Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. В. Малыхин, Верхние оценки погрешности оценщиков в задаче непараметрической регрессии: адаптивный случай и случай неизвестной меры ρ_X , *Матем. заметки*, 2009, том 86, выпуск 5, 725–732

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm6571>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 15:27:36

УДК 519.234

Верхние оценки погрешности оценщиков в задаче непараметрической регрессии: адаптивный случай и случай неизвестной меры ρ_X

Ю. В. Малыхин

В работе строятся оценщики функций регрессии и доказываются теоремы об их погрешности в двух различных ситуациях.

В первом случае рассматриваются так называемые адаптивные оценщики, погрешность которых близка к оптимальной для целого семейства классов возможных функций регрессии; адаптивность оценщиков заключается в том, что они строятся без информации о выборе класса.

Во втором случае класс возможных функций регрессии фиксирован, однако маргинальная мера неизвестна, оценщик строится без какой-либо информации об этой мере. Его погрешность оказывается близкой к минимальной возможной (в наихудшем случае) погрешности.

Библиография: 7 названий.

1. Введение. В данной работе рассматривается задача регрессии. Основой для наших исследований являются статьи [1]–[4].

Пусть $X = \mathbb{R}^d$, $Y = [-M, M]$, ρ – неизвестная нам борелевская вероятностная мера на $X \times Y$, ρ_X суть проекция меры ρ на X (т.е. $\rho_X(S) = \rho(S \times Y)$, $S \subset X$).

Задача состоит в том, чтобы по выборке $\mathbf{z} = \mathbf{z}^{(m)} = ((x_1, y_1), \dots, (x_m, y_m))$, состоящей из независимых векторов $z_i = (x_i, y_i) \in X \times Y$, распределенных по мере ρ , построить функцию $f_{\mathbf{z}}: X \rightarrow Y$, аппроксимирующую функцию регрессии

$$f_{\rho}(x) = \int_Y y d\rho(y|x).$$

Отображение $\mathbf{z} \mapsto f_{\mathbf{z}}$ называется *оценщиком*.

Функция регрессии минимизирует величину ошибки

$$\mathcal{E}(f) = \int_{X \times Y} (f(x) - y)^2 d\rho$$

по всевозможным f – это следует из равенства $\mathcal{E}(f) - \mathcal{E}(f_{\rho}) = \|f - f_{\rho}\|_{L_2(\rho_X)}^2$. Таким образом, аппроксимация f_{ρ} в метрике $L_2(\rho_X)$ равносильна минимизации функционала $\mathcal{E}(\cdot)$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-00208) и программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-3810.2008.1).

Качество оценщика можно измерять вероятностью того, что он даст погрешность, большую некоторого $\varepsilon > 0$:

$$\rho^m \{ \mathbf{z} : \mathcal{E}(f_{\mathbf{z}}) - \mathcal{E}(f_{\rho}) > \varepsilon \}.$$

Поскольку, вообще говоря, множество $\{ \mathbf{z} : \mathcal{E}(f_{\mathbf{z}}) - \mathcal{E}(f_{\rho}) > \varepsilon \}$ может оказаться неизмеримым, под вероятностью понимается внешняя вероятность.

Разумеется, чтобы получить нетривиальные оценки таких вероятностей, нужно наложить на ρ определенные ограничения. Для примера приведем теорему из [3].

Нам потребуются следующие обозначения: для множества A в метрическом пространстве S и $\varepsilon > 0$ через $N_{\varepsilon}(A, S)$ будем обозначать количество элементов в *минимальной ε -сети* для A в S ; через $\varepsilon_n(A, S)$ обозначим *энтропийный поперечник*

$$\varepsilon_n(A, S) := \inf \{ \varepsilon > 0 : \log N_{\varepsilon}(A, S) \leq n \}.$$

(Для определенности, $\log t = \log_e t$.)

ТЕОРЕМА А [3; теорема 1.3]. Пусть класс Θ функций из X в Y и мера μ на X таковы, что

$$\varepsilon_n(\Theta, L_2(\mu)) \leq Dn^{-r}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Тогда существует такой оценщик $f_{\mathbf{z}}$, что для любых $m \geq 240(M/D)^2$, $\varepsilon > c(M, D, r) \cdot m^{-2r/(1+2r)}$, и любой меры ρ такой, что $f_{\rho} \in \Theta$, $\rho_X = \mu$, справедлива оценка

$$\rho^m \{ \mathbf{z} : \mathcal{E}(f_{\mathbf{z}}) - \mathcal{E}(f_{\rho}) \geq \varepsilon \} \leq \exp \left(-\frac{m\varepsilon}{800M^2} \right).$$

Отметим, что показатель $2r/(1+2r)$ нельзя увеличить; это следует из нижних оценок [2]; см. также [3].

В первой части работы мы доказываем основную лемму, из которой легко выводится теорема А. Лемма фактически доказывается в [3], но нам будет удобно выделить эти соображения в виде отдельного утверждения.

С помощью основной леммы мы получим общую теорему об адаптивных оценщиках. Не приводя здесь формулировки этой теоремы, поясним термин “адаптивный” и выпишем одно ее следствие.

Пусть заданы произвольное множество индексов R и $\{\mathcal{M}_r\}$ – семейство классов мер на $X \times Y$. Предположим, что мера ρ принадлежит некоторому классу $\mathcal{M}_{r_0}$, $r_0 \in R$, но r_0 неизвестно. Требуется на основе выборки $\mathbf{z}$ построить такой адаптивный оценщик $f_{\mathbf{z}}$, что погрешность $\mathcal{E}(f_{\mathbf{z}}) - \mathcal{E}(f_{\rho})$ была бы близка к оптимальной для класса $\mathcal{M}_{r_0}$. Адаптивность оценщика заключается в том, что он строится без информации об r_0 . В качестве примера приведем следующую теорему.

ТЕОРЕМА В [4; теорема 1]. Для произвольных $0 < \alpha < \beta < \infty$ рассмотрим семейство классов функций $\{W_r\}$, $r \in [\alpha, \beta]$, и меру μ , удовлетворяющие следующим условиям:

$$\varepsilon_n(W_r, L_2(\mu)) \leq Dn^{-r},$$

$$W_{r_1} \supset W_{r_2}, \quad \alpha \leq r_1 \leq r_2 \leq \beta.$$

Существует такой оценщик $f_{\mathbf{z}}$ и константы $C_i = C_i(\alpha, \beta, D, M) > 0$, $i = 1, 2$, $A_0 = A_0(\alpha, \beta, D, M) > 0$, что для любой меры ρ из равенства $\rho_X = \mu$ и включения

$f_\rho \in W_{r_0}$, $r_0 \in [\alpha, \beta]$, *следует неравенство*

$$\rho^m \{ \mathbf{z} : \mathcal{E}(f_{\mathbf{z}}) - \mathcal{E}(f_\rho) \geq C_1 A m^{-2r_0/(1+2r_0)} \} \leq \exp(-C_2 A m^{1/(1+2\beta)})$$

с произвольным $A > A_0$.

Теорему В можно вывести из нашей “общей” теоремы 1 (как и “общую” теорему 2 [4], из которой выводилась теорема В).

В следующей части работы рассматривается случай, когда мера ρ_X неизвестна. Если оценки в случае фиксированной $\rho_X = \mu$ проводились в терминах энтропии в пространстве $L_2(\mu)$, то теперь ключевой характеристикой будет следующая величина.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Комбинаторной размерностью $vc(\Theta, \varepsilon)$ класса Θ называется максимальное натуральное число n такое, что существуют точки $x_1, \dots, x_n \in X$ и значения $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$, удовлетворяющие условию: для любого набора знаков $\sigma_1, \dots, \sigma_n \in \{-1, 1\}$ найдется функция $f \in \Theta$ такая, что

$$\sigma_i(f(x_i) - y_i) \geq \varepsilon, \quad i = 1, \dots, n.$$

Если таких n бесконечно много, то $vc(\Theta, \varepsilon) = \infty$.

В теореме 2 мы покажем, что в случае, когда мера ρ_X неизвестна и на меру ρ накладывается единственное условие $f_\rho \in \Theta$, существует оценщик, для которого верно неравенство

$$\rho^m \{ \mathbf{z} : \mathcal{E}(f_{\mathbf{z}}) - \mathcal{E}(f_\rho) > \varepsilon \} \leq c_1 \exp \left(c_2 vc(\Theta, c_3 \sqrt{\varepsilon}) \log \left(\frac{2}{\varepsilon} \right) - c_4 m \varepsilon \right).$$

Точная формулировка теоремы и способ построения оценщика приведены далее.

2. Основная лемма. Пусть $\mathcal{H}$ – некоторый класс функций из X в Y . Введем следующие обозначения:

$$\mathcal{E}_{\mathbf{z}}(f) := \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (f(x_i) - y_i)^2, \quad f_{\mathbf{z}, \mathcal{H}} := \arg \min_{f \in \mathcal{H}} \mathcal{E}_{\mathbf{z}}(f).$$

Если минимум $\mathcal{E}_{\mathbf{z}}(f)$ достигается сразу на нескольких функциях $f \in \mathcal{H}$, то мы выбираем произвольную из них.

ЛЕММА 1. Пусть $\mathcal{N}$ – конечный набор функций $X \rightarrow Y$, $\#\mathcal{N} = N$. Для всякого $\delta \geq \min_{f \in \mathcal{N}} \mathcal{E}(f) - \mathcal{E}(f_\rho)$ выполняется неравенство

$$\rho^m \{ \mathbf{z} : \mathcal{E}(f_{\mathbf{z}, \mathcal{N}}) - \mathcal{E}(f_\rho) \geq 5\delta \} \leq (N + 1) \exp \left(-\frac{m\delta}{40M^2} \right). \quad (1)$$

Для полноты изложения приведем полное доказательство леммы. Нам понадобится лишь неравенство Бернштейна. Оно утверждает, что для независимых, одинаково распределенных величин ξ_i , $|\xi_i| \leq M$, выполняется неравенство

$$\mathbb{P} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i - \mathbb{E}\xi \geq t \right\} \leq \exp \left(-\frac{nt^2}{2(D\xi + Mt/3)} \right).$$

Та же оценка имеет место для вероятности события $\{ \mathbb{E}\xi - (1/n) \sum_{i=1}^n \xi_i \geq t \}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. Введем обозначения

$$\mathcal{E}_\rho(f) := \mathcal{E}(f) - \mathcal{E}(f_\rho), \quad \mathcal{E}_{\rho, \mathbf{z}}(f) := \mathcal{E}_{\mathbf{z}}(f) - \mathcal{E}_{\mathbf{z}}(f_\rho).$$

Покажем, что для любой функции $f: X \rightarrow Y$ справедливы неравенства

$$\rho^m \left\{ \mathbf{z} : \mathcal{E}_\rho(f) - \mathcal{E}_{\rho, \mathbf{z}}(f) \geq \frac{1}{2}(\mathcal{E}_\rho(f) + \delta) \right\} \leq \exp\left(-\frac{m\delta}{40M^2}\right), \quad (2)$$

$$\rho^m \left\{ \mathbf{z} : \mathcal{E}_\rho(f) - \mathcal{E}_{\rho, \mathbf{z}}(f) \leq -\frac{1}{2}(\mathcal{E}_\rho(f) + \delta) \right\} \leq \exp\left(-\frac{m\delta}{40M^2}\right). \quad (3)$$

Рассмотрим случайную величину $\xi(x, y) := (f(x) - y)^2 - (f_\rho(x) - y)^2$, где $(x, y) \sim \rho$. Имеем

$$\mathbb{E}\xi = \mathcal{E}_\rho(f), \quad \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \xi_i = \mathcal{E}_{\rho, \mathbf{z}}(f), \quad |\xi| \leq 4M^2.$$

Далее, в силу равенства $\mathbb{E}(f(x) - f_\rho(x))^2 = \mathcal{E}_\rho(f)$

$$D\xi \leq \mathbb{E}\xi^2 = \mathbb{E}[(f(x) - f_\rho(x))^2(f(x) + f_\rho(x) - 2y)^2] \leq 16M^2 \mathbb{E}(f(x) - f_\rho(x))^2 = 16M^2 \mathbb{E}\xi.$$

Воспользуемся неравенством Берштейна, обозначив $a = \mathbb{E}\xi$:

$$\mathbb{P}\left\{ \mathbb{E}\xi - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \xi_i \geq \frac{1}{2}(\mathbb{E}\xi + \delta) \right\} \leq \exp\left(-\frac{m((a + \delta)/2)^2}{2(16M^2a + (1/3)4M^2(a + \delta)/2)}\right). \quad (4)$$

Неравенство (2) следует из (4) и соотношения

$$\frac{((a + \delta)/2)^2}{2(16a + (4/3)(a + \delta)/2)} \geq \frac{\delta}{40}.$$

Неравенство (3) доказывается аналогично.

Пусть $\mathbf{z}$ таково, что для всех $f \in \mathcal{N}$ выполнено неравенство

$$\mathcal{E}_\rho(f) - \mathcal{E}_{\rho, \mathbf{z}}(f) < \frac{1}{2}(\mathcal{E}_\rho(f) + \delta),$$

а для $f_{\mathcal{N}} := \arg \min_{f \in \mathcal{N}} \mathcal{E}(f)$ выполнено еще и

$$\mathcal{E}_\rho(f) - \mathcal{E}_{\rho, \mathbf{z}}(f) > -\frac{1}{2}(\mathcal{E}_\rho(f) + \delta).$$

Тогда

$$\mathcal{E}_\rho(f_{\mathbf{z}, \mathcal{N}}) \leq \delta + 2\mathcal{E}_{\rho, \mathbf{z}}(f_{\mathbf{z}, \mathcal{N}}) \leq \delta + 2\mathcal{E}_{\rho, \mathbf{z}}(f_{\mathcal{N}}) \leq 2\delta + 3\mathcal{E}_\rho(f_{\mathcal{N}}) \leq 5\delta.$$

В силу (2) и (3) мера множества таких $\mathbf{z}$ больше $1 - (N + 1) \exp(-m\delta/(40M^2))$, и лемма, тем самым, доказана.

Выведем из леммы теорему А (не заботясь о константах). Из условия теоремы следует оценка

$$N_\varepsilon(\Theta, L_2(\mu)) \leq \hat{N}_\varepsilon := \exp\left(\left(\frac{D}{\varepsilon}\right)^{1/r} + 1\right).$$

Возьмем оценщик $f_{\mathbf{z}} = f_{\mathbf{z}, \mathcal{N}}$, где $\mathcal{N}$ – минимальная $\sqrt{\varepsilon}$ -сеть для Θ в пространстве $L_2(\mu)$. Выберем “критическое” $\varepsilon = \varepsilon^*$ из условия $\log \hat{N}_{\sqrt{\varepsilon^*}} \approx c m \varepsilon^*$, где c достаточно мало. Очевидно, $\varepsilon^* \asymp m^{-2r/(1+2r)}$. Теперь применим лемму для выбранного $\mathcal{N}$ и $\delta \geq \varepsilon^*$; произведение в правой части (1) не превосходит

$$\exp(\log(N_{\sqrt{\varepsilon^*}}(\Theta, L_2(\mu)) + 1) - c_1 m \delta) \leq \exp(-c_2 m \delta),$$

что и требовалось.

3. Адаптивные оценщики. Пусть заданы произвольное множество индексов R и семейство классов мер $\{\mathcal{M}_r : r \in R\}$.

Пусть для каждого r найдется оценщик $f_{\mathbf{z}}^r$ такой, что при всех $\rho \in \mathcal{M}_r$ выполняется неравенство

$$\rho^m \{\mathbf{z} : \mathcal{E}(f_{\mathbf{z}}) - \mathcal{E}(f_{\rho}) \geq \varepsilon_{r,m}\} \leq p_{r,m}. \quad (5)$$

Здесь $\varepsilon_{r,m}$ и $p_{r,m}$ – некоторые положительные числа, заданные для $r \in R$ и $m \in \mathbb{N}$.

Основное требование заключается в следующем. Для каждого $m \in \mathbb{N}$ в R существует конечное подмножество R'_m такое, что

$$\forall r \in R \quad \exists r' \in R'_m \quad \mathcal{M}_r \subset \mathcal{M}_{r'}, \quad \varepsilon_{r',m} \leq \varepsilon'_{r,m}, \quad p_{r',m} \leq p'_{r,m}. \quad (6)$$

Построим адаптивный оценщик. Для простоты будем считать, что m четно. Разобьем выборку на две части: $\mathbf{z}_1 = ((x_i, y_i))_{i=1}^{m/2}$ и $\mathbf{z}_2 = ((x_i, y_i))_{i=m/2+1}^m$. Положим $R' := R'_{m/2}$,

$$f_{\mathbf{z}} := f_{\mathbf{z}_1}^{\hat{r}}, \quad \hat{r} := \arg \min_{r \in R'} \mathcal{E}_{\mathbf{z}_2}(f_{\mathbf{z}_1}^r) = \arg \min_{r \in R'} \sum_{i=m/2+1}^m (f_{\mathbf{z}_1}^r(x_i) - y_i)^2. \quad (7)$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть семейство $\{\mathcal{M}_r\}$ и наборы чисел $\varepsilon_{r,m}$, $\varepsilon'_{r,m}$, $p_{r,m}$, $p'_{r,m}$ таковы, что выполнены условия (5) и (6). Тогда для оценщика (7) выполнено следующее. Для любой меры ρ , лежащей в некотором $\mathcal{M}_r$, и любого $\delta_{r,m} \geq \varepsilon'_{r,m/2}$ имеет место неравенство

$$\rho^m \{\mathbf{z} : \mathcal{E}(f_{\mathbf{z}}) - \mathcal{E}(f_{\rho}) \geq 5\delta_{r,m}\} \leq p'_{r,m/2} + (\#R'_{m/2} + 1) \exp\left(-\frac{m\delta_{r,m}}{80M^2}\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нам дано, что $\rho \in \mathcal{M}_r$. Выберем r' в соответствии с (6). Для $\mathbf{z}_1$ с вероятностью $\geq 1 - p_{r',m/2}$ в силу $\rho \in \mathcal{M}_{r'}$ имеем

$$\mathcal{E}(f_{\mathbf{z}_1}^{r'}) - \mathcal{E}(f_{\rho}) < \varepsilon_{r',m/2} \leq \varepsilon'_{r,m/2}.$$

Зафиксируем $\mathbf{z}_1$, для которого это неравенство верно. Применяя основную лемму ко множеству $\mathcal{N} = \{f_{\mathbf{z}_1}^r : r \in R'_{m/2}\}$, получим

$$\rho^{m/2} \{\mathbf{z}_2 : \mathcal{E}(f_{\mathbf{z}}) - \mathcal{E}(f_{\rho}) \geq 5\delta_{r,m}\} \leq (\#\mathcal{N} + 1) \exp\left(\frac{-m\delta_{r,m}}{80M^2}\right).$$

Применяя теорему Фубини, получаем утверждение теоремы.

Теорема В следует из теоремы 1, если взять

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_r &:= \{\rho : \rho_X = \mu, f_\rho \in W_r\}, \\ \varepsilon_{r,m} &\asymp \varepsilon'_{r,m} \asymp \delta_{r,m} \asymp Am^{-(2r)/(1+2r)}, \\ p_{r,m} &= \exp(-cAm^{1/(1+2r)}), \quad p'_{r,m} = \exp(-c'Am^{-2r/(1+2r)}), \\ R'_m &= \{\alpha\} \cup \left([\alpha, \beta] \cap \left\{ \frac{j}{m} : j \in \mathbb{Z} \right\} \right).\end{aligned}$$

Отметим, что условия (5) и (6) построены по аналогии с условиями из [4]. Оценщик строится так же, как и в [4].

4. Мера ρ_X неизвестна. Предположим, нам известно лишь, что $f_\rho \in \Theta$. В случае фиксированной меры $\rho_X = \mu$ оценщик строится по методу наименьших квадратов на подходящей $\sqrt{\varepsilon}$ -сети для Θ в $L_2(\mu)$. В рассматриваемом же случае естественно поступить следующим образом:

- зафиксируем $\varepsilon \in (0, 1)$;
- разобьем выборку $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_m)$ на две равные части: $\mathbf{z}_1$ и $\mathbf{z}_2$;
- по $\mathbf{z}_1$ построим “эмпирическую $\sqrt{\varepsilon}$ -сеть”; точнее, рассмотрим меру

$$\hat{\mu} = \frac{1}{m/2} \sum_{i=1}^{m/2} \delta_{x_i}$$

и во множестве $\Theta \subset L_2(\hat{\mu})$ построим максимальное по мощности $\sqrt{\varepsilon}$ -различимое множество:

$$\|\hat{f}_i - \hat{f}_j\|_{L_2(\hat{\mu})} > \sqrt{\varepsilon}, \quad 1 \leq i < j \leq N;$$

- по $\mathbf{z}_2$ и эмпирической сети $\widehat{\mathcal{N}} = \{\hat{f}_1, \dots, \hat{f}_N\}$ построим оценщик наименьших квадратов $f_{\mathbf{z}_2, \widehat{\mathcal{N}}}$;
- окончательно положим $f_{\mathbf{z}} := f_{\mathbf{z}_2, \widehat{\mathcal{N}}}$.

ТЕОРЕМА 2. Если $f_\rho \in \Theta$, то для построенного оценщика выполняется неравенство

$$\rho^n \{\mathbf{z} : \mathcal{E}(f_{\mathbf{z}}) - \mathcal{E}(f_\rho) \geq c_1 \varepsilon\} \leq c_2 \exp \left(c_3 \text{vc}(\Theta, c_4 \sqrt{\varepsilon}) \log \left(\frac{2}{\varepsilon} \right) - c_5 m \varepsilon \right). \quad (8)$$

Здесь и далее через $c, c_1, c_2, \dots$ обозначаются абсолютные положительные константы, в разных формулах – разные.

ЗАМЕЧАНИЕ. Отметим, что построенный оценщик зависит от ε . Оптимальное ε следует подбирать из условия $\text{vc}(\Theta, c\sqrt{\varepsilon}) \log(1/\varepsilon) \asymp m\varepsilon$.

Пусть μ – мера на X . Основой доказательства теоремы 2 служит следующая теорема, позволяющая сравнивать L_2 -норму по мере μ и по эмпирической мере $\mu_n = (1/n) \sum_{i=1}^n \delta_{x_i}$ (где $x_i \sim \mu$). Для краткости обозначим $\|f\|_n := \|f\|_{L_2(\mu_n)}$, $\|f\| = \|f\|_{L_2(\mu)}$.

ТЕОРЕМА С [5; теорема 11.2]. Пусть $\mathcal{F}$ – класс функций $X \rightarrow [-M, M]$. Для любого $\eta > 0$

$$\mu^m \{\mathbf{x} : \exists f \in \mathcal{F} \quad \|f\| - 2\|f\|_n > \eta\} \leq 3\text{EN}_{\sqrt{2}\eta/24}(\mathcal{F}, L_2(\mu_{2n})) \exp \left(-\frac{n\eta^2}{288M^2} \right). \quad (9)$$

Из следующей теоремы понятно, откуда в нашей задаче возникает комбинаторная размерность.

ТЕОРЕМА D [6; теорема 1]. Для любого $0 < \varepsilon < 1$ имеют место неравенства

$$c_1 \text{vc}(\mathcal{F}, 2\varepsilon) \leq \sup_{\mu} \log N_{\varepsilon}(\mathcal{F}, L_2(\mu)) \leq c_2 \text{vc}(\mathcal{F}, c_3 \varepsilon) \log\left(\frac{2}{\varepsilon}\right), \quad (10)$$

где точная верхняя грань берется по мерам μ на X с конечными носителями.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Применим теорему C к классу $\mathcal{F} := \Theta - \Theta := \{f - g : f, g \in \Theta\}$, $\eta = \sqrt{\varepsilon}/2$, $n = m/2$ и мере $\mu = \rho_X$. Множитель в правой части (9) оценивается

$$\mathbb{E} N_{c_1 \sqrt{\varepsilon}}(\mathcal{F}, L_2(\mu_m)) \leq \mathbb{E}(N_{c_2 \sqrt{\varepsilon}}(\Theta, L_2(\mu_m)))^2 \leq \exp\left(c_3 \text{vc}(\Theta, c_4 \sqrt{\varepsilon}) \log\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)\right).$$

Значит, с большой вероятностью для любых $f, g \in \Theta$

$$\|f - g\| \leq \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2} + 2\|f - g\|_{m/2}. \quad (11)$$

Зафиксируем $\mathbf{z}_1$, для которого выполнено (11). В силу (11) $\widehat{\mathcal{N}}$ будет $3\sqrt{\varepsilon}$ -сетью для Θ в $L_2(\rho_X)$. Воспользуемся основной леммой для $\mathcal{N} = \widehat{\mathcal{N}}$ и $\delta = (3\sqrt{\varepsilon})^2$:

$$\rho^{m/2} \{\mathbf{z}_2 : \mathcal{E}(f_{\mathbf{z}}) - \mathcal{E}(f_{\rho}) \geq 45\varepsilon\} \leq (\#\widehat{\mathcal{N}} + 1) \exp(-cm\varepsilon).$$

Далее, очевидно,

$$\log \#\widehat{N} \leq \log N_{\sqrt{\varepsilon}/2}(\Theta, L_2(\mu_m)) \leq c_1 \text{vc}(\Theta, c_2 \sqrt{\varepsilon}) \log\left(\frac{2}{\varepsilon}\right).$$

Применяя теорему Фубини, получаем утверждение теоремы.

5. Замечания. Результат теоремы 2 близок к оптимальному. Из нижних оценок [2] следует, что для выпуклого класса Θ и $\varepsilon > 0$, какой бы мы оценщик $f_{\mathbf{z}}$ ни взяли, всегда найдется мера ρ такая, что $f_{\rho} \in \Theta$, но

$$\rho^m \{\mathbf{z} : \mathcal{E}(f_{\mathbf{z}}) - \mathcal{E}(f_{\rho}) \geq \varepsilon\} \geq \min\left(\frac{1}{2}, \exp(c_1 \text{vc}(\Theta, c_2 \sqrt{\varepsilon}) - c_3 m\varepsilon)\right).$$

Можно также избавиться и от логарифма в (8): если $\text{vc}(\Theta, a\varepsilon) \leq (1/2)\text{vc}(\Theta, \varepsilon)$ для некоторого $a > 1$ и всех $\varepsilon > 0$, то логарифм в правой части неравенства (10) можно убрать (см. [7; теорема 1.3]). Следовательно, если выполнено это условие и класс Θ выпуклый, построенный нами оценщик оптимален (нужно лишь в доказательстве теоремы 2 использовать неравенство без логарифма).

Тем не менее, остается открытым важный вопрос о построении оценщиков, адаптирующихся к мере ρ_X . Можно ли построить такой оценщик $f_{\mathbf{z}}$, что для любой меры ρ с $f_{\rho} \in \Theta$ выполнялось бы неравенство

$$\rho^m \{\mathbf{z} : \mathcal{E}(f_{\mathbf{z}}) - \mathcal{E}(f_{\rho}) \geq \varepsilon^*\} \leq c_1 \exp(-c_2 m\varepsilon^*),$$

где ε^* определяется из условия $\log N_{\sqrt{\varepsilon^*}}(\Theta, L_2(\rho_X)) \asymp m\varepsilon^*$?

Построению такого оценщика нашими методами мешает случайная энтропия $N_{\varepsilon}(\Theta, L_2(\mu_n))$ в теореме C. Применить же теорему 1 невозможно, поскольку классы $\mathcal{M}(\Theta, \mu) = \{\rho : f_{\rho} \in \Theta, \rho_X = \mu\}$ не вложены друг в друга при разных μ .

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] F. Cucker, S. Smale, “On the mathematical foundations of learning”, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, **39**:1 (2002), 1–49.
- [2] R. DeVore, G. Kerkycharian, D. Picard, V. Temlyakov, “Approximation methods for supervised learning”, *Found. Comput. Math.*, **6**:1 (2006), 3–58.
- [3] V. N. Temlyakov, “Approximation in learning theory”, *Constr. Approx.*, **27**:1 (2008), 33–74.
- [4] С. В. Конягин, Е. Д. Лившиц, “Об адаптивных оценщиках в статистической теории обучения”, *Теория функций и нелинейные уравнения в частных производных*, Сборник статей. К 70-летию со дня рождения члена-корреспондента РАН Станислава Ивановича Похожаева, Тр. МИАН, **260**, МАИК, М., 2008, 193–201.
- [5] L. Györfi, M. Kohler, A. Krzyżak, W. Harro, *A Distribution-Free Theory of Nonparametric Regression*, Springer Ser. Statist., Springer-Verlag, New York, NY, 2002.
- [6] S. Mendelson, R. Vershynin, “Entropy and the combinatorial dimension”, *Invent. Math.*, **152**:1 (2003), 37–55.
- [7] M. Rudelson, R. Vershynin, “Combinatorics of random processes and sections of convex bodies”, *Ann. of Math. (2)*, **164**:2 (2006), 603–648.

Ю. В. Малыхин

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: jura05@narod.su

Поступило

20.11.2008

Исправленный вариант

28.02.2009