.
- [40] G. Dore, A. Venni, “On the closedness of the sum of two closed operators”, *Math. Z.*, **196**:2 (1987), 189–201.
- [41] M. Hieber, J. Prüss, “Heat kernels and maximal L_p - L_q -estimates for parabolic evolution equations”, *Comm. Partial Differential Equations*, **22**:9–10 (1997), 1647–1669.
- [42] S. Agmon, L. Nirenberg, “Properties of solutions of ordinary differential equations in Banach spaces”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **16**:2 (1963), 121–239.
- [43] S. Agmon, “On the eigenfunctions and on the eigenvalues of general elliptic boundary value problems”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **15**:2 (1962), 119–147.

В. Б. Шахмуров

Оканский университет, Стамбул, Турция

E-mail: veli.sahmurov@okan.edu.tr

Поступило

02.09.2005