Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Е. Слюсарчук, Необходимые и достаточные условия существования и ε -единственности ограниченных решений нелинейного уравнения $x' = f(x) - h(t)$, *Матем. заметки*, 2011, том 90, выпуск 1, 137–142

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm6570>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 17:00:27

Необходимые и достаточные условия существования и ε -единственности ограниченных решений нелинейного уравнения $x' = f(x) - h(t)$

В. Е. Слюсарчук

Введено понятие ε -единственного ограниченного решения нелинейного дифференциального уравнения $x' = f(x) - h(t)$, где $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывная функция и $h(t)$ – произвольная непрерывная и ограниченная на $\mathbb{R}$ функция. Найдены необходимые и достаточные условия существования и ε -единственности ограниченных решений этого уравнения.

Библиография: 16 названий.

1. Постановка основной задачи. Обозначим через C^0 банахово пространство непрерывных и ограниченных на $\mathbb{R}$ функций $x = x(t)$ со значениями в $\mathbb{R}$ с нормой $\|x\|_{C^0} = \sup_{t \in \mathbb{R}} |x(t)|$, через C^1 – банахово пространство функций $x \in C^0$, производная каждой из которых является элементом пространства C^0 , с нормой $\|x\|_{C^1} = \max\{\|x\|_{C^0}, \|x'\|_{C^0}\}$, а через $\mathcal{C}$ – множество всех непрерывных функций $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t)) - h(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

где $f \in \mathcal{C}$ и $h \in C^0$.

Зафиксируем произвольное число $\varepsilon \geq 0$. Решение $x \in C^1$ уравнения (1) будем называть ε -единственным, если это решение единственное или для каждого другого решения $y \in C^1$ этого уравнения в случае $\varepsilon > 0$ выполняется соотношение $\|y - x\|_{C^0} \leq \varepsilon$.

Укажем необходимые и достаточные условия, при выполнении которых дифференциальное уравнение (1) для каждой функции $h \in C^0$ имеет ε -единственное решение $x \in C^1$.

Очевидно, что понятия единственности и ε -единственности (при $\varepsilon = 0$) решений уравнения (1) совпадают.

Заметим, что уравнение (1) было объектом исследования в [1]–[6]. В [1]–[3] и [5] получены необходимые и достаточные условия существования, а также условия существования и единственности ограниченных и существенно ограниченных решений этого уравнения. Необходимые и достаточные условия липшицевой обратимости оператора $d/dt - f$ в пространствах C^0 и $L_p(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $1 \leq p \leq \infty$, приведены в [4], [6].

Задача об ограниченных ε -единственных решениях уравнения (1) рассматривается впервые. Для решения этой задачи используются методы и результаты, рассмотренные в [1]–[6]. Для систем нелинейных дифференциальных уравнений условия существования ограниченных решений исследовались в [7]–[13] и других работах.

2. Формулировка основного результата. Зафиксируем произвольное число $\varepsilon \geq 0$. Обозначим через $\mathcal{M}_\varepsilon$ – множество всех таких функций $y \in \mathcal{C}$, для каждой из которых $y(t) \neq y(s)$, если $|t - s| > \varepsilon$. Через $\mathcal{M}_\varepsilon^+$ и $\mathcal{M}_\varepsilon^-$ обозначим соответственно множества всех таких функций $y, z \in \mathcal{C}$, для которых соответственно $y(t + \delta) > y(t)$ и $z(t + \delta) < z(t)$ для всех $t \in \mathbb{R}$ и $\delta > \varepsilon$. Множество значений элемента $y \in \mathcal{C}$ будем обозначать через $R(y)$.

Основной в статье является

ТЕОРЕМА 1. Пусть $f \in \mathcal{C}$. Для того чтобы уравнение (1) для каждой функции $h \in C^0$ имело ε -единственное решение $x \in C^1$, необходимо и достаточно, чтобы $f \in \mathcal{M}_\varepsilon$ и $R(f) = \mathbb{R}$.

Устанавливается эта теорема с помощью утверждений следующего пункта.

3. Вспомогательные утверждения.

ТЕОРЕМА 2 ([1]). Уравнение (1) для каждой функции $h \in C^0$ имеет, по крайней мере, одно решение $x \in C^0$ тогда и только тогда, когда $R(f) = \mathbb{R}$. При этом для каждого отрезка $[\alpha, \beta]$, для которого $R(f|_{[\alpha, \beta]}) = \overline{R(h)}$ и $\{f(\alpha), f(\beta)\} = \{\inf_{t \in \mathbb{R}} h(t), \sup_{t \in \mathbb{R}} h(t)\}$ найдется решение $x \in C^0$ такое, что $R(x) \subset [\alpha, \beta]$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В этой теореме в силу (1) включение $x \in C^0$ можно заменить на $x \in C^1$.

ЛЕММА 1. Пусть $f \in \mathcal{C} \cap \mathcal{M}_\varepsilon$. Тогда $f \in \mathcal{M}_\varepsilon^- \cup \mathcal{M}_\varepsilon^+$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $f(\delta^*) > f(0)$ для некоторого $\delta^* > \varepsilon$, то в силу условий леммы и теоремы Больцано–Коши [14] $f(t + \delta) > f(t)$ для всех $t \in \mathbb{R}$ и $\delta > \varepsilon$. Аналогично, если $f(\delta^*) < f(0)$ для некоторого $\delta^* > \varepsilon$, то в силу условий леммы и теоремы Больцано–Коши [14] $f(t + \delta) < f(t)$ для всех $t \in \mathbb{R}$ и $\delta > \varepsilon$, что завершает доказательство леммы.

ЛЕММА 2. Пусть $g \in \mathcal{C} \cap \mathcal{M}_\varepsilon^+$ и a, b – произвольные действительные числа, для которых $b - a > \varepsilon$. Тогда для каждого числа $\delta \in (\varepsilon, b - a)$ существует такое число $k > 0$, что $g(u) - g(v) \geq k(u - v)$ для всех $u, v \in [a, b]$, для которых $u - v \geq \delta$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что утверждение леммы ложно. Тогда существуют последовательности $u_n, v_n \in [a, b]$, $n \in \mathbb{N}$, и число $\delta \in (\varepsilon, b - a)$, для которых $u_n - v_n \geq \delta$, $n \in \mathbb{N}$, и $\lim_{n \rightarrow +\infty} ((g(u_n) - g(v_n))/(u_n - v_n)) = 0$. Тогда на основании непрерывности функции $g(t)$ на $[a, b]$ существуют такие числа $\alpha, \beta \in [a, b]$, что $\beta - \alpha \geq \delta$ и $g(\beta) = g(\alpha)$. Последнее равенство противоречит включению $g \in \mathcal{M}_\varepsilon^+$. Следовательно, лемма 2 доказана.

4. Доказательство теоремы 1. *Достаточность.* Пусть $f \in \mathcal{C} \cap \mathcal{M}_\varepsilon$ и $R(f) = \mathbb{R}$. Зафиксируем произвольный элемент $h \in C^0$. Обозначим через X множество всех

ограниченных решений уравнения (1). На основании теоремы 2 $X \neq \emptyset$. В силу этой же теоремы и включения $f \in \mathcal{M}_\varepsilon$ существует отрезок $[\alpha, \beta]$, для которого

$$\bigcup_{x \in X} R(x) \subset [\alpha, \beta]. \quad (2)$$

Зафиксируем произвольное решение $x_1 \in X$ уравнения (1) и покажем, что это решение ε -единственное.

Предположим, что для x_1 свойство ε -единственности не выполняется. Тогда существует элемент $x_2 \in X$, для которого

$$\|x_1 - x_2\|_{C^0} > \varepsilon. \quad (3)$$

Далее будем предполагать, что $f \in \mathcal{M}_\varepsilon^+$. Такой случай возможен на основании леммы 1, поскольку $f \in \mathcal{M}_\varepsilon$. Рассмотрим числа $a = \alpha - \gamma$ и $b = \beta + \gamma$, где $\gamma > \beta - \alpha$. В силу (3) существуют числа $\delta, t^* \in \mathbb{R}$, для которых

$$\delta = |x_1(t^*) - x_2(t^*)| > \varepsilon. \quad (4)$$

Не ограничивая общности, можно считать, что

$$x_1(t^*) > x_2(t^*). \quad (5)$$

Согласно лемме 2 найдется такое число $k > 0$, что

$$f(u) - f(v) \geq k(u - v) \quad (6)$$

для всех $u, v \in [a, b]$, для которых $u - v \geq \delta$.

Поскольку

$$\frac{dx_i(t)}{dt} \equiv f(x_i(t)) - h(t), \quad i = 1, \dots, 2,$$

то

$$\frac{d(x_1(t) - x_2(t))}{dt} \equiv f(x_1(t)) - f(x_2(t)).$$

Поэтому на основании соотношений (4)–(6) и включений $x_1, x_2 \in C^1$, $f \in \mathcal{C}$ для каждого числа $T > t^*$

$$\frac{d(x_1(t) - x_2(t))}{dt} \geq k(x_1(t) - x_2(t)), \quad t \in [t^*, T].$$

Следовательно, для $t \in [t^*, T]$

$$x_1(t) - x_2(t) \geq e^{k(t-t^*)}(x_1(t^*) - x_2(t^*)) = e^{k(t-t^*)}\delta,$$

что противоречит (2) при больших T , поскольку $k > 0$.

Таким образом, предположение о существовании решения x_2 уравнения (1), для которого выполняется неравенство (3), ложно.

Теперь будем предполагать, что $f \in \mathcal{M}_\varepsilon^-$. Этот случай сводится к рассмотренному случаю. Действительно, определим отображение $S: C^0 \rightarrow C^0$ соотношением

$(Sx)(t) = x(-t)$, $t \in \mathbb{R}$. Поскольку $x(t) = (Sx)(-t)$, $t \in \mathbb{R}$, уравнение (1) можно представить в виде

$$\frac{d(Sx)(-t)}{dt} = f((Sx)(-t)) - h(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Очевидно, что задача о нахождении ограниченных решений уравнения (1) равносильна аналогичной задаче для уравнения

$$\frac{d(Sx)(t)}{dt} = -f((Sx)(t)) + h(-t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

В этом уравнении функция $-f$ является элементом множества $\mathcal{M}_\varepsilon^+$. Поэтому каждое решение $y \in C^1$ уравнения

$$\frac{dy(t)}{dt} = -f(y(t)) + h(-t), \quad t \in \mathbb{R},$$

где $h \in C^0$, ε – единственное. Следовательно, аналогичным свойством обладают ограниченные решения уравнения (1) и в случае $f \in \mathcal{M}_\varepsilon^-$.

Достаточность доказана.

Необходимость. Пусть уравнение (1) для каждой функции $h \in C^0$ имеет ε -единственное решение $x \in C^1$.

Покажем, что $\overline{R(f)} = \mathbb{R}$. Предположим, что $R(f) \neq \mathbb{R}$. Возьмем произвольное число $k \in \mathbb{R} \setminus \overline{R(f)}$. Такое число существует, поскольку в силу непрерывности f множество $R(f)$ связно. Тогда $\inf_{t \in \mathbb{R}} |f(t) - k| > 0$.

Рассмотрим уравнение (1) при $h(t) \equiv k$, т.е. уравнение

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t)) - k, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (7)$$

Для каждого решения $x = x(t)$ этого уравнения имеет место соотношение

$$\left| \frac{dx(t)}{dt} \right| \geq \inf_{t \in \mathbb{R}} |f(x(t)) - k| > 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Отсюда следует, что уравнение (7) не может иметь ограниченных решений.

Следовательно, предположение, что $R(f) \neq \mathbb{R}$, ложно.

Теперь покажем, что $f \in \mathcal{M}_\varepsilon$. Предположим противное. Тогда для некоторых чисел $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, для которых $|a_1 - a_2| > \varepsilon$, имеет место равенство $f(a_1) = f(a_2)$. Поэтому уравнение (1) при $h(t) \equiv f(a_1)$ имеет решения $x_1(t) \equiv a_1$ и $x_2(t) \equiv a_2$, не являющиеся ε -единственными.

Следовательно, предположение, что $f \notin \mathcal{M}_\varepsilon$, ложно и необходимость доказана.

Теорема 1 доказана.

5. Примеры применения теоремы 1.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим функцию $f_\varepsilon(t) = t + \varepsilon|\sin t^3|$, где $\varepsilon \geq 0$. Очевидно, что $f_\varepsilon \in \mathcal{M}_\varepsilon^+$ и $R(f_\varepsilon) = \mathbb{R}$. Поэтому на основании теоремы 1 для каждой функции $h \in C^0$ уравнение

$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t) + \varepsilon|\sin x^3(t)| - h(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (8)$$

имеет ε -единственное решение $x \in C^1$.

Заметим, что это простое на первый взгляд уравнение нельзя исследовать, например, с помощью принципа сжатых отображений [15] или с помощью теоремы Шаудера о неподвижной точке [16].

Нетрудно проверить, что для каждого натурального числа n существует такая функция $h \in C^0$, что уравнение (8) при $\varepsilon > 0$ будет иметь не менее n ограниченных решений, каждое из которых ε -единственное. В этом легко убедиться, если ограничиться рассмотрением решений вида $x(t) \equiv \text{const}$.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим систему нелинейных дифференциальных уравнений

[illegible]

где $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{M}_\varepsilon$, $h_1, \dots, h_n \in C^0$ и отображения $g_i: \mathbb{R}^i \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n_1$, непрерывны. Эта система имеет хотя бы одно ограниченное решение, в существовании которого можно убедиться с помощью последовательного применения к уравнениям системы теоремы 1. Действительно, на основании этой теоремы первое уравнение системы имеет решение $x_1 \in C^1$. Тогда функция $g_1(x_1(t)) - h_2(t)$ непрерывна и ограничена на $\mathbb{R}$. Поэтому в силу теоремы 1 уравнение $dx_2/dt = f_2(x_2) + g_1(x_1(t)) - h_2(t)$ имеет решение $x_2 \in C^1$. Далее рассмотрим непрерывную и ограниченную на $\mathbb{R}$ функцию $g_2(x_1(t), x_2(t)) - h_3(t)$ и уравнение $dx_3/dt = f_3(x_3) + g_2(x_1(t), x_2(t)) - h_3(t)$, которое согласно теореме 1 имеет решение $x_3 \in C^1$. Аналогичные рассуждения продолжаем дальше. В результате через n шагов получим последовательность функций $x_1, \dots, x_n \in C^1$, которая является ограниченным решением системы уравнений (9).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. Е. Слюсарчук, “Условия существования ограниченных решений нелинейных дифференциальных уравнений”, *УМН*, **54**:4 (1999), 181–182.
- [2] В. Е. Слюсарчук, “Необходимые и достаточные условия существования и единственности ограниченных решений нелинейных дифференциальных уравнений”, *Нелінійні коливання*, **2**:4 (1999), 523–539.
- [3] V. E. Slyusarchuk, “Necessary and sufficient conditions for existence and uniqueness of bounded and almost-periodic solutions of nonlinear differential equations”, *Acta Appl. Math.*, **65**:1-3 (2001), 333–341.
- [4] В. Ю. Слюсарчук, “Необхідні і достатні умови ліпшіцевої оборотності нелінійного диференціального оператора $d/dt - f$ в просторі обмежених на осі функцій”, *Математичні студії*, **15**:1 (2001), 77–86.
- [5] В. Е. Слюсарчук, “Необходимые и достаточные условия обратимости нелинейного дифференциального оператора $d/dt + f$ в пространстве существенно ограниченных на оси вещественных функций”, *Диференціальні рівняння і нелінійні коливання*, Праці Українського математичного конгресу – 2001. Секція 3, Ін-т. матем. НАН України, Київ, 2002, 138–151.

- [6] В. Е. Слюсарчук, “Необходимые и достаточные условия липшицевой обратимости нелинейного дифференциального отображения $d/dt - f$ в пространствах $L_p(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $1 \leq p \leq \infty$ ”, *Матем. заметки*, **73**:6 (2003), 891–903.
- [7] Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, А. М. Самойленко, *Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике*, Наукова думка, Киев, 1969.
- [8] Р. Рейсиг, Г. Сансоне, Р. Конти, *Качественная теория нелинейных дифференциальных уравнений*, Наука, М., 1974.
- [9] Е. Ф. Мищенко, Н. Х. Розов, *Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания*, Наука, М., 1975.
- [10] В. А. Плисс, *Интегральные множества периодических систем дифференциальных уравнений*, Наука, М., 1977.
- [11] Ю. В. Трубников, А. И. Перов, *Дифференциальные уравнения с монотонными нелинейностями*, Наука и техника, Минск, 1986.
- [12] А. И. Перов, “Об ограниченных решениях нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений”, *Вестн. ВГУ. Сер. физ., матем.*, 2003, № 1, 165–168.
- [13] В. Е. Слюсарчук, “Нелінійні диференціальні рівняння з обмеженнями на $\mathbb{R}$ розв'язками”, *Нелінійні коливання*, **11**:1 (2008), 96–111.
- [14] Г. М. Фихтенгольц, *Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3-х т.*, т. 1, Наука, М., 1966.
- [15] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*, Наука, М., 1968.
- [16] Л. Ниренберг, *Лекции по нелинейному функциональному анализу*, Математика. Новое в зарубежной науке, **5**, Мир, М., 1977.

В. Е. Слюсарчук

Национальный университет водного хозяйства и
природопользования, Украина

E-mail: V.Ye.Slyusarchuk@USUWM.rv.ua

Поступило

15.08.2008