Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Себельдин, Д. С. Чистяков, Определяемость абелевых групп центром их кольца эндоморфизмов, *Матем. заметки*, 2008, том 84, выпуск 6, 952–954

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm6569>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 15:25:23

Определяемость абелевых групп центром их кольца эндоморфизмов

А. М. Себельдин, Д. С. Чистяков

Будем говорить, что абелева группа $A \in \mathbf{X}$ определяется центром своего кольца эндоморфизмов $E(A)$ в классе абелевых групп $\mathbf{X}$, если всякий раз из изоморфизма $C(E(A)) \cong C(E(B))$, где $B \in \mathbf{X}$, следует изоморфизм $A \cong B$. Подкласс класса $\mathbf{X}$ групп, определяющихся центром своего кольца эндоморфизмов в классе абелевых групп $\mathbf{X}$, будем обозначать через $\mathbf{X}(\text{сеп})$. Если $\mathbf{X}(\text{сеп})$ содержится в нулевом классе (т.е. либо $\mathbf{X}(\text{сеп}) = \{0\}$, либо $\mathbf{X}(\text{сеп}) = \emptyset$), то класс $\mathbf{X}$ будем называть *NC-классом*. То есть, если некоторый класс $\mathbf{X}$ абелевых групп является NC-классом, то это означает, что для любой группы $G \in \mathbf{X}$ найдется не изоморфная ей группа $H \in \mathbf{X}$ такая, что $C(E(G)) \cong C(E(H))$. Класс $\mathbf{X}$ назовем *A-классом*, если с каждой группой $A \in \mathbf{X}$ он содержит и прямую сумму ее копий $A_\alpha = \bigoplus_\alpha A$ для любого кардинала α . Класс $\mathbf{X}$ назовем *AB-классом*, если он не является A-классом, но замкнут относительно конечных прямых сумм, т.е. $A, B \in \mathbf{X}$ влечет $A \oplus B \in \mathbf{X}$. Положим $P(A) = \{p \in P \mid pA = A\}$, где P – множество всех простых чисел.

Через $\mathbf{A}, \mathbf{F}, \mathbf{L}, \mathbf{F}_{\text{cd}}, \mathbf{F}_1, \mathbf{F}_n, \mathbf{S}$ обозначим соответственно классы всех абелевых групп, абелевых групп без кручения, периодических абелевых групп, вполне разложимых абелевых групп без кручения, абелевых групп без кручения ранга 1, вполне разложимых абелевых групп без кручения фиксированного конечного ранга n , сепарабельных абелевых групп без кручения. Остальные обозначения стандартны и могут быть найдены в [1], [2] или вводятся по ходу изложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Классы $\mathbf{A}, \mathbf{F}, \mathbf{L}, \mathbf{F}_{\text{cd}}, \mathbf{S}$ являются NC-классами.*

Доказательство предложения следует из того факта, что любой A-класс является NC-классом. Действительно, поскольку $C(E(A)) \cong C(E(A_\alpha))$, то в качестве группы B достаточно взять группу A_α с $\alpha = 2^{r(A)}$.

ТЕОРЕМА 2. *Любой AB-подкласс $\mathbf{L}(AB)$ класса $\mathbf{L}$ является NC-классом.*

Доказательство. Пусть

$$A = \bigoplus_{p \in S(A)} A_p, \quad S(A) = \{p \in P \mid A_p \neq 0\},$$

тогда $C(E(A)) \cong \prod_{p \in S(A)} C(E(A_p))$. Далее рассматриваем примарный случай. Группу H_p построим следующим образом. Если A_p – ограниченная группа, $A_p = A_g \oplus \langle g \rangle$, где $o(g) = p^k$ – максимальный среди всех порядков, то $H_p = \langle g \rangle$, если $A_p \neq 0$, и $H_p = \langle g \rangle \oplus \langle g \rangle$, если $A_p = 0$. Пусть $A_p = B_p \oplus D_p$ – нередуцированная группа, где D_p – делимая часть группы A_p . В этом случае полагаем

$$H_p = B_p \oplus \bigoplus_{i=1}^{n+1} Z(p^\infty),$$

если $r(D_p) = n < \infty$, и

$$H_p = B_p \oplus Z(p^\infty),$$

если $r(D_p) = \infty$. Если A_p – неограниченная редуцированная группа, то

$$A_p = \langle a_1 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle a_k \rangle \oplus A', \quad A' = \langle a_{k+1} \rangle \oplus A'', \quad o(a_k) = p^{n(k)},$$

где $1 < n(1) < \cdots < n(k) < \cdots$, $k \in \mathbb{N}$. В качестве H_p берем группу

$$H_p = \langle a_2 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle a_k \rangle \oplus A'.$$

ЛЕММА 3. Пусть G и H – абелевы группы без кручения ранга 1, $\tau(G) \leq \tau(H)$. Тогда $C(E(G \oplus H)) \cong E(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $E(G) \cong R_1$, $E(H) \cong R_2$, где R_1, R_2 – подкольца поля рациональных чисел. Если $\tau(G) = \tau(H)$, то можно считать, что $R_1 = R_2 = R$, поэтому $C(E(G \oplus H)) \cong R$. Пусть $\tau(G) < \tau(H)$. Выберем такие ненулевые элементы $g \in G, h \in H$, что $\chi(g) < \chi(h)$. Существует единственный $\varphi \in \text{Hom}(G, H)$, для которого $\varphi(g) = h$. Так как $\text{Hom}(H, G) = 0$, то для любого $\eta \in C(E(G \oplus H))$ найдется $r_2 \in R_2$ такой, что $\eta(h) = r_2 h$. Тогда

$$s\eta(h) = sr_2 h = sr_2 \varphi(g) = \varphi(sr_2 g) = s\eta\varphi(g) = s\varphi\eta(g) = s\varphi(\eta(g))$$

для некоторого $s \in \mathbb{Z}$. Из инъективности φ следует, что $\eta(g) = r_2 g$ и $r_2 \in R_1$. Откуда $C(E(G \oplus H)) \cong R_1$.

ЛЕММА 4. Пусть G – сепарабельная абелева группа без кручения, H – абелева группа без кручения ранга 1 и тип группы H больше типа любого прямого слагаемого ранга 1 группы G . Тогда центр кольца $E(G \oplus H)$ изоморфен подкольцу E кольца $E(H)$, причем $P(E, +) = P(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем такие ненулевые элементы $g \in G, h \in H$, что $\chi(g) < \chi(h)$. Рассмотрим прямое слагаемое A группы G конечного ранга n , содержащее элемент $g \in A = A_1 \oplus \dots \oplus A_n$, где все $A_i \neq 0$. Ясно, что существует $\varphi \in \text{Hom}(A, H)$, переводящий g в h , который можно рассматривать как эндоморфизм группы $G \oplus H$. Из перестановочности его ограничения φ_i на каждом слагаемом A_i , $i = 1, \dots, n$, с произвольным элементом $\eta \in C(E(G \oplus H))$ следует, что $\eta \in R_i \cong E(A_i)$, $R_i \subset \mathbb{Q}$. Поэтому центр кольца $E(G \oplus H)$ изоморфен подкольцу E кольца $E(H)$, причем $P(E, +) = P(G)$.

Пусть G – сепарабельная группа без кручения и $\Omega(G)$ – множество типов всех прямых слагаемых ранга 1 группы G . Введем следующее отношение эквивалентности на множестве $\Omega(G)$. Два типа $s, t \in \Omega(G)$ считаем эквивалентными, если существуют $r_1, \dots, r_n \in \Omega(G)$ такие, что типы r_i и r_{i+1} сравнимы для всех $i = 0, 1, \dots, n$, где мы полагаем $r_0 = s, r_{n+1} = t$. Запишем разбиение множества $\Omega(G)$ на непересекающиеся классы эквивалентности: $\Omega(G) = \bigcup_{k \in K} \Omega(k)$. Множество типов $\Omega(G)$ назовем *связанным*, если $|K| = 1$.

ТЕОРЕМА 5. Любые AB -подклассы $\mathbf{F}_{\text{cd}}(AB)$ класса $\mathbf{F}_{\text{cd}}$ и $\mathbf{S}(AB)$ класса $\mathbf{S}$ являются NC -классами.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $G \in \mathbf{F}_{\text{cd}}(AB)$ ($G \in \mathbf{S}(AB)$), $\Omega(G)$ – множество всех различных типов прямых слагаемых ранга 1 группы G . Если хотя бы одно из прямых слагаемых ранга 1 группы G не почти делимо, то согласно [3], [4] можно построить группу H , не изоморфную группе G и такую, что $E(G) \cong E(H)$, причем $r(H) = r(G)$. Пусть теперь все слагаемые ранга 1 группы G почти делимы. Предположим, что $\Omega(G)$ – связанное множество. Покажем, что тогда существует группа $H \in \mathbf{F}_{\text{cd}}(AB)$ ($H \in \mathbf{S}(AB)$) такая, что G не изоморфна H и $C(E(G)) \cong C(E(H))$. Ясно, что $C(E(G)) \cong R \subseteq \mathbb{Q}$. Группу H построим следующим образом: если $r(G) = \infty$, то $H = (R, +)$, если $r(G) = n < \infty$, то $H = \bigoplus_{i=1}^{n+1} (R, +)$. Ясно, что G не изоморфна H и $C(E(G)) \cong C(E(H))$.

Пусть теперь $G = \bigoplus_{i \in I} G_i$ – вполне разложимая абелева группа без кручения, и пусть $G = \bigoplus_{\tau \in \Omega(G)} G^{(\tau)}$ – ее каноническое разложение, где

$$G^{(\tau)} = \bigoplus_{i \in I(\tau)} G_i, \quad I(\tau) = \{i \in I \mid \tau(G_i) = \tau\},$$

и $\Omega(G)$ – несвязанное множество. Согласно [3] можно считать, что все прямые слагаемые ранга 1 почти делимы и, следовательно, существуют максимальные элементы в $\Omega(G)$. Пусть $\Omega(G) = \bigcup_{k \in K} \Omega(k)$, тогда

$$G = \bigoplus_{k \in K} G_k, \quad \text{где } G_k = \bigoplus_{\tau \in \Omega(k)} G^{(\tau)}, \quad \Omega(k) = \Omega(G_k)$$

и слагаемые G_k , $k \in K$, вполне характеристичны в G . Поэтому $C(E(G)) \cong \prod_{k \in K} C(E(G_k))$ и $C(E(G_k)) \cong R_k \subseteq \mathbb{Q}$ для всех $k \in K$. Для каждой группы G_k , $k \in K$, можно построить (см. случай связанного множества $\Omega(G)$) неизоморфную группу H_k , $k \in K$, такую, что $C(E(G_k)) \cong C(E(H_k))$. Зафиксируем одну из групп H_m , $m \in K$, и рассмотрим центр $C(E(G_m)) \cong C(E(H_m))$. Если в группе G существует прямое слагаемое ранга 1, изоморфное $(R_m, +)$, то строим группу H следующим образом:

$$H = H_m \oplus \bigoplus_{m \neq k \in K} G_k.$$

Очевидно, что $C(E(G)) \cong C(E(H))$ и $G \not\cong H$.

Пусть в группе G не существует прямого слагаемого ранга 1, изоморфного $(R_m, +)$, и пусть τ' – максимальный элемент множества $\Omega(G_m)$ и G' – группа без кручения ранга 1 типа τ' . Если ранг $r(G^{(\tau')})$ конечен, то полагаем $H = G \oplus G'$. В противном случае полагаем

$$H = G' \oplus \bigoplus_{\tau' \neq \tau \in \Omega(G)} G^{(\tau)}.$$

Каждый раз получаем группу H , неизоморфную группе G , и $C(E(G)) \cong C(E(H))$.

Пусть теперь $G \in \mathbf{S}(AB)$. Согласно [4] можно считать, что все прямые слагаемые ранга 1 почти делимы и, следовательно, в $\Omega(G) = \bigcup_{k \in K} \Omega(k)$ существуют максимальные элементы. Случай $|K| = 1$ рассмотрен выше. Зафиксируем один из максимальных элементов τ' множества $\Omega(G)$. Пусть G' – группа без кручения ранга 1 типа τ' . Предположим, что в прямом разложении G не существует прямого слагаемого, изоморфного $G' \oplus G'$. Тогда полагаем $H = G \oplus G'$. Пусть теперь в прямом разложении группы G найдется слагаемое, изоморфное $G' \oplus G'$. Рассмотрим подгруппу $G(\tau')$ группы G . Группа $G(\tau')$ однородна и вполне характеристична и поэтому сепарабельна. Полагаем $H = G \oplus G(\tau')$, если $G(\tau')$ не выделяется прямым слагаемым в G , и $H = G \oplus G'$, если $G(\tau')$ выделяется прямым слагаемым в G . В каждом из случаев получаем $C(E(G)) \cong C(E(H))$ и $G \not\cong H$.

Из работ [3], [4] следует

Предложение 6. *Группа A принадлежит классу $\mathbf{F}_n(\text{sep})$, если она почти делима и все типы прямых слагаемых ранга 1 фиксированного разложения попарно несравнимы, либо она делимая группа.*

Следствие 7. *Класс $\mathbf{F}_1(\text{sep})$ состоит в точности из почти делимых групп ранга 1.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Л. Фукс, *Бесконечные абелевы группы*, т. 1, Мир, М., 1974. [2] Л. Фукс, *Бесконечные абелевы группы*, т. 2, Мир, М., 1977. [3] А. М. Себельдин, *Матем. заметки*, **11:4** (1972), 403–408. [4] S. Bazzoni, C. Metelli, *Conf. Abelian Groups and Their Relationship to the Theory of Modules* (INDAM, Rome, 1977), *Symp. Math.*, **23**, Academic Press, London–New York, 1979, 259–285.

А. М. Себельдин

Нижегородский государственный
педагогический университет
E-mail: sebelдинam@rambler.ru

Поступило

25.10.2006

Исправленный вариант

12.05.2008

Д. С. Чистяков

Нижегородский государственный
педагогический университет
E-mail: chistяkovds@yandex.ru