Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. П. Чулков, О числе Милнора эквивариантной особенности, *Матем. заметки*, 2002, том 71, выпуск 6, 950–953

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm657>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 17:42:16

О ЧИСЛЕ МИЛНОРА ЭКВИВАРИАНТНОЙ ОСОБЕННОСТИ

С. П. Чулков

Введение. Мы доказываем нижнюю оценку на число Милнора конечнократного роста голоморфной функции с нулевой 2-струей инвариантного относительно нетривиального представления группы $\mathbb{Z}_p$ (p – простое). Эта оценка позволяет дать новое (отличное от приведенного в [1]) доказательство гипотезы Казаряна о ростках функций, инвариантных относительно действия компактных групп Ли.

Рассмотрим пространство $\mathbb{C}^n$ с нетривиальным представлением группы $\mathbb{Z}_p$ (p – простое число) на нем.

ТЕОРЕМА. *Допустим, что $f: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ – инвариантный относительно представления группы $\mathbb{Z}_p$ росток голоморфной функции с изолированной критической точкой в 0 и его 2-струя $j_0^2 f$ равна 0. Тогда для числа Милнора $\mu(f)$ роста f в 0 выполнено неравенство $\mu(f) \geq (p-1)$.*

Обозначим через $\text{Diff}_0(\mathbb{C}^n)$ группу ростков диффеоморфизмов $(\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$.

СЛЕДСТВИЕ. *Предположим, что $f: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ – росток голоморфной функции с изолированной критической точкой в 0 и его 2-струя $j_0^2 f$ равна 0. Пусть G – некоторая компактная группа Ли его симметрий, т.е. подгруппа $\text{Diff}_0(\mathbb{C}^n)$ такая, что $f \circ g \equiv f$ для любого $g \in G$. Тогда G дискретна.*

ЗАМЕЧАНИЕ. Последнее утверждение было высказано Казаряном в качестве гипотезы (см. [2] и его же приложение к русскому переводу книги [3]) и было доказано Васильевым в [1].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ. Предположим противное. Так как голоморфное действие компактной группы Ли на комплексном гладком многообразии вблизи своей неподвижной точки голоморфно эквивалентно линейному (см., например, [4]), мы можем полагать, что наша группа G является подгруппой $GL(\mathbb{C}^n)$. Кроме того, мы можем считать, что $G = S^1$, так как любая недискретная компактная группа Ли содержит такую подгруппу. отождествив ее с единичной окружностью в $\mathbb{C}^1$, получаем, что для каждого простого p на пространстве $\mathbb{C}^n$ возникает представление группы $\mathbb{Z}_p$ – мультипликативной группы корней p -ой степени из единицы. Для каждого p росток f инвариантен относительно этого представления, но для достаточно больших p представление нетривиально. Следовательно, применив основную теорему, мы приходим к противоречию с условием изолированности f .

Следующая серия примеров показывает, что теорема дает точную по порядку величины оценку. А именно при фиксированном n нижняя оценка числа Милнора для представлений без тривиальных слагаемых линейна по p (можно представить себе, что она могла бы расти как p в какой-то степени, зависящей от n).

ПРИМЕР 1. Рассмотрим следующее представление группы $\mathbb{Z}_p$ ($p > 2$ – простое число) на пространстве $\mathbb{C}^n = \{z = (z_1, \dots, z_n) \mid z_i \in \mathbb{C}\}$ при $n \geq 2$:

$$Tg: (z_1, z_2, \dots, z_{2l}, z_{2l+1}, \dots, z_n) \mapsto (gz_1, g^{p-2}z_2, \dots, g^{p-2^{2l}-1}z_{2l}, g^{2^{2l}}z_{2l+1}, \dots), \quad g \in \mathbb{Z}_p.$$

Здесь и далее мы отождествляем группу $\mathbb{Z}_p$ с мультипликативной группой корней p -й степени из единицы. Тогда функция $f_{n,p}(z) = z_1^2 z_2 + z_2^2 z_3 + z_3^2 z_4 + \dots + z_{(n-1)}^2 z_n + z_n^p$ инвариантна относительно данного представления. Число Милнора функции $f_{n,p}$ в нуле равно локальному индексу нулевого решения следующей системы уравнений

$$\frac{\partial f_{n,p}}{\partial z_1}(z) = \frac{\partial f_{n,p}}{\partial z_2}(z) = \dots = \frac{\partial f_{n,p}}{\partial z_n}(z) = 0.$$

В нашем случае получаем систему

$$\left\{ \begin{array}{l} 2z_1 z_2 = 0, \\ z_1^2 + 2z_2 z_3 = 0, \\ z_2^2 + 2z_3 z_4 = 0, \\ \dots\dots\dots \\ z_{n-1}^2 + pz_n^{p-1} = 0. \end{array} \right. \quad (*n)$$

Индукцией по n легко показать, что нулевое решение системы $(*)n$ изолировано, следовательно, проводимые вычисления корректны. Явный вид $(*)n$ дает рекуррентное соотношение на индексы системы и, следовательно, на числа Милнора ростков $f_{n,p}$, при различных n . А именно

$$\mu(f_{n,p}) = \mu(f_{n-1,p}) + 2\mu(f_{n-2,p}).$$

Откуда находим, что $\mu(f_{n,p}) = (2^n p + (-1)^{n+1}(p-3))/3$.

Заметим, что в этой серии примеров начало координат является единственной неподвижной точкой.

Следующая серия примеров показывает, что аналогичная (по порядку величины) оценка для $\mathbb{Z}_m$, где m не обязательно простое, неверна.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим следующее представление группы $\mathbb{Z}_m$ (мы отождествляем $\mathbb{Z}_m$ с мультипликативной группой корней m -й степени из единицы) при $m = p_1 p_2 (p_1 + p_2)$, где p_1 и p_2 – различные простые числа, на пространстве $\mathbb{C}^3 = \{z = (z_1, z_2, z_3) \mid z_i \in \mathbb{C}\}$:

$$T_g: (z_1, z_2, z_3) \mapsto (g^{p_2} z_1, g^{p_1} z_2, g^{m-p_1-p_2} z_3), \quad g \in \mathbb{Z}_m.$$

Тогда функция $f(z) = z_1^{p_1(p_1+p_2)} + z_2^{p_2(p_1+p_2)} + z_3^{p_1p_2} + z_1z_2z_3$ инвариантна относительно данного представления и имеет изолированную критическую точку в начале координат. По формуле Кушниренко для числа Милнора (см., например, [5]) получаем, $\mu(f) = p_1p_2 + (p_1 + p_2)^2 - 1$.

Заметим, что некоторые точки $\mathbb{S}^3$ имеют орбиты максимально возможной длины — m , т.е. данное представление не пропускается через какую-либо подгруппу.

Доказательства. Сделав подходящую замену координат, можно считать, что представление группы $\mathbb{Z}_p$ имеет следующий вид:

$$T_g: (z_1, \dots, z_n) \mapsto (g^{a_1} z_1, \dots, g^{a_n} z_n),$$

где T_g – линейный оператор, соответствующий элементу $g \in \mathbb{Z}_p$, а $a_1, \dots, a_n$ ($0 \leq a_i < p$) – фиксированные целые числа. Не ограничивая общности будем полагать, что если среди чисел $a_1, \dots, a_n$ есть равные нулю, то это первые k . То есть $L = \{z \in \mathbb{C}^n \mid z = (z_1, \dots, z_k, 0, \dots, 0), z_i \in \mathbb{C}\}$ есть подпространство неподвижных точек относительно данного представления группы $\mathbb{Z}_p$. Обозначим через L_g подпространство неподвижных точек оператора T_g , а через $\mu(f|_{L_g})$ число Милнора ограничения роста f на подпространство L_g в точке 0 (ограничение $f|_{L_g}$ имеет конечнократную (изолированную) особенность в 0 $\in L_g$, см., например, [6]). Если L_g есть только точка 0, считаем, что $\mu(f|_{L_g}) = 1$. Так как p простое, то для всех $g \in \mathbb{Z}_p$, отличных от 1, пространство $L_g = L$, а для 1 пространство L_1 совпадает со всем $\mathbb{C}^n$.

ЛЕММА 1. Пусть $f: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ – росток голоморфной функции с изолированной особой точкой в 0 и его 2-струя $j_0^2 f$ равна 0. Предположим также, что f инвариантен относительно не тривиального представления группы $\mathbb{Z}_p$. Тогда $\mu(f) > \mu(f|_L)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $k = 0$, т.е. единственной неподвижной точкой действия группы является начало координат, то утверждение леммы, очевидно, выполнено. Предположим, что $k > 0$. Пусть $I_{\nabla f}$ – идеал кольца $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0}$ голоморфных ростков в $(\mathbb{C}^n, 0)$, порожденный множеством $\{\partial f / \partial z_1, \dots, \partial f / \partial z_n\}$; $I_{\nabla(f|_L)}$ – идеал кольца $\mathcal{O}_{L, 0}$ голоморфных ростков в $(L, 0)$, порожденный множеством $\{\partial(f|_L) / \partial z_1, \dots, \partial(f|_L) / \partial z_k\}$. Обозначим через $A = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0} / I_{\nabla f}$ и $B = \mathcal{O}_{L, 0} / I_{\nabla(f|_L)}$ соответствующие факторпространства. Имеем $\mu(f) = \dim_{\mathbb{C}} A$ и $\mu(f|_L) = \dim_{\mathbb{C}} B$ (см., например, [7]). Пусть $a_1, \dots, a_l \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_k]$ – представители какого-нибудь базиса B . Тогда никакая нетривиальная линейная комбинация с комплексными коэффициентами многочленов $a_1, \dots, a_l$ (рассматриваемых как элементы $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0}$) не принадлежит идеалу $I_{\nabla f}$. Действительно, в силу эквивариантности разложение f в ряд Тейлора не может содержать мономы вида

$$az_j \prod_{i=1}^k z_i^{\alpha_i}, \quad \text{где } j > k, \quad a \in \mathbb{C}, \quad \alpha_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

Следовательно,

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}: \quad \left. \frac{\partial f}{\partial z_i} \right|_L = \frac{\partial(f|_L)}{\partial z_i},$$

в частности,

$$\left. \frac{\partial f}{\partial z_i} \right|_L \equiv 0 \quad \text{при } i < k.$$

То есть для ростка f операция ограничения на L коммутирует с операцией взятия частной производной по любой координате, откуда и следует наше утверждение. Более того, очевидно, что никакая нетривиальная линейная комбинация многочленов $z_{k+1}, a_1, \dots, a_l$ также не принадлежит идеалу $I_{\nabla f}$, так как $j_0^2 f = 0$. Следовательно, $\dim A > \dim B$.

Обозначим через $\mu_{\mathbb{Z}_p}(f) \in R(\mathbb{Z}_p)$ эквивариантное число Милнора ростка f в 0, где $R(\mathbb{Z}_p)$ – кольцо комплексных представлений группы $\mathbb{Z}_p$. Эквивариантное число Милнора $\mu_{\mathbb{Z}_p}(f)$ есть элемент $R(\mathbb{Z}_p)$, соответствующий группе исчезающих гомологий f как векторному пространству с естественным представлением группы $\mathbb{Z}_p$ (см., например, [6], [8]). Элемент V кольца $R(G)$ комплексных представлений конечной группы G определяется своим характером $[V](g) = \text{tr } T_g|_V$ как функцией на группе G ($\text{tr } T_g|_V$ – след оператора $T_g|_V$). В силу [6] значение характера, соответствующего $\mu_{\mathbb{Z}_p}(f)$ на элементе $g \in \mathbb{Z}_p$, вычисляется по формуле

$$[\mu_{\mathbb{Z}_p}(f)](g) = (-1)^{1 - \dim L_g} \mu(f|_{L_g}).$$

ЛЕММА 2. *Не существует инвариантного относительно нетривиального представления группы $\mathbb{Z}_p$ конечнократного ростка голоморфной функции $f: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ с нулевой 2-струей $j_0^2 f = 0$, эквивариантное число Милнора $\mu_{\mathbb{Z}_p}(f)$ которого является прямой суммой нескольких тривиальных одномерных представлений.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Тогда $\mu(f) = [\mu_{\mathbb{Z}_p}(f)](1) = [\mu_{\mathbb{Z}_p}(f)](g) = (-1)^{n-k} \mu(f|_L)$ для любого нетривиального элемента $g \in \mathbb{Z}_p$. Следовательно, $(n - k)$ четно и $\mu(f) = \mu(f|_L)$, что невозможно в силу леммы 1.

Рассмотрим стандартное представление группы $\mathbb{Z}_p$ на пространстве $\mathbb{C}^p = \{(z_1, \dots, z_p) \mid z_i \in \mathbb{C}\}$ циклическими перестановками координат. Обозначим через $W \in R(\mathbb{Z}_p)$ класс представления, полученного ограничением указанного стандартного представления на гиперплоскость $z_1 + \dots + z_p = 0$.

ЛЕММА 3. *Пусть $f: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ – конечнократный росток голоморфной функции, инвариантный относительно нетривиального представления группы $\mathbb{Z}_p$. Тогда его эквивариантное число Милнора $\mu_{\mathbb{Z}_p}(f)$ представимо в виде*

$$\mu_{\mathbb{Z}_p}(f) = a\tilde{C} + bW, \quad (*)$$

где $a, b \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, а через $\tilde{C}$ обозначен класс тривиального одномерного представления в $R(\mathbb{Z}_p)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $V_\varepsilon \subset \mathbb{C}^n$ слой Милнора роста f в 0. Так как росток f инвариантен относительно представления группы $\mathbb{Z}_p$, на V_ε возникает естественное действие группы. Обозначим через $\chi_{\mathbb{Z}_p}(V_\varepsilon) \in R(\mathbb{Z}_p)$ эквивариантную эйлерову характеристику V_ε (см., например, [6], [8]). В силу [9] существует конечная триангуляция фактора $V_\varepsilon/\mathbb{Z}_p$, следовательно, существует конечное клеточное разбиение V_ε , согласованное с действием группы. Это означает, что каждая клетка разбиения под действием элемента группы либо переходит в другую клетку, либо соответствующее преобразование на ней совпадает с тождественным. Фиксируем разбиение V_ε , согласованное с действием группы. В этом случае на векторных пространствах клеточных цепей $C_i(V_\varepsilon, \mathbb{C})$ возникает естественное представление группы $\mathbb{Z}_p$. Обозначим через $\tilde{C}_i(V_\varepsilon) \in R(\mathbb{Z}_p)$ классы $\mathbb{Z}_p$ -модулей $C_i(V_\varepsilon, \mathbb{C})$. Эквивариантная эйлерова характеристика может быть вычислена по формуле $\chi_{\mathbb{Z}_p}(V_\varepsilon) = \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i \tilde{C}_i(V_\varepsilon)$. Но так как p простое, $\tilde{C}_i(V_\varepsilon)$, очевидно, представляются в виде (*). Следовательно, эквивариантная эйлерова характеристика $\chi_{\mathbb{Z}_p}(V_\varepsilon)$ также представляется в виде (*), но уже с целыми коэффициентами. Теперь, воспользовавшись соотношением $\chi_{\mathbb{Z}_p}(V_\varepsilon) = \tilde{\mathbb{C}} + (-1)^{n-1} \mu_{\mathbb{Z}_p}(f)$ и определением эквивариантного числа Милнора $\mu_{\mathbb{Z}_p}(f)$ (в соответствии с которым $\mu_{\mathbb{Z}_p}(f)$ является “настоящим”, а не виртуальным представлением группы $\mathbb{Z}_p$), легко получить требуемое утверждение.

Утверждение теоремы теперь является простым следствием лемм 2 и 3, так как лемма 2 гарантирует, что коэффициент b в представлении (*) отличен от нуля и, следовательно, число Милнора

$$\mu(f) = [\mu_{\mathbb{Z}_p}(f)](1) = a + b \dim W \geq p - 1.$$

Автор благодарен С. М. Гусейн-Заде за постановку задачи и полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васильев В. А. // Функцион. анализ и его прилож. 1999. Т. 33. №3. С. 73–75.
2. Казарян М. Э. // УМН. 1995. Т. 50. №4. С. 45–70.
3. Васильев В. А. Лагранжевы и лежандровы характеристические классы. М.: Изд-во МЦНМО, 1999.
4. Кушниренко А. Г. // Функцион. анализ и его прилож. 1967. Т. 1. №1. С. 103–104.
5. Кушниренко А. Г. // Функцион. анализ и его прилож. 1967. Т. 9. №1. С. 74–75.
6. Wall С. Т. С. // Bull. London Math. Soc. 1980. V. 12. №3. Р. 169–175.
7. Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений. Т. 1. М.: Наука, 1982.
8. Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений. Т. 2. М.: Наука, 1984.
9. Yang С. Т. // Bull. Amer. Math. Soc. 1963. V. 69. Р. 405–408.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: serpchulkov@mtu-net.ru

Поступило
17.12.2001