Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. С. Волков, В. В. Богданов, В. Л. Мирошниченко,
В. Т. Шевалдин, Формосохраняющая интерполяция кубическими сплайнами, *Матем. заметки*, 2010, том 88, выпуск 6, 836–844

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm6576>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 17:11:17

Формосохраняющая интерполяция кубическими сплайнами

Ю. С. Волков, В. В. Богданов, В. Л. Мирошниченко, В. Т. Шевалдин

Рассматривается задача формосохраняющей интерполяции кубическими сплайнами. Предложен единый подход получения достаточных условий k -монотонности сплайна (знакопостоянства какой-либо производной) при интерполяции k -монотонных данных, $k = 0, \dots, 4$.

Библиография: 11 названий.

1. Введение. Под *задачей формосохраняющей интерполяции* мы понимаем требование, чтобы интерполянт $S(x)$ или какая-либо его производная $S^{(k)}(x)$ были неотрицательными, если неотрицательны интерполируемая функция $f(x)$ или соответственно ее производная $f^{(k)}(x)$. Неотрицательность k -й производной принято называть *k -монотонностью*. При невысоких значениях k для k -монотонности есть специальные названия: $k = 0$ – неотрицательность, $k = 1$ – монотонность, $k = 2$ – выпуклость.

В настоящее время основным аппаратом решения подавляющего большинства задач, связанных с практическим приближением функций, стали сплайновые методы. И, конечно, задачи интерполяции здесь не исключение. При этом наиболее востребованными и используемыми являются кубические сплайны класса C^2 – основной и универсальный инструмент – благодаря хорошим аппроксимативным свойствам в сочетании с присущей им простотой реализации на ЭВМ. Однако, все же эти кубические сплайны не идеальны, и именно в задачах формосохраняющей интерполяции зачастую приходится от них отказываться, поскольку интерполяционный кубический сплайн, вообще говоря, не наследует такие геометрические характеристики как знакопостоянство какой-либо производной исходной функции. Известно, что даже при приближении сколь угодно гладких функций могут возникать нежелательные осцилляции, если исходные данные не достаточно “густые”. Для подобных задач разработаны многочисленные модификации и обобщения кубических сплайнов, но при этом почти всегда в “жертву” приносятся некоторые из достоинств классического сплайна – гладкость, точность, порядок приближения, простота реализации и пр. Однако, если обычный кубический сплайн на каких-либо данных все-таки обладает требуемыми свойствами, то в этом случае представляется естественным использовать интерполяцию именно классическим сплайном, не обращаясь к обобщениям.

Наша цель выявить условия формосохранения интерполяции кубическими сплайнами.

Работа выполнена при финансовой поддержке программ “Ведущие научные школы” (грант № НШ-1071.2008.1), совместных исследований СО РАН и УрО РАН (проект 2009-14) и междисциплинарных интеграционных проектов СО РАН (проект 2009-81).

Довольно просто, например, получить условия выпуклости кубического сплайна — для выпуклости необходимо и достаточно неотрицательности “моментов”, т.е. значений второй производной в узлах сетки. Эти условия представляют собой условия неотрицательности некоторых линейных комбинаций всего набора вторых разнесенных разностей от исходных данных со строго знакопередающимися коэффициентами (элементами обратной матрицы хорошо известной системы уравнений относительно моментов [1]). Однако такие условия существенно глобального характера не представляют особого интереса, так как они фактически не проверяемы до построения самого сплайна.

В 1984 г. Мирошникенко предложил достаточно простые легко проверяемые априорно условия [2], обеспечивающие наследование выпуклости кубическим сплайном при интерполяции. Он получил и некоторые достаточные условия монотонности кубического сплайна [2], [3]. Позднее Волковым были установлены другие достаточные условия монотонности [4], [5], базирующиеся на новом предложенном им подходе к представлению сплайнов [6], [7]. Оказывается, развитие этих идей позволяет с единых позиций рассмотреть общую проблему k -монотонной интерполяции кубическими сплайнами и получить достаточные условия k -монотонности и для остальных значений k ($k = 0$, $k = 3$ и даже для $k = 4$ в случае равноотстоящих данных).

2. Постановка задачи. Пусть в узлах сетки

$$\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

отрезка $[a, b]$ известны значения $f_0, f_1, \dots, f_n$ некоторой функции $f(x)$. Кубический сплайн $S(x)$ гладкости $C^2[a, b]$ с узлами на сетке Δ интерполирует заданные значения. Для однозначного определения сплайна необходимо задание еще каких-либо краевых условий. Мы ограничимся рассмотрением лишь задания на краях отрезка $[a, b]$ производной интерполируемой функции, т.е. считаем известными значения $f'_a = f'(a)$, $f'_b = f'(b)$, и полагаем $S'(a) = f'_a$, $S'(b) = f'_b$. Кроме того, будем считать, что интерполируемая функция k -монотонна для некоторого k , $0 \leq k \leq 4$, т.е. $f^{(k)}(x)$ неотрицательна на $[a, b]$. Но поскольку нам известна лишь информация об интерполируемой функции в узлах сетки Δ , то под k -монотонностью данных мы понимаем неотрицательность разнесенных разностей k -го порядка по узлам сетки Δ от исходных данных.

Наша цель — получить условия, при которых кубический сплайн будет наследовать свойство k -монотонности интерполируемых данных, т.е. условия неотрицательности $S^{(k)}(x)$, $k = 0, \dots, 3$, на $[a, b]$. Более того, известно [8], что скачок третьей производной сплайна (величина разрыва третьей производной в узлах сетки, отнесенная к шагу сетки) на сетках, близких к равномерным, приближает узловые значения четвертой производной интерполируемой функции. Поэтому представляет также интерес получить условия 4-монотонности сплайна $S(x)$, т.е. условия неотрицательности скачков третьей производной.

Производную сплайна $S^{(k)}(x)$, $k = 0, \dots, 3$, будем представлять в виде разложения по нормализованным B -сплайнам $N_{i,4-k}(x)$ порядка $4 - k$:

$$S^{(k)}(x) = \sum_{i=-3+k}^{n-1} \alpha_i^{(k)} N_{i,4-k}(x). \quad (1)$$

При этом сетку Δ мы считаем расширенной слева и справа кратными дополнительными узлами

$$x_{-3} = x_{-2} = x_{-1} = x_0, \quad x_n = x_{n+1} = x_{n+2} = x_{n+3}.$$

Напомним, что *нормализованными B-сплайнами порядка r (степени $r-1$)* на сетке Δ называются сплайны с носителем из r последовательных интервалов разбиения Δ , определяемые равенством

$$N_{i,r}(x) = (x_{i+r} - x_i)(\cdot - x)_+^{r-1}[x_i, \dots, x_{i+r}].$$

Здесь разделенная разность берется по аргументу t от усеченной степенной функции $g(t, x) = (t - x)_+^{r-1}$.

Поскольку B -сплайны являются неотрицательными функциями, то достаточным условием k -монотонности сплайна (неотрицательности $S^{(k)}(x)$) при $k = 0, \dots, 3$ является условие неотрицательности набора коэффициентов $\alpha_{-3+k}^{(k)}, \dots, \alpha_{n-1}^{(k)}$ в представлении (1), а при $k = 4$ – неотрицательности разрывов третьей производной сплайна в узлах сетки Δ .

3. Положительное решение системы уравнений. Рассматриваемые нами интерполяционные кубические сплайны класса $C^2[a, b]$ являются нелокальными, и для нахождения каких-либо определяющих их параметров необходимо решать трехдиагональные системы уравнений. Мы рассмотрим системы уравнений относительно интересующих нас коэффициентов в представлении (1), положительности которых мы желаем достичь. Волковым [6], [7] предложен общий подход построения таких систем и изучены некоторые их свойства для сплайнов произвольной нечетной степени. Однако, для кубических сплайнов почти все эти системы были хорошо известны, новой оказалась только система при $k = 1$. При $k = 2$ система относительно $\alpha_{-1}^{(2)}, \dots, \alpha_{n-1}^{(2)}$ представляет собой классическую систему уравнений относительно моментов (вторых производных сплайна в узлах), матрица которой имеет диагональное преобладание

$$\begin{cases} 2\alpha_{-1}^{(2)} + \alpha_0^{(2)} = 6\Delta_0^2, \\ \mu_i \alpha_{i-2}^{(2)} + 2\alpha_{i-1}^{(2)} + \lambda_i \alpha_i^{(2)} = 6\Delta_i^2, \quad i = 1, \dots, n-1, \\ \alpha_{n-2}^{(2)} + 2\alpha_{n-1}^{(2)} = 6\Delta_n^2, \end{cases}$$

где

$$\mu_i = \frac{h_{i-1}}{h_{i-1} + h_i}, \quad \lambda_i = 1 - \mu_i, \quad h_i = x_{i+1} - x_i, \quad \Delta_i^2 = f[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}].$$

Здесь и далее, как обычно, при определении разделенных разностей с кратными узлами участвуют производные

$$\Delta_0^2 = f[x_{-1}, x_0, x_1] = f[x_0, x_0, x_1] = \frac{f'_a - f[x_0, x_1]}{h_0},$$

$$\Delta_n^2 = f[x_{n-1}, x_n, x_{n+1}] = f[x_{n-1}, x_n, x_n] = \frac{f[x_{n-1}, x_n] - f'_b}{h_{n-1}}.$$

Условия выпуклости кубического сплайна получены Мирошниченко [2] при исследовании именно этой системы. Условия неотрицательности решения этой системы уравнений при 2-монотонных данных таковы:

$$\begin{cases} 2\Delta_0^2 - \Delta_1^2 \geq 0, \\ 2\Delta_i^2 - \mu_i \Delta_{i-1}^2 - \lambda_i \Delta_{i+1}^2 \geq 0, \quad i = 1, \dots, n-1, \\ 2\Delta_n^2 - \Delta_{n-1}^2 \geq 0. \end{cases} \quad (2)$$

Такие условия получены в результате рассмотрения системы уравнений

$$\mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{d} \quad (3)$$

с трехдиагональной матрицей

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & & & \\ c_1 & a_1 & b_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & c_{n-1} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ & & & c_n & a_n \end{pmatrix}$$

и вектором правой части $\mathbf{d} = (d_0, d_1, \dots, d_n)^T$ относительно вектора неизвестных $\mathbf{z} = (z_0, z_1, \dots, z_n)^T$.

ТЕОРЕМА 1 [2]. Пусть элементы матрицы $\mathbf{A}$ и вектора правой части $\mathbf{d}$ системы (3) неотрицательны и матрица $\mathbf{A}$ имеет строгое диагональное преобладание по строкам

$$a_0 - b_0 > 0, \quad a_i - c_i - b_i > 0, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad a_n - c_n > 0.$$

Тогда решение $\mathbf{z}$ будет неотрицательным, если выполнены неравенства

$$\begin{cases} d_0 - \frac{b_0}{a_1} d_1 \geq 0, \\ d_i - \frac{c_i}{a_{i-1}} d_{i-1} - \frac{b_i}{a_{i+1}} d_{i+1} \geq 0, \quad i = 1, \dots, n-1, \\ d_n - \frac{c_n}{a_{n-1}} d_{n-1} \geq 0. \end{cases} \quad (4)$$

Другие системы уравнений относительно коэффициентов представления (1) не обладают диагональным преобладанием, что не позволяет воспользоваться теоремой 1. Вместе с тем, ранее нам удалось расширить [9] область применимости теоремы 1 на случай диагонального преобладания по столбцу.

ТЕОРЕМА 2 [9]. Пусть элементы матрицы $\mathbf{A}$ и вектора правой части $\mathbf{d}$ системы (3) неотрицательны и матрица $\mathbf{A}$ имеет строгое диагональное преобладание по столбцам

$$a_0 - c_1 > 0, \quad a_i - b_{i-1} - c_{i+1} > 0, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad a_n - b_{n-1} > 0. \quad (5)$$

Тогда решение $\mathbf{z}$ будет неотрицательным, если выполнены неравенства (4).

Именно свойство диагонального преобладания по столбцам присутствует в матрице системы уравнений относительно $\alpha_{-2}^{(1)}, \dots, \alpha_{n-1}^{(1)}$, т.е. при $k = 1$ [4], [5]:

$$\begin{cases} \alpha_{-2}^{(1)} = f'_a, \\ \lambda_{i-1}\alpha_{i-3}^{(1)} + (1 + \mu_{i-1} + \lambda_i)\alpha_{i-2}^{(1)} + \mu_i\alpha_{i-1}^{(1)} = 3\Delta_i^1, \quad i = 1, \dots, n, \\ \alpha_{n-1}^{(1)} = f'_b, \end{cases} \quad (6)$$

где $\Delta_i^1 = f[x_{i-1}, x_i]$. Условия 1-монотонности (или просто монотонности) кубического сплайна, получаемые применением теоремы 2 к системе (6), имеют вид

$$\begin{cases} \Delta_1^1 - \frac{1}{3}f'_a - \frac{\mu_1}{1 + \mu_1 + \lambda_2}\Delta_2^1 \geq 0, \\ \Delta_i^1 - \frac{\lambda_{i-1}}{1 + \mu_{i-2} + \lambda_{i-1}}\Delta_{i-1}^1 - \frac{\mu_i}{1 + \mu_i + \lambda_{i+1}}\Delta_{i+1}^1 \geq 0, \quad i = 2, \dots, n-1, \\ \Delta_n^1 - \frac{\lambda_{n-1}}{1 + \mu_{n-2} + \lambda_{n-1}}\Delta_{n-1}^1 - \frac{1}{3}f'_b \geq 0. \end{cases} \quad (7)$$

Отметим, что альтернативные достаточные условия монотонности получены Мирошниченко [2], [3] при изучении системы уравнений относительно “наклонов” – узловых значений первой производной сплайна.

Для остальных значений k не удается получить условий k -монотонности путем непосредственного применения теорем 1 или 2 в виду отсутствия в системах уравнений диагонального преобладания. Однако, как мы показываем ниже, во всех случаях матрицы рассматриваемых систем уравнений приводятся к матрицам с диагональным преобладанием путем домножения на диагональные матрицы с положительными элементами.

ТЕОРЕМА 3. Пусть элементы матрицы $\mathbf{A}$ и вектора правой части $\mathbf{d}$ системы (3) неотрицательны и матрица $\mathbf{A}$ приводится к матрице со строгим диагональным преобладанием (по строкам или столбцам) путем домножения ее на диагональную матрицу с положительными диагональными элементами. Тогда решение $\mathbf{z}$ будет неотрицательным, если выполнены неравенства (4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть вначале матрица $\mathbf{A}$ приводится к матрице с диагональным преобладанием умножением на диагональную матрицу $\mathbf{D} = \text{diag}\{\gamma_0, \dots, \gamma_n\}$ справа. При умножении на $\mathbf{D}$ справа происходит масштабирование столбцов, которое не влияет на столбцовое диагональное преобладание; следовательно, может появиться только диагональное преобладание по строкам. В этом случае матрица $\mathbf{AD}$ удовлетворяет условиям теоремы 1. Следовательно, условиями неотрицательности вектора $\mathbf{D}^{-1}\mathbf{z}$, а в силу положительности чисел $\gamma_0, \dots, \gamma_n$ и условиями неотрицательности компонент вектора $\mathbf{z}$ будут условия

$$\begin{cases} d_0 - \frac{b_0\gamma_1}{a_1\gamma_1}d_1 \geq 0, \\ d_i - \frac{c_i\gamma_{i-1}}{a_{i-1}\gamma_{i-1}}d_{i-1} - \frac{b_i\gamma_{i+1}}{a_{i+1}\gamma_{i+1}}d_{i+1} \geq 0, \quad i = 1, \dots, n-1, \\ d_n - \frac{c_n\gamma_{n-1}}{a_{n-1}\gamma_{n-1}}d_{n-1} \geq 0, \end{cases}$$

которые эквивалентны условиям (4).

Если же рассматриваем умножение матрицы $\mathbf{A}$ на $\mathbf{D}$ слева, то масштабируются строки, и может появиться только диагональное преобладание по столбцам. В этом случае матрица $\mathbf{DA}$ удовлетворяет условиям теоремы 2. Тогда вместо системы (3) рассматриваем систему

$$\mathbf{DAz} = \mathbf{Dd},$$

и применение теоремы 2 к этой системе уравнений дает условия неотрицательности решения $\mathbf{z}$:

$$\begin{cases} \gamma_0 d_0 - \frac{b_0 \gamma_0}{a_1 \gamma_1} \gamma_1 d_1 \geq 0, \\ \gamma_i d_i - \frac{c_i \gamma_i}{a_{i-1} \gamma_{i-1}} \gamma_{i-1} d_{i-1} - \frac{b_i \gamma_i}{a_{i+1} \gamma_{i+1}} \gamma_{i+1} d_{i+1} \geq 0, \quad i = 1, \dots, n-1, \\ \gamma_n d_n - \frac{c_n \gamma_n}{a_{n-1} \gamma_{n-1}} \gamma_{n-1} d_{n-1} \geq 0, \end{cases}$$

которые, очевидно, также эквивалентны условиям (4). Теорема 3 доказана.

4. Условия k -монотонности. Наша цель – показать, что для остальных значений k , $k = 0, 3, 4$, матрицы систем уравнений относительно коэффициентов разложения производной $S^{(k)}$ по B -сплайнам $\alpha_{-3+k}^{(k)}, \dots, \alpha_{n-1}^{(k)}$ приводятся к матрицам с диагональным преобладанием путем умножения на диагональную.

Рассмотрим сперва такую систему для $k = 3$. Ясно, что соответствующие коэффициенты $\alpha_0^{(3)}, \dots, \alpha_{n-1}^{(3)}$ равны значениям третьей производной сплайна на интервалах сетки Δ . Явный вид этой системы можно найти, например, в книге [8]:

$$\begin{cases} (1 + \lambda_1) h_0 \alpha_0^{(3)} + \lambda_1 h_1 \alpha_1^{(3)} = 6\delta_1^3, \\ \mu_{i-1} h_{i-2} \alpha_{i-2}^{(3)} + (1 + \mu_{i-1} + \lambda_i) h_{i-1} \alpha_{i-1}^{(3)} + \lambda_i h_i \alpha_i^{(3)} = 6\delta_i^3, \quad i = 2, \dots, n-1, \\ \mu_{n-1} h_{n-2} \alpha_{n-2}^{(3)} + (1 + \mu_{n-1}) h_{n-1} \alpha_{n-1}^{(3)} = 6\delta_n^3, \end{cases} \quad (8)$$

где $\delta_i^3 = \Delta_i^2 - \Delta_{i-1}^2 = f[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}] - f[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$.

Очевидно, что матрица этой системы уравнений (8) после умножения справа на матрицу $\text{diag}\{h_0^{-1}, \dots, h_{n-1}^{-1}\}$ станет матрицей с диагональным преобладанием (совпадающей с транспонированной к матрице системы (6)). Теперь применение теоремы 3 приводит к условиям 3-монотонности

$$\begin{cases} \delta_1^3 - \frac{\lambda_1}{1 + \mu_1 + \lambda_2} \delta_2^3 \geq 0, \\ \delta_i^3 - \frac{\mu_{i-1}}{1 + \mu_{i-2} + \lambda_{i-1}} \delta_{i-1}^3 - \frac{\lambda_i}{1 + \mu_i + \lambda_{i+1}} \delta_{i+1}^3 \geq 0, \quad i = 2, \dots, n-1, \\ \delta_n^3 - \frac{\mu_{n-1}}{1 + \mu_{n-2} + \lambda_{n-1}} \delta_{n-1}^3 \geq 0. \end{cases} \quad (9)$$

Приступим теперь к выводу условий неотрицательности сплайна, т.е. в нашей терминологии условий 0-монотонности. В соответствии с [10] систему уравнений

для определения параметров $\alpha_{-3}^{(0)}, \dots, \alpha_{n-1}^{(0)}$ можно записать в виде

$$\begin{cases} \alpha_{-3}^{(0)} = f_0, & \alpha_{-2}^{(0)} = f_0 + \frac{h_0}{3} f'_a, \\ N_{-1,4}(x_1)\alpha_{-1}^{(0)} + N_{0,4}(x_1)\alpha_0^{(0)} = f_1 - N_{-2,4}(x_1)\left(f_0 + \frac{h_0}{3} f'_a\right), \\ N_{i-3,4}(x_i)\alpha_{i-3}^{(0)} + N_{i-2,4}(x_i)\alpha_{i-2}^{(0)} + N_{i-1,4}(x_i)\alpha_{i-1}^{(0)} = f_i, \quad i = 2, \dots, n-2, \\ N_{n-4,4}(x_{n-1})\alpha_{n-4}^{(0)} + N_{n-3,4}(x_{n-1})\alpha_{n-3}^{(0)} = f_{n-1} - N_{n-2,4}(x_{n-1})\left(f_n - \frac{h_{n-1}}{3} f'_b\right), \\ \alpha_{n-1}^{(0)} = f_n, & \alpha_{n-2}^{(0)} = f_n - \frac{h_{n-1}}{3} f'_b. \end{cases} \quad (10)$$

Поскольку для двух первых и двух последних коэффициентов выписаны явные формулы, то систему уравнений рассматриваем лишь для неизвестных $\alpha_{-1}^{(0)}, \dots, \alpha_{n-3}^{(0)}$. Покажем, что умножение матрицы такой системы слева на диагональную

$$\text{diag}\left\{\frac{h_0 + h_1}{h_0 h_1}, \dots, \frac{h_{n-2} + h_{n-1}}{h_{n-2} h_{n-1}}\right\}$$

дает матрицу со строгим диагональным преобладанием по столбцам.

В самом деле, величина диагонального преобладания в i -м столбце преобразованной матрицы равна

$$\begin{aligned} & \frac{h_{i-1} + h_i}{h_{i-1} h_i} N_{i-2,4}(x_i) - \frac{h_{i-2} + h_{i-1}}{h_{i-2} h_{i-1}} N_{i-2,4}(x_{i-1}) - \frac{h_i + h_{i+1}}{h_i h_{i+1}} N_{i-2,4}(x_{i+1}) \\ &= \frac{h_{i-1} + h_i}{h_{i-1} h_i} \left[\frac{h_i(h_{i-2} + h_{i-1})}{(h_{i-1} + h_i)(h_{i-2} + h_{i-1} + h_i)} + \frac{h_{i-1}(h_i + h_{i+1})}{(h_{i-1} + h_i)(h_{i-1} + h_i + h_{i+1})} \right] \\ & \quad - \frac{h_{i-2} + h_{i-1}}{h_{i-2} h_{i-1}} \cdot \frac{h_{i-2}^2}{(h_{i-2} + h_{i-1})(h_{i-2} + h_{i-1} + h_i)} \\ & \quad - \frac{h_i + h_{i+1}}{h_i h_{i+1}} \cdot \frac{h_{i+1}^2}{(h_i + h_{i+1})(h_{i-1} + h_i + h_{i+2})} \\ &= \frac{1}{h_{i-2} + h_{i-1} + h_i} + \frac{1}{h_{i-1} + h_i + h_{i+1}}. \end{aligned}$$

Теперь на основании теоремы 3 выписываем условия неотрицательности интерполяционного сплайна

$$\begin{cases} f_0 + \frac{h_0}{3} f'_a \geq 0, \\ f_1 - N_{-2,4}(x_1)\left(f_0 + \frac{h_0}{3} f'_a\right) - \frac{N_{0,4}(x_1)}{N_{0,4}(x_2)} f_2 \geq 0, \\ f_i - \frac{N_{i-3,4}(x_i)}{N_{i-3,4}(x_{i-1})} f_{i-1} - \frac{N_{i-1,4}(x_i)}{N_{i-1,4}(x_{i+1})} f_{i+1} \geq 0, \quad i = 2, \dots, n-2, \\ f_{n-1} - N_{n-2,4}(x_{n-1})\left(f_n - \frac{h_{n-1}}{3} f'_b\right) - \frac{N_{n-4,4}(x_{n-1})}{N_{n-4,4}(x_{n-2})} f_{n-2} \geq 0, \\ f_n - \frac{h_{n-1}}{3} f'_b \geq 0. \end{cases} \quad (11)$$

И наконец рассмотрим случай $k = 4$. Известно [8], что разрывы третьей производной интерполяционного сплайна

$$\beta_i = S'''(x_i - 0) - S'''(x_i + 0), \quad i = 1, \dots, n-1,$$

отнесенные к шагу сетки h_i , на почти равномерных сетках приближают $f^{(4)}(x_i)$. Мы хотим найти условия неотрицательности разрывов β_i , которые мы будем называть *условиями 4-монотонности*, при интерполяции 4-монотонных данных, т.е. для интерполируемой функции неотрицательными являются величины

$$\delta_i^4 = f[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}], \quad i = 1, \dots, n-1.$$

В работе [11] получена система линейных уравнений относительно разрывов старшей производной $\beta_1, \dots, \beta_{n-1}$ интерполяционного сплайна $S(x)$ в узлах сетки Δ :

$$\begin{cases} N_{-1,4}(x_1)\beta_1 + N_{-1,4}(x_2)\beta_2 = 6\delta_1^4, \\ N_{i-2,4}(x_{i-1})\beta_{i-1} + N_{i-2,4}(x_i)\beta_i + N_{i-2,4}(x_{i+1})\beta_{i+1} = 6\delta_i^4, \quad i = 2, \dots, n-2, \\ N_{n-3,4}(x_{n-2})\beta_{n-2} + N_{n-3,4}(x_{n-1})\beta_{n-1} = 6\delta_{n-1}^4. \end{cases} \quad (12)$$

Как нетрудно видеть, матрица данной системы является транспонированной к матрице системы уравнений (10), про которую мы уже доказали, что она удовлетворяет условиям теоремы 3. Следовательно, для матрицы системы (12) также выполнены условия теоремы 3. Тогда достаточные условия 4-монотонности сплайна $S(x)$ имеют вид

$$\begin{cases} \delta_1^4 - \frac{N_{-1,4}(x_2)}{N_{0,4}(x_2)} \delta_2^4 \geq 0, \\ \delta_i^4 - \frac{N_{i-2,4}(x_{i-1})}{N_{i-3,4}(x_{i-1})} \delta_{i-1}^4 - \frac{N_{i-2,4}(x_{i+1})}{N_{i-1,4}(x_{i+1})} \delta_{i+1}^4 \geq 0, \quad i = 2, \dots, n-2, \\ \delta_{n-1}^4 - \frac{N_{n-3,4}(x_{n-2})}{N_{n-4,4}(x_{n-2})} \delta_{n-2}^4 \geq 0. \end{cases} \quad (13)$$

В заключение отметим, что для случая равномерной сетки ($h_i = h = \text{const}$) условия k -монотонности кубического сплайна для любого k будут выглядеть почти (с точностью до крайних условий) одинаково. Например, условия 0-монотонности (неотрицательности) сплайна (11) будут иметь вид

$$\begin{cases} f_0 + \frac{h}{3} f'_a \geq 0, & 4f_1 - \frac{2}{3} \left(f_0 + \frac{h}{3} f'_a \right) - f_2 \geq 0, \\ 4f_i - f_{i-1} - f_{i+1} \geq 0, \quad i = 2, \dots, n-2, \\ f_n - \frac{h}{3} f'_b \geq 0, & f_{n-1} - \frac{2}{3} \left(f_n - \frac{h}{3} f'_b \right) - f_{n-2} \geq 0, \end{cases} \quad (14)$$

а условия 4-монотонности (13) примут вид

$$\begin{cases} 4\delta_1^4 - \delta_2^4 \geq 0, \\ 4\delta_i^4 - \delta_{i-1}^4 - \delta_{i+1}^4 \geq 0, \quad i = 2, \dots, n-2, \\ 4\delta_{n-1}^4 - \delta_{n-2}^4 \geq 0. \end{cases} \quad (15)$$

Как видно из условий (15), что если интерполируемые данные таковы, что соседние разности δ_i^4 отличаются не более чем в 2 раза, то интерполяционный кубический

сплайн по этим данным будет 4-монотонным. Аналогично, из условий (14) следует, что если соседние значения f_i отличаются не более чем в 2 раза (правда для крайних значений надо добавить дополнительные ограничения), то интерполяционный сплайн будет неотрицательным. Это же верно и в общем случае – сплайн будет k -монотонным, если соседние k -е разности отличаются не более чем в 2 раза (с возможными дополнительными ограничениями для крайних разностей).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ю. С. Завьялов, Б. И. Квасов, В. Л. Мирошниченко, *Методы сплайн-функций*, Наука, М., 1980.
- [2] V. L. Miroshnichenko, “Convex and monotone spline interpolation”, *Constructive Theory of Functions*, Proc. Intern. Conf. (Varna, Bulgaria, May 27–June 2, 1984), Publ. House of Bulgarian Acad. of Sci., Sofia, 1984, 610–620.
- [3] В. Л. Мирошниченко, “Достаточные условия монотонности и выпуклости для интерполяционных кубических сплайнов класса C^2 ”, *Приближение сплайнами*, Вычислительные системы, **137**, ИМ СО АН СССР, Новосибирск, 1990, 31–57.
- [4] Ю. С. Волков, “О монотонной интерполяции кубическими сплайнами”, *Вычисл. технологии*, **6:6** (2001), 14–24.
- [5] Ю. С. Волков, “Новый способ построения интерполяционных кубических сплайнов”, *ЖВМ и МФ*, **44:2** (2004), 231–241.
- [6] Ю. С. Волков, “О построении интерполяционных полиномиальных сплайнов”, *Сплайн-функции и их приложения*, Вычислительные системы, **159**, ИМ СО РАН, Новосибирск, 1997, 3–18.
- [7] Ю. С. Волков, “Вполне неотрицательные матрицы в методах построения интерполяционных сплайнов нечетной степени”, *Матем. тр.*, **7:2** (2004), 3–34.
- [8] Дж. Алберг, Э. Нильсон, Дж. Уолш, *Теория сплайнов и ее приложения*, Мир, М., 1972.
- [9] В. В. Богданов, Ю. С. Волков, “Выбор параметров обобщённых кубических сплайнов при выпуклой интерполяции”, *Сиб. журн. вычисл. матем.*, **9:1** (2006), 5–22.
- [10] Ю. С. Волков, “О нахождении полного интерполяционного сплайна через B -сплайны”, *Сиб. электрон. матем. изв.*, **5** (2008), 334–338.
- [11] Ю. С. Волков, *Равномерная сходимость производных интерполяционных сплайнов нечетной степени*, Препринт № 62, Ин-т матем. СО АН СССР, Новосибирск, 1984.

Ю. С. Волков

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
г. Новосибирск,
Новосибирский государственный университет
E-mail: volkov@math.nsc.ru

Поступило

01.11.2008

В. В. Богданов

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
г. Новосибирск
E-mail: bogdanov@math.nsc.ru

В. Л. Мирошниченко

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
г. Новосибирск,
Новосибирский государственный университет
E-mail: miroshn@math.nsc.ru

В. Т. Шевалдин

Институт математики и механики УрО РАН, г. Екатеринбург
E-mail: Valerii.Shevaldin@imm.uran.ru