Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. С. Кашин, Замечание об оценках ортомассивности,
Матем. заметки, 2008, том 84, выпуск 6, 948–951

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm6568>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 11:00:38

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Замечание об оценках ортомассивности

Б. С. Кашин

В работе [1] автором была введена характеристика сложности подмножества K единичного шара $B(H)$ гильбертова пространства H , названная ортомассивностью. *Ортомассивность* определяется последовательностью чисел $(n = 1, 2, \dots)$

$$OM_n(K) = n^{-1/2} \sup \sum_{j=1}^n (f_j, \varphi_j), \quad \{\varphi_j\}_{j=1}^n - \text{о.н.с.}, \quad \{f_j\}_{j=1}^n \subset K, \quad (1)$$

где $(\cdot, \cdot)$ – скалярное произведение в H и используется сокращение о.н.с. для ортонормированных систем в H .

Легко видеть, что всегда

$$\sup_{f \in K} \|f\|_H \leq OM_n(K) \leq n^{1/2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Поведение величин (1) связано с поведением колмогоровских поперечников $d_n(K, H)$ множества K , рассматриваемого как подмножество в H . Нетрудно проверить, в частности, что при $n = 1, 2, \dots$

$$OM_n(K) \geq n^{-1/2} \sum_{j=1}^n d_{j-1}(K, H). \quad (2)$$

Однако оценка (2) не всегда точна по порядку. Например, для случая, когда

$$K = \{X_t, 0 < t < 1\} \subset L^2(0, 1), \quad (3)$$

где

$$X_t(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leq x \leq t, \\ 0, & \text{если } t < x \leq 1, \end{cases}$$

в [1] отмечено порядковое соотношение

$$OM_n(K) \asymp \log n, \quad n \rightarrow \infty, \quad (4)$$

в то время как (2) дает лишь тривиальную оценку $OM_n(K) \geq 1$.

Оценка величин (1) связана с другими задачами из теории ортогональных рядов и комбинаторики. Так соотношение (4) фактически эквивалентно объединению классических теорем Меньшова–Радемахера и Меньшова о сходимости и расходимости почти

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-00799а).

всюду ортогональных рядов (см. [2; глава 9]). Таким образом эти классические теоремы можно рассматривать как утверждения о сложности семейства характеристических функций интервалов (3).

В приведенном ниже результате, по существу обобщающем доказательство теоремы Меньшова–Радемахера, дается оценка сверху ортомассивности, приводящая в ряде случаев к точным результатам. В дальнейшем через $\#A$ мы обозначаем число элементов в конечном множестве A .

ТЕОРЕМА. Пусть множество $F \subset B(H)$ таково, что найдутся конечные множества

$$V_0, V_1, \dots, V_R \subset H$$

такие, что

- 1) $0 \in V_q \subset 2^{-q/2}B(H)$, $0 \leq q \leq R$;
- 2) $\#V_q \leq h_q \cdot 2^q$, $0 \leq q \leq R$;
- 3) любой элемент $f \in F$ представим в виде

$$f = \sum_{q=0}^R \sum_{\mu=1}^{l_q} v_{\mu}^{(q)},$$

где $v_{\mu}^{(q)} \in V_q$, $1 \leq \mu \leq l_q$.

Тогда равномерно по $n = 1, 2, \dots$

$$OM_n(F) \leq \left(R \cdot \sum_{q=0}^R l_q h_q \right)^{1/2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя свойство 3) множества F и дважды применяя неравенство Коши, для произвольной пары $f \in F$, $\varphi \in H$ находим

$$\begin{aligned} (f, \varphi)^2 &= \left[\sum_{q=0}^R \left(\sum_{\mu=1}^{l_q} v_{\mu}^{(q)}, \varphi \right) \right]^2 \leq R \sum_{q=0}^R \left(\sum_{\mu=1}^{l_q} v_{\mu}^{(q)}, \varphi \right)^2 \leq R \sum_{q=0}^R l_q \cdot \sum_{\mu=1}^{l_q} (v_{\mu}^{(q)}, \varphi)^2 \\ &\leq R \sum_{q=0}^R l_q \sum_{v \in V_q} (v, \varphi)^2. \end{aligned} \quad (5)$$

Если теперь $\{\varphi_j\}_{j=1}^n$ – произвольная о.н.с. и $\{f_j\}_{j=1}^n \subset F$, то снова используя неравенство Коши, оценку (5), неравенство Бесселя и свойства 1), 2) семейства F , получаем

$$\begin{aligned} \left[n^{-1/2} \sum_{j=1}^n (f_j, \varphi_j) \right]^2 &\leq \sum_{j=1}^n (f_j, \varphi_j)^2 \leq \sum_{j=1}^n R \cdot \sum_{q=0}^R l_q \sum_{v \in V_q} (v, \varphi_j)^2 = R \sum_{q=0}^R l_q \sum_{v \in V_q} \sum_{j=1}^n (v, \varphi_j)^2 \\ &\leq R \sum_{q=0}^R l_q \sum_{v \in V_q} \|v\|_H^2 \leq R \sum_{q=0}^R l_q (\#V_q) \cdot 2^{-q} \leq R \sum_{q=0}^R l_q h_q, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Пусть при $d = 2, 3, \dots$

$$\pi_d = \{X_P; P = (0, t_1) \times \dots \times (0, t_d), 0 < t_i < 1, 1 \leq i \leq d\}$$

– множество характеристических функций d -мерных промежутков, рассматриваемое как подмножество в $L^2(0, 1)^d$.

СЛЕДСТВИЕ. При $d = 2, 3, \dots$

$$OM_n(\pi_d) \asymp (\log n)^d, \quad n \rightarrow \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для простоты ограничимся случаем $d = 2$.

а) Оценка сверху. Пусть при $r = 1, 2, \dots$

$$\pi_2(r) = \left\{ X_P : P = \left(0, \frac{a}{2^r}\right) \times \left(0, \frac{b}{2^r}\right), a, b \in \{1, \dots, 2^r - 1\} \right\}.$$

Для данного n выберем натуральное r так, что

$$2^{r-1} < n \leq 2^r. \quad (6)$$

Легко проверить, что для любой функции $f \in \pi_2$ найдется $\tilde{f} \in \pi_2(r)$ с $\|f - \tilde{f}\|_{L^2} \leq cn^{-1/2}$, откуда следует, что

$$OM_n(\pi_2) \leq OM_n(\pi_2(r)) + C, \quad (7)$$

где C – абсолютная постоянная.

Пусть промежуток P имеет вид

$$P = \left(0, \frac{a}{2^r}\right) \times \left(0, \frac{b}{2^r}\right), \quad a, b \in \{1, \dots, 2^r - 1\}.$$

С точностью до конечного множества точек имеет место равенство

$$\left(0, \frac{a}{2^r}\right) = \bigsqcup_{s \in \Lambda} \Delta_s,$$

где знак $\bigsqcup$ обозначает, как обычно, объединение непересекающихся множеств, Δ_s некоторый двоичный интервал длины 2^{-s} (т.е. интервал вида $((c-1)/2^s, c/2^s)$, $c \in \{1, \dots, 2^s\}$), а Λ – некоторое подмножество набора $\{1, \dots, r\}$. Аналогично

$$\left(0, \frac{b}{2^r}\right) = \bigsqcup_{m \in \Lambda'} \Delta'_m$$

и

$$X_P = \sum_{s \in \Lambda, m \in \Lambda'} X_{\Delta_s \times \Delta'_m}. \quad (8)$$

Нетрудно проверить, что при $q = 1, 2, \dots, 2r$ в представление (8) входит $\leq 2q$ характеристических функций двумерных двоичных интервалов площади 2^{-q} . Всего же имеется $\leq 2q \cdot 2^q$ двоичных промежутков площади 2^{-q} , лежащих в $(0, 1)^2$. Применяя теорему в случае, когда $F = \pi_2(r)$, $R = 2r$ и при $q = 0, 1, \dots, R$, V_q – семейство двумерных двоичных интервалов площади 2^{-q} , мы находим

$$OM_n(\pi_2(r)) \leq \left(R \cdot \sum_{q=1}^R q^2\right)^{1/2} \leq 4R^2 \leq 16r^2 \leq 16(\log_2 n + 1)^2.$$

Из последнего неравенства и (7) вытекает оценка сверху.

б) Оценка снизу получается, если при $n = p^2$, $p = 2, 3, \dots$, взять в качестве о.н.с. $\{\varphi_j\}_{j=1}^n$ двукратную систему

$$\{\psi_{j_1}(x)\psi_{j_2}(y), 1 \leq j_1, j_2 \leq p\},$$

где $\{\psi_j(x)\}_{j=1}^p$ – функции о.н.с. Меньшова (см., например, [2; теорема 9.6]), для которых

$$\int_0^{t_j} \psi_j(x) dx > c(\log p)p^{-1/2}, \quad t_j \in (0, 1), \quad 1 \leq j \leq \frac{p}{2}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{1 \leq j_1, j_2 \leq p/2} (\psi_{j_1}(x) \psi_{j_2}(y), X_{[0, t_{j_1}] \times [0, t_{j_2}]}(x, y)) \\ & \geq \frac{1}{p} \sum_{1 \leq j_1, j_2 \leq p/2} c^2 (\log p)^2 / p \geq c' (\log n)^2, \quad c' > 0, \end{aligned}$$

что и требовалось.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Б. С. Кашин, *Матем. заметки*, **72**:4 (2002), 509–515. [2] Б. С. Кашин, А. А. Саакян, *Ортогональные ряды*, АФЦ, М., 1999.

Б. С. Кашин

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: kashin@mi.ras.ru

Поступило

01.08.2008