Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. Б. Сабитов, Э. М. Сафин, Обратная задача для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа, *Матем. заметки*, 2010, том 87, выпуск 6, 907–918

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm6577>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 10:36:10

Обратная задача

для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа

К. Б. Сабитов, Э. М. Сафин

Для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа в прямоугольной области изучена обратная задача, связанная с поиском неизвестной правой части. Установлен критерий единственности решения. Само решение построено в виде суммы ряда по собственным функциям соответствующей одномерной спектральной задачи.

Библиография: 11 названий.

1. Постановка задачи. Рассмотрим уравнение смешанного парабола-гиперболического типа

$$Lu = f(x, t), \quad (1.1)$$

где

$$Lu = \begin{cases} u_t - u_{xx} + b^2 u, & t > 0, \\ u_{tt} - u_{xx} + b^2 u, & t < 0, \end{cases} \quad f(x, t) = \begin{cases} f_1(x), & t > 0, \\ f_2(x), & t < 0, \end{cases}$$

в прямоугольной области

$$D = \{(x, t) \mid 0 < x < 1, -\alpha < t < \beta\},$$

где $b \geq 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ – заданные действительные числа.

ЗАДАЧА. Найти в области D функции $u(x, t)$ и $f(x, t)$, удовлетворяющие условиям

$$u(x, t) \in C^1(\overline{D}), \quad u_t(x, t) \in C^2(D_-) \cap C_{x,t}^{2,1}(D_+), \quad (1.2)$$

$$f(x, t) \in C(D_- \cup D_+), \quad (1.3)$$

$$Lu(x, t) \equiv f(x, t), \quad (x, t) \in D_+ \cup D_-, \quad (1.4)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad -\alpha \leq t \leq \beta, \quad (1.5)$$

$$u(x, -\alpha) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (1.6)$$

$$u_t(x, -\alpha) = g(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (1.7)$$

$$u(x, \beta) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (1.8)$$

где $\psi(x)$ и $\varphi(x)$ – заданные достаточно гладкие функции,

$$\varphi(0) = \varphi(1) = 0, \quad \psi(0) = \psi(1) = 0, \quad D_+ = D \cap \{t > 0\}, \quad D_- = D \cap \{t < 0\}.$$

К настоящему времени наиболее полные результаты получены по исследованию прямых задач для уравнений смешанного типа. Например, краевые задачи для уравнений смешанного парабола-гиперболического типа рассматривались в работах [1]–[4]. В то же время практически отсутствуют работы, связанные с поиском решения обратных задач для уравнений смешанного типа. Обратные задачи для отдельных типов дифференциальных уравнений в частных производных изучены многими авторами [5]–[9].

В данной работе установлен критерий единственности и существование решения обратной задачи (1.2)–(1.8) методом спектрального анализа [10].

2. Формальное построение решения. Продифференцируем уравнение (1.1) один раз по t . Тогда для функции $v = u_t$ получим уравнение

$$Lv = \begin{cases} v_t - v_{xx} + b^2 u = 0, & t > 0, \\ v_{tt} - v_{xx} + b^2 u = 0, & t < 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

и из условий (1.5) имеем

$$v(0, t) = u_t(0, t) = 0, \quad v(1, t) = u_t(1, t) = 0, \quad -\alpha \leq t \leq \beta. \quad (2.2)$$

Из условия (1.7) найдем

$$v(x, -\alpha) = u_t(x, -\alpha) = g(x), \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (2.3)$$

Частные решения уравнения (2.1), не равные нулю в области D и удовлетворяющие нулевым граничным условиям (2.2), будем искать в виде

$$v(x, t) = X(x)T(t). \quad (2.4)$$

Подставляя выражение (2.4) в (2.1) и разделяя переменные, получим

$$T'(t) + (b^2 + \mu)T(t) = 0, \quad 0 < t < \beta, \quad (2.5)$$

$$T''(t) + (b^2 + \mu)T(t) = 0, \quad -\alpha < t < 0. \quad (2.6)$$

$$X''(x) + \mu X(x) = 0, \quad 0 < x < 1. \quad (2.7)$$

$$X(0) = X(1) = 0. \quad (2.8)$$

Как известно, спектральная задача (2.7), (2.8) имеет решение

$$X_k(x) = \sin \sqrt{\mu_k} x, \quad \mu_k = (\pi k)^2, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (2.9)$$

Тогда дифференциальные уравнения (2.5) и (2.6) имеют решения

$$T_k(t) = \begin{cases} c_k e^{-\lambda_k^2 t}, & t > 0, \\ a_k \cos \lambda_k t + b_k \sin \lambda_k t, & t < 0, \end{cases} \quad (2.10)$$

где a_k , b_k и c_k – произвольные постоянные, $\lambda_k = \sqrt{b^2 + \mu_k}$.

Поскольку решения $v_k(x, t) = X_k(x)T_k(t)$ должны удовлетворять условию (1.2), постоянные a_k , b_k и c_k подберем так, чтобы выполнялось условие

$$T_k(0+0) = T_k(0-0). \quad (2.11)$$

Функция (2.10) удовлетворяет равенству (2.11) только тогда, когда $a_k = c_k$. С учетом последнего функции (2.10) принимают вид

$$T_k(t) = \begin{cases} c_k e^{-\lambda_k^2 t}, & t > 0, \\ c_k \cos \lambda_k t + b_k \sin \lambda_k t, & t < 0. \end{cases} \quad (2.12)$$

Решение задачи (2.1)–(2.3) на основании (2.9) и (2.12) будем искать в виде суммы ряда

$$v(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) X_k(x). \quad (2.13)$$

Теперь для нахождения b_k , c_k воспользуемся условием (2.3):

$$v(x, -\alpha) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(-\alpha) \sin \pi k x = g(x). \quad (2.14)$$

Из (2.14) имеем

$$T_k(-\alpha) = c_k \cos \lambda_k \alpha - b_k \sin \lambda_k \alpha = g_k, \quad (2.15)$$

где

$$g_k = 2 \int_0^1 g(x) \sin \pi k x dx.$$

Теперь найдем искомую функцию

$$u(x, t) = \begin{cases} \varphi(x) - \int_t^\beta v(x, \tau) d\tau, & t > 0, \\ \psi(x) + \int_{-\alpha}^t v(x, \tau) d\tau, & t < 0. \end{cases} \quad (2.16)$$

Из (2.16) на основании (2.13) имеем

$$u(x, t) = \begin{cases} \varphi(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\lambda_k^2} (e^{-\lambda_k^2 \beta} - e^{-\lambda_k^2 t}) \sin \pi k x, & t > 0, \\ \psi(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k \sin \lambda_k t - b_k \cos \lambda_k t + c_k \sin \lambda_k \alpha + b_k \cos \lambda_k \alpha}{\lambda_k} \sin \pi k x, & t < 0. \end{cases} \quad (2.17)$$

Функция $u(x, t)$ в силу (1.2) должна удовлетворять условию $u(x, 0-0) = u(x, 0+0)$. Подставляя функцию (2.17) в последнее равенство, получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{-b_k + c_k \sin \lambda_k \alpha + b_k \cos \lambda_k \alpha}{\lambda_k} \sin \pi k x + \psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\lambda_k^2} (e^{-\lambda_k^2 \beta} - 1) \sin \pi k x + \varphi(x). \quad (2.18)$$

Тогда из (2.18) имеем

$$c_k [1 - e^{-\lambda_k^2 \beta} + \lambda_k \sin \lambda_k \alpha] + b_k (\cos \lambda_k \alpha - 1) \lambda_k = \lambda_k^2 (\varphi_k - \psi_k), \quad (2.19)$$

где

$$\varphi_k = 2 \int_0^1 \varphi(x) \sin \pi k x dx, \quad \psi_k = 2 \int_0^1 \psi(x) \sin \pi k x dx.$$

Таким образом, получена система (2.15) и (2.19) для нахождения неизвестных коэффициентов b_k и c_k . Откуда

$$b_k = \frac{\lambda_k^2(\varphi_k - \psi_k) \cos \lambda_k \alpha - g_k(1 - e^{-\lambda_k^2 \beta} + \lambda_k \sin \lambda_k \alpha)}{\lambda_k + \sin \lambda_k \alpha - \lambda_k \cos \lambda_k \alpha - e^{-\lambda_k^2 \beta} \sin \lambda_k \alpha}, \quad (2.20)$$

$$c_k = \frac{\lambda_k^2(\varphi_k - \psi_k) \sin \lambda_k \alpha + g_k(\cos \lambda_k \alpha - 1)\lambda_k}{\lambda_k + \sin \lambda_k \alpha - \lambda_k \cos \lambda_k \alpha - e^{-\lambda_k^2 \beta} \sin \lambda_k \alpha} \quad (2.21)$$

при условии, что определитель этой системы

$$\delta_{\alpha\beta}(k) = \lambda_k + \sin \lambda_k \alpha - \lambda_k \cos \lambda_k \alpha - e^{-\lambda_k^2 \beta} \sin \lambda_k \alpha \neq 0. \quad (2.22)$$

Теперь, подставляя (2.17) в уравнение (1.4), найдем

$$f_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-\pi^2 k^2 \beta} \sin \pi k x - \varphi''(x), \quad (2.23)$$

$$f_2(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \pi k (c_k \sin \pi k \alpha + b_k \cos \pi k \alpha) \sin \pi k x - \psi''(x). \quad (2.24)$$

3. Единственность решения задачи. Пусть пара функций $u(x, t)$ и $f(x, t)$ – решение задачи (1.2)–(1.8) при $\varphi(x) \equiv 0$, $\psi(x) \equiv 0$. Рассмотрим функцию

$$u_k(t) = 2 \int_0^1 u(x, t) \sin \pi k x dx. \quad (3.1)$$

Дифференцируя под знаком интеграла один раз при $t > 0$ и два раза при $t < 0$, учитывая уравнение (1.1), получим

$$\begin{aligned} u'_k(t) &= 2 \int_0^1 u_t(x, t) \sin \pi k x dx \\ &= 2 \int_0^1 (u_{xx}(x, t) - b^2 u(x, t) + f_1(x)) \sin \pi k x dx, \quad t > 0, \\ u''_k(t) &= 2 \int_0^1 u_{tt}(x, t) \sin \pi k x dx \\ &= 2 \int_0^1 (u_{xx}(x, t) - b^2 u(x, t) + f_2(x)) \sin \pi k x dx, \quad t < 0. \end{aligned}$$

Интегрируя по частям два раза с учетом однородных граничных условий (1.5)–(1.8), будем иметь

$$u'_k(t) + \lambda_k^2 u_k = f_{1k}, \quad t > 0, \quad (3.2)$$

$$u''_k(t) + \lambda_k^2 u_k = f_{2k}, \quad t < 0, \quad (3.3)$$

$$u_k(-\alpha) = 0, \quad u'_k(-\alpha) = 0, \quad u_k(\beta) = 0, \quad (3.4)$$

где

$$f_{1k} = 2 \int_0^1 f_1(x) \sin \pi k x dx, \quad f_{2k} = 2 \int_0^1 f_2(x) \sin \pi k x dx. \quad (3.5)$$

Дифференциальные уравнения (3.2) и (3.3) имеют общие решения

$$u_k = \begin{cases} \frac{f_{1k}}{\lambda_k^2} + C e^{-\lambda_k^2 t}, & t > 0, \\ \frac{f_{2k}}{\lambda_k^2} + C_1 \cos \lambda_k t + C_2 \sin \lambda_k t, & t < 0. \end{cases} \quad (3.6)$$

Поскольку решение $u(x, t)$ удовлетворяет условию (1.2), для функции (3.6) выполнены равенства

$$u_k(0-0) = u_k(0+0), \quad u'_k(0-0) = u'_k(0+0).$$

Отсюда следует, что

$$C_1 = \frac{f_{1k} - f_{2k}}{\lambda_k^2} + C, \quad C_2 = -\lambda_k C.$$

С учетом найденных значений C_1 и C_2 подставим решение (3.6) в условие (3.4). Тогда получим относительно неизвестных C , f_{1k} и f_{2k} систему

$$\begin{cases} \frac{f_{1k}}{\lambda_k^2} + C e^{-\lambda_k^2 \beta} = 0, \\ \frac{f_{2k}}{\lambda_k^2} + \frac{f_{1k} - f_{2k}}{\lambda_k^2} \cos \lambda_k \alpha + C(\cos \lambda_k \alpha + \lambda_k \sin \lambda_k \alpha) = 0, \\ \frac{f_{1k} - f_{2k}}{\lambda_k} \sin \lambda_k \alpha + C \lambda_k \sin \lambda_k \alpha - \lambda_k^2 \cos \lambda_k \alpha = 0. \end{cases} \quad (3.7)$$

Определитель системы (3.7) равен $\lambda_k^2 \delta_{\alpha\beta}(k)$ и в силу условия (2.22) отличен от нуля, поэтому она имеет только нулевое решение

$$C = 0, \quad f_{1k} = 0, \quad f_{2k} = 0, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Тогда из равенств (3.1) и (3.5) имеем

$$\int_0^1 u(x, t) \sin \pi k x dx = 0, \quad \int_0^1 f_i(x) \sin \pi k x dx = 0, \quad i = 1, 2.$$

Отсюда в силу полноты системы $\{X_k(x)\}$ в пространстве $L_2[0, 1]$ и условий (1.2), (1.3) следует, что $u(x, t) \equiv 0$ и $f(x, t) \equiv 0$.

Предположим, что условие (2.22) нарушено при $k = p$ и некоторых α и β , т.е.

$$\delta_{\alpha\beta}(p) = \lambda_p + \sin \lambda_p \alpha - \lambda_p \cos \lambda_p \alpha - e^{-\lambda_k^2 \beta} \sin \lambda_p \alpha = 0.$$

Последнее равенство в силу представления $\delta_{\alpha\beta}(k)$ в виде

$$\delta_{\alpha\beta}(k) = 2\sqrt{\lambda_k^2 + (1 - e^{-\lambda_k^2 \beta})^2} \sin\left(\frac{\lambda_k \alpha}{2} + \gamma_k\right) \sin \frac{\lambda_k \alpha}{2}, \quad (3.8)$$

где

$$\sin \gamma_k = \frac{1 - e^{-\lambda_k^2 \beta}}{\sqrt{\lambda_k^2 + (1 - e^{-\lambda_k^2 \beta})^2}}, \quad k \in \mathbb{N},$$

возможно только в том случае, когда

$$\alpha = \begin{cases} \frac{\pi n}{\lambda_p}, \\ \frac{2\pi n}{\lambda_p} - \frac{2\xi_p}{\lambda_p}, \end{cases} \quad \xi_p = \arcsin \frac{1 - e^{-\lambda_p^2 \beta}}{\sqrt{\lambda_p^2 + (1 - e^{-\lambda_p^2 \beta})^2}}, \quad p \in \mathbb{N}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Тогда система (3.7) имеет ненулевое решение. Например, если $f_{1p} = 1$, то задача (1.2)–(1.8) (где $\varphi(x) \equiv 0$, $\psi(x) \equiv 0$) имеет ненулевое решение

$$u_p(x, t) = \begin{cases} \left(\frac{1}{\lambda_p^2} + \frac{e^{-\lambda_p^2 t}}{\lambda_p^2 e^{-\lambda_p^2 \beta}} \right) \sin \pi p x, & t > 0, \\ \left(\frac{f_{2p}}{\lambda_p^2} - \frac{1 - f_{2p}}{\lambda_p^2} \lambda_p^2 \cos \lambda_p t - \frac{\cos \lambda_p t}{\lambda_p^2 e^{-\lambda_p^2 \beta}} - \frac{\sin \lambda_p t}{\lambda_p e^{-\lambda_p^2 \beta}} \right) \sin \pi p x, & t < 0, \end{cases}$$

$$f_{2p}(x) = (e^{-\lambda_p^2 \beta} - 1 + \lambda_p \operatorname{ctg} \lambda_p \alpha) e^{\lambda_p^2 \beta} \sin \pi p x.$$

Таким образом, доказана

ТЕОРЕМА 1. Если существует решение $u(x, t)$ и $f(x, t)$ задачи (1.2)–(1.8), то оно единственно только тогда, когда выполнено условие (2.22) при всех $k \in \mathbb{N}$.

4. Существование решения. В дальнейшем для простоты оценок будем считать, что $b = 0$, тогда (2.22) примет вид

$$\delta_{\alpha\beta}(k) = \pi k + \sin \pi k \alpha - \pi k \cos \pi k \alpha - e^{-\pi^2 k^2 \beta} \sin \pi k \alpha, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (4.1)$$

Рассмотрим выражения

$$\theta_{\alpha_1}(k) = |\sin \pi k \alpha_1|, \quad (4.2)$$

$$\zeta_{\alpha_1}(k) = |\sin(\pi k \alpha_1 + \gamma_k)|, \quad (4.3)$$

где $\alpha_1 = \alpha/2$,

$$\sin \gamma_k = \frac{1 - e^{-\pi^2 k^2 \beta}}{\sqrt{\pi^2 k^2 + (1 - e^{-\pi^2 k^2 \beta})^2}}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

ЛЕММА 1. Если $\alpha_1 > 0$ – иррациональное алгебраическое число второй степени, то существует такое положительное число B_{α_1} , зависящее от α_1 , что справедливо неравенство

$$\theta_{\alpha_1}(k) > \frac{B_{\alpha_1}}{k}, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (4.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Преобразуем выражение $\theta_{\alpha_1}(k)$ следующим образом:

$$\theta_{\alpha_1}(k) = |\sin \mu_k \alpha_1| = |\sin \pi k \alpha_1| = |\sin(\pi k \alpha_1 - \pi m)| = \left| \sin \pi k \left(\alpha_1 - \frac{m}{k} \right) \right|.$$

Для всякого $k \in \mathbb{N}$ можно подобрать такое $m \in \mathbb{Z}$ (например, $m = [\alpha_1 k]$), что будет выполнено следующее неравенство:

$$\left| \alpha_1 - \frac{m}{k} \right| < \frac{1}{k}. \quad (4.5)$$

Докажем, что для любого $k \in \mathbb{N}$ существует $m \in \mathbb{Z}$ такое, что справедливо неравенство

$$\left| \alpha_1 - \frac{m}{k} \right| < \frac{1}{2k}. \quad (4.6)$$

Предположим противное, т.е. предположим, что существует $k \in \mathbb{N}$ такое, что для любого $m \in \mathbb{Z}$ имеет место один из следующих случаев:

$$1) \quad \alpha_1 - \frac{m}{k} = \frac{1}{2k}; \quad 2) \quad \frac{1}{2k} < \alpha_1 - \frac{m}{k}; \quad 3) \quad \frac{1}{2k} < \frac{m}{k} - \alpha_1.$$

Очевидно, первый случай невозможен в силу иррациональности α_1 . Рассмотрим второй случай (третий случай аналогичен). Ввиду неравенства (4.5)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2k} < \alpha_1 - \frac{m}{k} < \frac{1}{k} &\iff -\frac{1}{2} < \alpha_1 k - (m+1) < 0 \\ &\iff |\alpha_1 k - (m+1)| < \frac{1}{2} &\iff \left| \alpha_1 - \frac{m+1}{k} \right| < \frac{1}{2k}. \end{aligned}$$

В силу произвольности $m \in \mathbb{Z}$ последнее неравенство противоречит предположению 2). Полученное противоречие доказывает справедливость утверждения (4.6). Лемма доказана.

Пусть $m \in \mathbb{Z}$ такое, что выполнено неравенство (4.6) или равносильное ему неравенство

$$\left| \pi k \left(\alpha_1 - \frac{m}{k} \right) \right| < \frac{\pi}{2}. \quad (4.7)$$

Тогда с учетом неравенства

$$\sin x > \frac{2x}{\pi}, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad (4.8)$$

и теоремы Лиувилля [11; с. 59] будем иметь

$$\sin \left| \pi k \left(\alpha_1 - \frac{m}{k} \right) \right| > \frac{2}{\pi} \pi k \left| \alpha_1 - \frac{m}{k} \right| = 2k \left| \alpha_1 - \frac{m}{k} \right| > 2k \frac{A_{\alpha_1}}{k^2} = \frac{B_{\alpha_1}}{k},$$

где A_{α_1} – положительное число.

ЛЕММА 2. *Существует бесконечное множество иррациональных алгебраических чисел $\alpha_1 > 0$ степени два, для которых справедливо неравенство*

$$\zeta_{\alpha_1}(k) = |\sin(\mu_k \alpha_1 + \gamma_k)| > \frac{C_{\alpha_1}}{k}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (4.9)$$

C_{α_1} – положительное число, зависящее от α_1 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Преобразуем выражение (4.3) следующим образом:

$$\zeta_{\alpha_1}(k) = |\sin(\pi k \alpha_1 + \gamma_k)| = |\sin(\pi k \alpha_1 - \pi m + \gamma_k)| = \sin \pi k \left| \alpha_1 - \frac{m}{k} + \frac{\gamma_k}{\pi k} \right|.$$

Пусть $m \in \mathbb{Z}$ такое, что выполнено условие (4.7). Не ограничивая общности рассуждения, можно считать, что

$$\gamma_k = \arcsin \frac{1 - e^{-\pi^2 k^2 \beta}}{\sqrt{\pi^2 k^2 + (1 - e^{-\pi^2 k^2 \beta})^2}}.$$

В силу неравенства

$$|\arcsin x| < \frac{\pi}{2} |x|, \quad 0 < x < 1,$$

справедлива следующая оценка:

$$\frac{\gamma_k}{\pi k} = \frac{1}{\pi k} \arcsin \frac{1 - e^{-\pi^2 k^2 \beta}}{\sqrt{\pi^2 k^2 + (1 - e^{-\pi^2 k^2 \beta})^2}} \leq \frac{1}{\pi k} \arcsin \frac{1}{\pi k} < \frac{1}{6k^2}. \quad (4.10)$$

Из (4.7) и (4.10) получим два возможных случая:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \frac{\pi}{2} \leq \pi k \left| \alpha_1 - \frac{m}{k} + \frac{\gamma_k}{\pi k} \right| \leq \pi k \left| \alpha_1 - \frac{m}{k} \right| + \pi k \left| \frac{\gamma_k}{\pi k} \right| \\ & < \pi k \left| \alpha_1 - \frac{m}{k} \right| + \frac{\pi}{6k} < \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6k} < \frac{3\pi}{4}; \\ 2) \quad & 0 < \left| \alpha_1 - \frac{m}{k} + \frac{\gamma_k}{\pi k} \right| < \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

В первом случае будем иметь

$$\sin \pi k \left| \alpha_1 - \frac{m}{k} + \frac{\gamma_k}{\pi k} \right| \geq \sin \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} = C_{\alpha_1} > \frac{C_{\alpha_1}}{k}.$$

Во втором случае с учетом неравенства (4.8) получим

$$\begin{aligned} \sin \pi k \left| \alpha_1 - \frac{m}{k} + \frac{\gamma_k}{\pi k} \right| &> \frac{2}{\pi} \pi k \left| \alpha_1 - \frac{m}{k} + \frac{\gamma_k}{\pi k} \right| \\ &= 2k \left| \alpha_1 - \frac{m}{k} + \frac{\gamma_k}{\pi k} \right| \geq 2k \left| \left| \alpha_1 - \frac{m}{k} \right| - \frac{\gamma_k}{\pi k} \right|. \end{aligned} \quad (4.11)$$

По условию α_1 является корнем только многочлена второй степени $f(x) = a_1 x^2 + a_2 x + a_3$ с целыми коэффициентами, при этом $a_1 \neq 0$. Тогда его можно представить в виде

$$f(x) = (x - \alpha_1) f_1(x) = (x - \alpha_1)(a_1 x + a_2 + a_1 \alpha_1), \quad (4.12)$$

где $f_1(x)$ – многочлен первой степени. Поскольку $f_1(\alpha_1) \neq 0$, то можно найти такое положительное число ε , что при всех $x \in (\alpha_1 - \varepsilon, \alpha_1 + \varepsilon)$ многочлен $f_1(x) \neq 0$.

Пусть $m, k, k > 0$, — любая пара целых чисел; если $|\alpha_1 - m/k| < \varepsilon$, то $f_1(m/k) \neq 0$. Тогда из тождества (4.12) при $x = m/k$ находим

$$\frac{m}{k} - \alpha_1 = \frac{f(m/k)}{f_1(m/k)} = \frac{a_1(m/k)^2 + a_2m/k + a_3}{f_1(m/k)} = \frac{a_1m^2 + a_2mk + k^2a_3}{k^2f_1(m/k)}. \quad (4.13)$$

Числитель последней дроби есть число целое, отличное от нуля, так как в противном случае имели бы $\alpha_1 = m/k$, а по условию леммы число α_1 является иррациональным. Следовательно, этот числитель по абсолютной величине не меньше единицы. Обозначив через M верхнюю грань функции $|f_1(x)|$ в интервале $(\alpha_1 - \varepsilon, \alpha_1 + \varepsilon)$, из равенства (4.13) получаем

$$\left| \alpha_1 - \frac{m}{k} \right| \geq \frac{1}{Mk^2}. \quad (4.14)$$

В случае же, если $|\alpha_1 - m/k| \geq \varepsilon$, и подавно имеем

$$\left| \alpha_1 - \frac{m}{k} \right| \geq \frac{\varepsilon}{k^2}. \quad (4.15)$$

Тогда из оценок (4.14) и (4.15) будем иметь

$$\left| \alpha_1 - \frac{m}{k} \right| \geq \frac{\delta}{k^2}, \quad \delta = \min \left\{ \varepsilon, \frac{1}{M} \right\}. \quad (4.16)$$

Теперь потребуем выполнения условия

$$\delta > \frac{1}{6}. \quad (4.17)$$

Последнее условие накладывает ограничения на коэффициенты многочлена $f(x)$.

Для простоты вычислений положим

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = -d, \quad \text{где } d \in \mathbb{N}, \quad \sqrt{d} \notin \mathbb{N}.$$

Тогда $f(x)$ примет вид

$$f(x) = x^2 - d, \quad \alpha_1 = \sqrt{d}, \quad \alpha_1 - \varepsilon \geq -\sqrt{d}.$$

Возьмем $\varepsilon = 2\sqrt{d}/l, l \in \mathbb{N}$. Теперь найдем

$$M = |f_1(\alpha_1 + \varepsilon)| = \alpha_1 + \varepsilon + \sqrt{d} = 2\sqrt{d} \frac{l+1}{l}.$$

Тогда условие (4.17) равносильно условию

$$\frac{l}{6} < 2\sqrt{d} < \frac{6l}{l+1}. \quad (4.18)$$

В силу неравенства $l/6 < 6l/(l+1)$ получим, что $l < 35$. Далее из (4.18), перебирая значения l , найдем все возможные d : $d = 2, 3, 5, 6, 7, 8$. Таким образом, построено множество

$$K = \{\alpha_1 \mid \alpha_1 = \sqrt{d}, d = 2, 3, 5, 6, 7, 8\}$$

чисел α_1 , для которых с учетом (4.11), (4.10), (4.16), (4.17) будем иметь

$$\sin \pi k \left| \alpha_1 - \frac{m}{k} + \frac{\gamma_k}{\pi k} \right| > 2k \left| \alpha_1 - \frac{m}{k} - \frac{\gamma_k}{\pi k} \right| > \frac{C_{\alpha_1}}{k}. \quad (4.19)$$

Учитывая вид выражения $\zeta_{\alpha_1}(k)$ и доказанную оценку (4.19), получим бесконечное множество

$$M = \{ \alpha_1 \mid \alpha_1 = \sqrt{d} + p, p \in \mathbb{Z}, \sqrt{d} > -p, d = 2, 3, 5, 6, 7, 8 \}$$

чисел α_1 , удовлетворяющих неравенству (4.9). Лемма доказана.

Из лемм 1 и 2 получим справедливость следующего утверждения.

ЛЕММА 3. *Существует бесконечное множество иррациональных алгебраических чисел $\alpha > 0$ степени два, для которых справедливо неравенство*

$$|\delta_{\alpha\beta}(k)| > \frac{D_\alpha}{k^2}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (4.20)$$

D_α – положительное число, зависящее от α .

Далее, покажем, что при определенных условиях на функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и α функция $u(x, t)$, определяемая равенством (2.17), удовлетворяет условиям (1.2).

Формально из (2.17) почленным дифференцированием составим ряды

$$u_{tt}(x, t) = u_{xxt}(x, t) = - \sum_{k=1}^{\infty} \pi^2 k^2 c_k e^{-\pi^2 k^2 t} \sin \pi k x, \quad t > 0, \quad (4.21)$$

$$u_{ttt}(x, t) = u_{xxt}(x, t) = - \sum_{k=1}^{\infty} \pi^2 k^2 (b_k \cos \pi k t - c_k \sin \pi k t) \sin \pi k x, \quad t < 0. \quad (4.22)$$

Пусть α такое, что выполнено неравенство (4.20). Тогда из (2.20) и (2.21), получим следующие оценки:

$$|b_k|, |c_k| \leq \frac{1}{|\delta_{\alpha\beta}(k)|} (\pi^2 k^2 |\varphi_k - \psi_k| + (1 + \pi k) |g_k|) < \frac{k^2}{D_\alpha} (\pi^2 k^2 |\varphi_k - \psi_k| + (1 + \pi k) |g_k|). \quad (4.23)$$

Ряды (2.17), (4.21) и (4.22) в силу оценки (4.23) мажорируются рядом

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\pi^2 k^4}{D_\alpha} (\pi^2 k^2 |\varphi_k - \psi_k| + (1 + \pi k) |g_k|). \quad (4.24)$$

Докажем сходимость ряда (4.24). Проинтегрируем соответственно семь и шесть раз по частям интегралы, определяющие $\varphi_k - \psi_k$ и g_k , считая $\varphi(x), \psi(x) \in C^7[0, 1]$, $g(x) \in C^6[0, 1]$,

$$\begin{aligned} \varphi''(0) &= \psi''(0), \quad \varphi''(1) = \psi''(1), \\ \varphi^{(4)}(0) &= \psi^{(4)}(0), \quad \varphi^{(4)}(1) = \psi^{(4)}(1), \quad \varphi^{(6)}(0) = \psi^{(6)}(0), \quad \varphi^{(6)}(1) = \psi^{(6)}(1), \\ g(0) &= g(1) = g''(0) = g''(1) = g^{(4)}(0) = g^{(4)}(1) = 0. \end{aligned}$$

Тогда получим

$$\begin{aligned}\varphi_k - \psi_k &= 2 \int_0^1 (\varphi(x) - \psi(x)) \sin \pi k x \, dx = -\frac{2}{\pi^7 k^7} \int_0^1 (\varphi^{(7)}(x) - \psi^{(7)}(x)) \cos \pi k x \, dx, \\ g_k &= 2 \int_0^1 g(x) \sin \pi k x \, dx = -\frac{2}{\pi^6 k^6} \int_0^1 g^{(6)}(x) \sin \pi k x \, dx.\end{aligned}$$

Сходимость ряда (4.24) следует из сходимости рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\varphi_k^{(7)})^2 \leq \|\varphi^{(7)}\|_{L_2[0,1]}^2, \quad \sum_{k=1}^{\infty} (\psi_k^{(7)})^2 \leq \|\psi^{(7)}\|_{L_2[0,1]}^2, \quad \sum_{k=1}^{\infty} (g_k^{(6)})^2 \leq \|g^{(6)}\|_{L_2[0,1]}^2,$$

где $\varphi_k^{(7)}$, $\psi_k^{(7)}$ и $g_k^{(6)}$ — соответственно коэффициенты разложения функций $\varphi^{(7)}(x)$ и $\psi^{(7)}(x)$ в ряд по косинусам, и коэффициенты разложения функции $g^{(6)}(x)$ в ряд по синусам, и следующих оценок:

$$\begin{aligned}\frac{\pi^4 k^6}{D_\alpha} |\varphi_k - \psi_k| &\leq \frac{|\varphi_k^{(7)}| + |\psi_k^{(7)}|}{k \pi^3 D_\alpha} \leq \frac{1}{\pi^3 D_\alpha} \left[\frac{1}{k^2} + \frac{1}{2} (|\varphi_k^{(7)}|^2 + |\psi_k^{(7)}|^2) \right], \\ \frac{\pi^2 k^4}{D_\alpha} (1 + \pi k) |g_k| &\leq \frac{|g_k^{(6)}|}{k^2 \pi^4 D_\alpha} + \frac{|g_k^{(6)}|}{k \pi^3 D_\alpha} \leq \frac{|g_k^{(6)}|}{k^2 \pi^4 D_\alpha} + \frac{1}{\pi^3 D_\alpha} \left[\frac{1}{k^2} + \frac{1}{2} |g_k^{(6)}|^2 \right].\end{aligned}$$

Тогда ряды (2.17), (4.21), (4.22) по признаку Вейерштрасса сходятся абсолютно и равномерно в соответствующих областях $\overline{D}_+$ и $\overline{D}_-$. Следовательно, функция $u(x, t)$, определяемая равенством (2.17), удовлетворяет условию (1.2). Аналогично, функции (2.23) и (2.24) удовлетворяют (1.3).

Таким образом доказано следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. Если $\varphi(x), \psi(x) \in C^7[0, 1]$,

$$\begin{aligned}\varphi(0) = \psi(0) = \varphi(1) = \psi(1) = 0, \quad \varphi''(0) = \psi''(0), \quad \varphi''(1) = \psi''(1), \\ \varphi^{(4)}(0) = \psi^{(4)}(0), \quad \varphi^{(4)}(1) = \psi^{(4)}(1), \quad \varphi^{(6)}(0) = \psi^{(6)}(0), \quad \varphi^{(6)}(1) = \psi^{(6)}(1),\end{aligned}$$

$$g(x) \in C^6[0, 1],$$

$$g(0) = g(1) = g''(0) = g''(1) = g^{(4)}(0) = g^{(4)}(1) = 0$$

и α, β такие, что выполнены условия (2.22), (4.20), то существует единственное решение задачи (1.2)–(1.8), определяемое формулами (2.17), (2.23), (2.24).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Х. Г. Бжихатлов, А. М. Нахушев, “Об одной краевой задаче для уравнения смешанного типа”, *Докл. АН СССР*, **183**:2 (1968), 261–264.
- [2] Т. Д. Джураев, *Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов*, Фан, Ташкент, 1979.
- [3] Т. Д. Джураев, А. Сопуев, М. Мамажанов, *Краевые задачи для уравнений парабола-гиперболического типа*, Фан, Ташкент, 1986.
- [4] К. Б. Сабитов, “К теории уравнений смешанного парабола-гиперболического типа со спектральным параметром”, *Дифференц. уравнения*, **25**:1 (1989), 117–126.

- [5] А.Н. Тихонов, “Об устойчивости обратных задач”, *Докл. АН СССР*, **39**:5 (1943), 195–198.
- [6] В.К. Иванов, В.В. Васин, В.П. Танана, *Теория линейных некорректных задач и ее приложения*, Наука, М., 1978.
- [7] М.М. Лаврентьев, В.Г. Романов, С.П. Шипатский, *Некорректные задачи математической физики и анализа*, Наука, М., 1980.
- [8] М.М. Лаврентьев, К.Г. Резницкая, В.Г. Яхно, *Одномерные обратные задачи математической физики*, Изд-во «Наука», Сиб. отд., Новосибирск, 1982.
- [9] А.М. Денисов, *Введение в теорию обратных задач*, Изд-во МГУ, М., 1994.
- [10] К.Б. Сабитов, “Задача Дирихле для уравнения смешанного типа в прямоугольной области”, *Докл. РАН*, **413**:1 (2007), 23–26.
- [11] А.Я. Хинчин, *Цепные дроби*, Физматгиз, М., 1961.

К.Б. Сабитов

Стерлитамакский филиал АН Республики Башкортостан,
г. Стерлитамак
E-mail: Sabitov_fmfm@mail.ru

Поступило

11.11.2008

Э.М. Сафин

Стерлитамакский филиал АН Республики Башкортостан,
г. Стерлитамак
E-mail: Eldar4u@rambler.ru