Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. Г. Арабаджян, Об одной бесконечной алгебраической системе в нерегулярном случае, *Матем. заметки*, 2011, том 89, выпуск 1, 3–11

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm6578>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 12:49:25

Об одной бесконечной алгебраической системе в нерегулярном случае

Л. Г. Арабаджян

В работе получены достаточные условия нетривиальной разрешимости систем вида

$$\varphi_i = b_i + \lambda_i \sum_{j=0}^{\infty} a_{i-j} \varphi_j, \quad i \in \mathbb{Z}_+ \stackrel{\text{def}}{=} \{0, 1, 2, \dots, n, \dots\},$$

и соответствующих однородных систем. Предполагается, что данные последовательности $b = (b_0, b_1, b_2, \dots)$, $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots)$ и данная теплицевая матрица $A = (a_{i-j})$ удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} a_j \geq 0, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j = 1, \quad \sum_{j=-\infty}^{\infty} |j| a_j < \infty, \quad \sum_{j=-\infty}^{\infty} j a_j < 0, \\ b_j \geq 0, \quad j \in \mathbb{Z}_+, \quad \sum_{j=0}^{\infty} b_j < \infty, \quad 1 \leq \lambda_i \leq \left(\sum_{j=-\infty}^i a_j \right)^{-1}, \quad i \in \mathbb{Z}_+. \end{aligned}$$

При выполнении указанных условий построены ограниченные решения однородной и неоднородной систем указанного выше вида.

Библиография: 8 названий.

Рассмотрим систему вида

$$f_i = b_i + \sum_{j=0}^{\infty} c_{ij} f_j, \quad i \in \mathbb{Z}_+ \stackrel{\text{def}}{=} \{0, 1, 2, \dots, n, \dots\}, \quad (1)$$

относительно искомой последовательности $f = (f_0, f_1, f_2, \dots)$. Системы такого вида возникают в приложениях и представляют известный теоретический и прикладной интерес. Наиболее интересные и сложные ситуации возникают в особых случаях, когда необратима матрица $I - C$, где $C = (c_{ij})_{i,j=0}^{\infty}$, а I – бесконечная единичная матрица. Результаты общего характера, связанные с разрешимостью системы (1), содержатся в [1], [2].

В [2] введены понятия регулярных и вполне регулярных систем вида (1): регулярные системы характеризуются условиями

$$q_i \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=0}^{\infty} |c_{ij}| < 1, \quad i \in \mathbb{Z}_+, \quad (\delta 1)$$

вполне регулярные системы – условиями

$$q_i \leq q < 1, \quad i \in \mathbb{Z}_+. \quad (\delta 2)$$

Для регулярных систем (1) в работе [2] получены достаточные условия существования ограниченного решения $f = (f_0, f_1, f_2, \dots) \in m$. А именно, система (1) в случае (δ1) обладает ограниченным решением, если величины b_i удовлетворяют условиям

$$|b_1| \leq k(1 - q_i), \quad i \in \mathbb{Z}_+, \quad (\delta 3)$$

при котором $k > 0$.

Возникает вопрос изучения системы (1) в тех случаях, когда условия регулярности (δ1) нарушаются. Заметим, что в случае теплицевых матриц $C = (c_{i-j})$ удается значительно ослабить требования на матрицу и свободный член (см. [3], [4]).

Случай, когда имеют место соотношения

$$c_{ij} \geq 0, \quad q_i = 1, \quad i, j \in \mathbb{Z}_+, \quad (\delta 4)$$

назовем *ко-консервативным* (*co-conservative*). Возможность получения результатов в данном направлении на основе треугольной факторизации матрицы C дается теоремой 7.4 работы [5]. Для двусторонней бесконечной ко-консервативной системы

$$\hat{f}_i = b_i + \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_{i-j} \hat{f}_j, \quad i \in \mathbb{Z} \stackrel{\text{def}}{=} \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\},$$

вопросы разрешимости изучены в [6] посредством факторизации теплицевой матрицы $A = (a_{i-j})_{i,j=-\infty}^{\infty}$ на основе результатов работы [7].

В настоящей работе рассматривается определенный класс ко-консервативных систем вида (1), обладающих положительным решением. Получены достаточные условия существования нетривиальных неотрицательных решений систем вида

$$\varphi_i = b_i + \lambda_i \cdot \sum_{j=0}^{\infty} a_{i-j} \varphi_j, \quad i \in \mathbb{Z}_+, \quad (2)$$

относительно искомой последовательности $\varphi = (\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots)$ и соответствующих однородных систем. Предполагается, что последовательности $b = (b_0, b_1, b_2, \dots)$ и $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots)$, а также теплицевая матрица $A = (a_{i-j}t)_{i,j=0}^{\infty}$ удовлетворяют условиям

$$a_j \geq 0, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad (\alpha 1)$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j = 1, \quad (\alpha 2)$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} |j| a_j < \infty, \quad (\alpha 3)$$

$$\nu = \sum_{j=-\infty}^{\infty} j a_j < 0, \quad (\alpha 4)$$

$$1 \leq \lambda_k \leq \left(\sum_{j=-\infty}^k a_j \right)^{-1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (\beta 1)$$

$$b_k \geq 0, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad (\gamma 1)$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} b_j < +\infty. \quad (\gamma 2)$$

Системы вида (2) возникают в некоторых задачах теории марковских цепей.

1. Разрешимость однородной системы. Наряду с (2) рассмотрим однородную систему

$$\psi_i = \lambda_i \cdot \sum_{j=0}^{\infty} a_{i-j} \psi_j, \quad i \in \mathbb{Z}_+, \quad (3)$$

где матрица $A = (a_{i-j})$ и последовательность $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots)$ удовлетворяют условиям (α1)–(α4) и (β1), и изучим вопросы ее нетривиальной разрешимости. В частном случае при $\lambda_i = 1$, $i \in \mathbb{Z}_+$ из системы (3) получается дискретное (однородное) уравнение Винера–Хопфа

$$\eta_i = \sum_{j=0}^{\infty} a_{i-j} \eta_j, \quad i \in \mathbb{Z}_+. \quad (4)$$

Заметим, что при выполнении условий (α1), (α2) и $a_k \neq 0$ для всех $k \in \mathbb{Z}$ система (4) является регулярной, но не вполне регулярной, ибо в этом случае имеем

$$q_i = \sum_{j=0}^{\infty} |c_{ij}| = \sum_{j=0}^{\infty} a_{i-j} = \sum_{k=-\infty}^i a_k < 1, \quad i \in \mathbb{Z}_+.$$

При тех же условиях и при $\lambda_k = \left(\sum_{j=-\infty}^k a_j \right)^{-1}$ для всех $k \in \mathbb{Z}_+$ системы (2) и (3) являются ко-консервативными в силу соотношений

$$q_i = \lambda_i \cdot \sum_{j=0}^{\infty} a_{i-j} = \lambda_i \cdot \sum_{p=-\infty}^i a_p = 1, \quad i \in \mathbb{Z}_+.$$

Вопросы разрешимости системы (4) и соответствующей неоднородной системы

$$\zeta_i = b_i + \sum_{j=0}^{\infty} a_{i-j} \zeta_j, \quad i \in \mathbb{Z}_+, \quad (5)$$

при выполнении (α1), (α2) на основе треугольной факторизации матрицы $I - A$ изучались в работе [3]. В этой работе построено, в частности, положительное, ограниченное и возрастающее решение $\eta = (\eta_0, \eta_1, \eta_2, \dots)$ системы (4) в случае (α1), (α2) при дополнительных условиях (α3), (α4). Соответствующее решение, удовлетворяющее условию $\eta_0 = 1$, обозначим через η^* : $\eta^* = (1, \eta_1^*, \eta_2^*, \dots)$.

1°. Введем обозначение

$$\hat{\eta} = \sup_{1 \leq k < \infty} \eta_k^*. \quad (6)$$

Очевидно, что $1 \leq \hat{\eta} < \infty$.

Займемся вопросами разрешимости системы (3) при (α1)–(α4) и (β1). Рассмотрим итерации

$$\psi_i^{(n+1)} = \lambda_i \cdot \sum_{j=0}^{\infty} a_{i-j} \psi_j^{(n)}, \quad \psi_i^{(0)} = \hat{\eta}, \quad i \in \mathbb{Z}_+, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (7)$$

где величина $\hat{\eta}$ определяется согласно (6). Покажем, что эти итерации монотонно убывают по n и снизу ограничены величинами η_i^* , $i \in \mathbb{Z}_+$. Действительно, при $n = 0$ из (7) для всех $i \in \mathbb{Z}_+$ имеем

$$\psi_i^{(1)} = \lambda_i \cdot \sum_{j=0}^{\infty} a_{i-j} \hat{\eta} = \hat{\eta} \cdot \lambda_i \cdot \sum_{k=-\infty}^i a_k \leq \hat{\eta} = \psi_i^{(0)}, \quad \text{т.е.} \quad \psi_i^{(1)} \leq \psi_i^{(0)}.$$

Допустим, что для некоторого $n \in \mathbb{N}$ и для всех $i \in \mathbb{Z}_+$ имеют место неравенства $\psi_i^{(n)} \leq \psi_i^{(n-1)}$. Тогда из (7) получаем

$$\psi_i^{(n+1)} = \lambda_i \cdot \sum_{j=0}^{\infty} a_{i-j} \psi_j^{(n)} \leq \lambda_i \cdot \sum_{j=0}^{\infty} a_{i-j} \psi_j^{(n-1)} = \psi_i^{(n)}.$$

Таким образом, для всех $i \in \mathbb{Z}_+$ и $n = 0, 1, 2, \dots$ имеем $\psi_i^{(n)} \leq \psi_i^{(n-1)}$. Рассмотрим величины $\psi_i^{(n)}$ при фиксированном $i \in \mathbb{Z}_+$. Очевидно, что $\psi_i^{(n)} \downarrow$ по n . С другой стороны, используя соотношения (7), методом математической индукции можно доказать справедливость оценок

$$\psi_i^{(n)} \geq \eta_i^*, \quad i \in \mathbb{Z}_+, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Итак, при любом фиксированном $i \in \mathbb{Z}_+$ монотонно убывающая последовательность $\{\psi_i^{(n)}\}$ ограничена снизу. Поэтому существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_i^{(n)} = \psi_i$. Рассмотрим предельную последовательность $\psi = (\psi_0, \psi_1, \psi_2, \dots)$. Поскольку ряд правой части равенства (7) сходится равномерно по n , можно в этом равенстве перейти к пределу при $n \rightarrow \infty$. В результате получаем равенства (3) относительно предельных величин ψ_i , $i \in \mathbb{Z}_+$.

Таким образом, доказана

ТЕОРЕМА 1. Пусть в системе (3) матрица $A = (a_{i-j})$ удовлетворяет условиям (α1)–(α4), а последовательность $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots)$ – условию (β1). Тогда эта система обладает ограниченным нетривиальным решением $\psi = (\psi_0, \psi_1, \psi_2, \dots)$ таким, что $\psi_i \geq \eta_i^*$ для всех $i \in \mathbb{Z}_+$, где $\eta^* = (\eta_1^*, \eta_2^*, \dots)$ – рассмотренное выше решение системы (4).

2°. На основе результатов работ [3], [4], [6] при некоторых дополнительных ограничениях на величины λ_i можно доказать существование нетривиального неотрицательного решения системы (3) в случае, когда выполняются условия (α1)–(α4) и $0 \leq \lambda_i \leq 1$, $i \in \mathbb{Z}_+$. В работе [8] рассматривалась подобная задача для непрерывного аналога системы (3).

Рассмотрим систему

$$\varphi_i^* = (1 - \lambda_i^*) \eta_i^* + \lambda_i^* \cdot \sum_{j=0}^{\infty} a_{i-j} \varphi_j^*, \quad i \in \mathbb{Z}_+, \quad (8)$$

где матрица $A = (a_{i-j})$ удовлетворяет условиям $(\alpha 1)$ – $(\alpha 4)$, $\eta^* = (1, \eta_1^*, \eta_2^*, \dots)$ – вышеуказанное (положительное и ограниченное) решение системы (4) с той же матрицей A , а последовательность $\lambda^* = (\lambda_0^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots)$ удовлетворяет условиям

$$0 \leq \lambda_i^* \leq 1, \quad i \in \mathbb{Z}_+, \quad \sum_{j=0}^{\infty} (1 - \lambda_i^*) < +\infty. \quad (\beta 2)$$

Очевидно, что в этом случае имеем

$$\sum_{i=0}^{\infty} (1 - \lambda_i^*) \eta_i^* < +\infty.$$

Система (8) имеет очевидное решение $\varphi_i^* = \eta_i^*$, $i \in \mathbb{Z}_+$. Ниже будет доказано, что эта же система обладает также другим решением $\tilde{\varphi}^* = (\tilde{\varphi}_0^*, \tilde{\varphi}_1^*, \tilde{\varphi}_2^*, \dots)$ со свойствами

$$\tilde{\varphi}_i^* \geq 0, \quad i \in \mathbb{Z}_+ \quad \tilde{\varphi}_i^* \rightarrow 0, \quad i \rightarrow \infty. \quad (9)$$

С этой целью рассмотрим неоднородную систему (5) и систему

$$\rho_i = b_i + \lambda \cdot \sum_{j=0}^{\infty} a_{i-j} \rho_j, \quad i \in \mathbb{Z}_+, \quad (10)$$

с той же, что и в (8), матрицей $A = (a_{i-j})$ и величинами λ_i , удовлетворяющими условиям $0 \leq \lambda_i \leq 1$, $i \in \mathbb{Z}_+$. Система (5) будет мажорантной для системы (10) (см. [2]). Согласно теореме 1 работы [2] в случае существования неотрицательного решения $\zeta = (\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \dots)$, $\zeta_i \geq 0$, $i \in \mathbb{Z}_+$, системы (5), система (10) также обладает решением $\rho = (\rho_0, \rho_1, \rho_2, \dots)$, которое может быть найдено методом последовательных приближений и для которого в случае $b_i \geq 0$, $i \in \mathbb{Z}_+$ справедливы неравенства

$$0 \leq \rho_i \leq f_i, \quad i \in \mathbb{Z}_+. \quad (11)$$

Теперь рассмотрим систему (5) и докажем, что при условиях $(\alpha 1)$ – $(\alpha 4)$, $b_i \geq 0$ и $\sum_{j=0}^{\infty} b_i < +\infty$ эта система обладает решением $\zeta = (\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \dots)$ со свойствами

$$\zeta_i \geq 0, \quad i \in \mathbb{Z}_+, \quad \zeta_i \rightarrow 0, \quad i \rightarrow \infty. \quad (12)$$

В работе [7] (см. также [3], [4]), для решения систем вида (5) был разработан оригинальный метод, основанный на треугольной факторизации матрицы $I - A$, где I – бесконечная единичная матрица.

Пусть $A = (a_{i-j})$ – теплицевая матрица, удовлетворяющая условиям $(\alpha 1)$, $(\alpha 2)$. Тогда существуют (см. [7]) такие треугольные теплицевые матрицы $X = (x_{i-j})$, $x_k = 0$ при $k < 0$ и $Y = (y_{i-j})$, $y_k = 0$ при $k < 0$, что

$$I - A = (I - Y)(I - X). \quad (13)$$

В [3] доказано, в частности, что если к условиям $(\alpha 1)$, $(\alpha 2)$ добавить условия $(\alpha 3)$, $(\alpha 4)$, то матрицы X и Y будут обладать свойствами

$$x_j \geq 0, \quad y_j \geq 0, \quad \sigma_- \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=0}^{\infty} y_j = 1, \quad \sigma_+ \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=0}^{\infty} x_j < 1, \quad (14)$$

что означает необратимость $I - Y$ и обратимость $I - X$ любом из пространств l_1 , m , c .

Факторизация (13) сводит решение системы [5] к последовательному решению следующих двух систем:

$$h_i = b_i + \sum_{j=i}^{\infty} y_{j-i} h_j, \quad i \in \mathbb{Z}_+, \quad (15)$$

$$f_i = h_i + \sum_{j=0}^i x_{i-j} f_j, \quad i \in \mathbb{Z}_+. \quad (16)$$

В [3] доказано (см. лемму 4), что при $\sigma_- = 1$, $b_i \geq 0$ и $\sum_{j=0}^{\infty} b_j < +\infty$ система (15) обладает решением $h = (h_0, h_1, h_2, \dots)$, причем

$$h_i \geq 0, \quad i \in \mathbb{Z}_+, \quad h_i \leq \sum_{j=i}^{\infty} b_j, \quad (17)$$

и поэтому $h_i \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$.

Справедливо следующее утверждение.

ЛЕММА 1. *При условиях (17) и $\sigma_+ < 1$ решение системы (16) (которое является также решением системы (5)) будет обладать свойствами*

$$f_i \geq 0, \quad i \in \mathbb{Z}_+, \quad f_i \rightarrow 0, \quad i \rightarrow \infty. \quad (18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что для доказательства леммы достаточно показать, что соотношения (18) имеют место при $h_i = \sum_{j=i}^{\infty} b_j$.

Решение системы (16) в указанном случае можно представить в следующем виде (см. [4; п. 12]):

$$f_i = \sum_{k=i}^{\infty} b_k + \sum_{j=0}^i \omega_{i-j} \sum_{k=j}^{\infty} b_k, \quad i \in \mathbb{Z}_+, \quad (19)$$

где последовательность $\omega = (\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots)$ определяется из системы

$$\omega_i = x_i + \sum_{j=0}^i x_{i-j} \omega_j, \quad i \in \mathbb{Z}_+$$

и при $\sigma_+ < 1$ обладает свойствами

$$\omega_i \geq 0, \quad i \in \mathbb{Z}_+, \quad \sum_{j=0}^{\infty} \omega_j < +\infty.$$

Имеем $\sum_{j=i}^{\infty} b_j \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$. Для второй суммы правой части равенства (19) при $0 \leq p \leq i$ получаем

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^i \omega_{i-j} \sum_{k=j}^{\infty} b_k &= \sum_{j=0}^p \omega_{i-j} \sum_{k=j}^{\infty} b_k + \sum_{j=p}^i \omega_{i-j} \sum_{k=j}^{\infty} b_k \\ &\leq \|b\|_{l_1} \cdot \sum_{k=i-p}^i \omega_k + \sum_{j=p}^i \omega_{i-j} \sum_{k=j}^{\infty} b_k. \end{aligned} \quad (20)$$

Для произвольного $\varepsilon > 0$ выберем $p \in \mathbb{N}$ и $i \in \mathbb{N}$ так, чтобы

$$\sum_{k=p}^{\infty} b_k < \frac{\varepsilon}{2\|\omega\|_{l_1}}, \quad \sum_{k=p}^{\infty} \omega_k < \frac{\varepsilon}{2\|b\|_{l_1}}, \quad i \geq 2p.$$

Тогда из (20) получаем

$$0 \leq \sum_{j=0}^i \omega_{i-j} \sum_{k=j}^{\infty} b_k < \varepsilon,$$

что означает

$$\sum_{j=0}^i \omega_{i-j} \sum_{k=j}^{\infty} b_k \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad i \rightarrow \infty.$$

Этим завершается доказательство леммы.

Теперь, учитывая оценки (11), можно утверждать, что при $0 \leq \lambda_i \leq 1$, $i \in \mathbb{Z}_+$, и $\sum_{k=0}^{\infty} b_k < +\infty$ решение $\rho = (\rho_0, \rho_1, \rho_2, \dots)$ системы (10), являющееся пределом соответствующих итераций, будет удовлетворять условиям

$$\rho_i \geq 0, \quad i \in \mathbb{Z}_+, \quad \rho_i \rightarrow 0, \quad i \rightarrow \infty.$$

Последние соотношения позволяют получить второе решение $\tilde{\varphi}^* = (\tilde{\varphi}_0^*, \tilde{\varphi}_1^*, \tilde{\varphi}_2^*, \dots)$ системы (8), обладающее свойствами (9). Оно является пределом итераций

$$\varphi_i^{(n+1)} = (1 - \lambda_i^*)\eta_i^* + \lambda_i^* \sum_{j=0}^{\infty} a_{i-j} \varphi_j^{(n)}, \quad \varphi_i^{(0)} = 0, \quad i \in \mathbb{Z}_+, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

С использованием этих соотношений индукцией по n можно доказать справедливость оценок $\varphi_i^{(n)} \leq \eta_i^*$, $i \in \mathbb{Z}_+$, $n = 0, 1, 2, \dots$, откуда в пределе при $n \rightarrow \infty$ получаем

$$\tilde{\varphi}_i^* \leq \eta_i^*, \quad i \in \mathbb{Z}_+. \quad (21)$$

Таким образом, получили два решения системы (8): одним из решений $\varphi^* = (\varphi_0^*, \varphi_1^*, \varphi_2^*, \dots)$ является последовательность $\varphi_i^* = \eta_i^*$, $i \in \mathbb{Z}_+$, так что $1 \leq \varphi_1^* \leq \varphi_2^* \leq \dots$; второе решение $\tilde{\varphi}^* = (\tilde{\varphi}_0^*, \tilde{\varphi}_1^*, \tilde{\varphi}_2^*, \dots)$ удовлетворяет условиям (9) и оценкам (21). Поэтому их разность, представляющую неотрицательную и ненулевую последовательность $\psi^* = (\psi_0^*, \psi_1^*, \psi_2^*, \dots)$, где $\psi_i^* = \varphi_i^* - \tilde{\varphi}_i^*$, $i \in \mathbb{Z}_+$, является решением системы

$$\psi_i^* = \lambda_i^* \cdot \sum_{j=0}^{\infty} a_{i-j} \psi_j^*, \quad i \in \mathbb{Z}_+. \quad (22)$$

Итак, справедлива

ЛЕММА 2. При выполнении условий (α1)–(α4) и (β1) однородная система (22) обладает неотрицательным и ненулевым решением $\psi^* = (\psi_0^*, \psi_1^*, \psi_2^*, \dots)$, причем

$$\varphi_i^* \leq \eta_i^*, \quad i \in \mathbb{Z}_+, \quad \varphi_i^* - \eta_i^* \rightarrow 0, \quad i \rightarrow \infty, \quad (23)$$

где η^* – соответствующее решение системы (4) с той же матрицей $A = (a_{i-j})$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Ввиду монотонности и ограниченности последовательности η^* существует предел $\tilde{\eta} = \lim_{k \rightarrow \infty} \eta_k^*$, причем $\tilde{\eta} > 1$. С другой стороны, $\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{\varphi}_k^* = 0$. Поэтому для произвольного $0 < \tau < 1$ существует номер k_0 такой, что $\psi_k^* \geq \tau$ при $k \geq k_0$.

2. Неоднородная система и условия ее разрешимости. Теперь мы докажем, что при условиях $(\alpha 1)$ – $(\alpha 4)$, $(\beta 1)$ и $(\gamma 1)$, $(\gamma 2)$ существует ограниченное решение системы (2), если дополнительно потребовать выполнение условия

$$\sum_{j=-\infty}^p a_j > 0, \quad p \in \mathbb{Z}. \quad (\alpha 5)$$

Выберем последовательность $\lambda^* = (\lambda_0^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots)$ так, чтобы она удовлетворяла условиям $(\beta 2)$ и определялась через данную последовательность $b = (b_0, b_1, b_2, \dots)$ системы (2). А именно, положим

$$\lambda_k^* \stackrel{\text{def}}{=} 1 - \mu b_k, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad (24)$$

где μ – произвольное действительное число, $0 < \mu < (\sum_{j=0}^{\infty} b_j)^{-1}$. Покажем, что если последовательность $b = (b_0, b_1, b_2, \dots)$ удовлетворяет условиям $(\gamma 1)$, $(\gamma 2)$, то определяемая посредством равенств (24) последовательность λ^* будет обладать свойствами $(\beta 2)$ и, следовательно, соответствующая система (22) будет иметь нетривиальное ограниченное решение ψ^* .

Действительно, из определения (24) непосредственно следует, что $0 \leq \lambda_k^* \leq 1$ и $1 - \lambda_k^* = \mu \cdot b_k$, что равносильно условиям $(\beta 2)$.

Теперь рассмотрим ограниченные решения ψ и ψ^* систем (3) и (22), существующие в силу теоремы 1 и леммы 2. Обозначая через Δ_i , $i \in \mathbb{Z}_+$, разности $\Delta_i = \psi_i - \psi_i^*$ (очевидно, что $\Delta_i \geq 0$, $i \in \mathbb{Z}_+$), из (3) и (22) получим

$$\Delta_i = \sigma_i + \lambda_i \cdot \sum_{j=0}^{\infty} a_{i-j} \Delta_j, \quad i \in \mathbb{Z}_+, \quad (25)$$

где величины σ_i определяются посредством равенств

$$\sigma_i \stackrel{\text{def}}{=} (\lambda_i - \lambda_i^*) \cdot \sum_{j=0}^{\infty} a_{i-j} \psi_j^*, \quad i \in \mathbb{Z}_+.$$

Совокупность равенств (25) можно рассматривать как систему вида (2), имеющую неотрицательное ограниченное решение $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \dots)$. Для величин σ_i имеем оценки

$$\sigma_i \geq (1 - \lambda_i^*) \cdot \sum_{j=0}^{\infty} a_{i-j} \psi_j^* = \mu \cdot b_i \cdot \sum_{j=0}^{\infty} a_{i-j} \psi_j^*, \quad i \in \mathbb{Z}_+, \quad (26)$$

С другой стороны, учитывая замечание п. 1, можно оценить суммы в соотношениях (26):

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_{i-j} \psi_j^* \geq \sum_{j=k_0}^{\infty} a_{i-j} \psi_j^* \geq \tau \cdot \sum_{s=-\infty}^{i-k_0} a_s \geq \tau \cdot \sum_{s=-\infty}^{-k_0} a_s \equiv \xi,$$

где $\xi > 0$ ввиду условия $(\alpha 5)$.

Таким образом, получаем

$$\sigma_i \geq \mu \xi \cdot b_i, \quad i \in \mathbb{Z}_+, \quad (27)$$

где $\mu\xi > 0$. Соотношения (27) означают, что система (25) является мажорантой для системы

$$\tilde{\rho}_i = \mu\xi \cdot b_i + \lambda_i \cdot \sum_{j=0}^{\infty} a_{i-j} \tilde{\rho}_j, \quad i \in \mathbb{Z}_+.$$

Согласно вышеизложенным результатам и теореме 1 работы [2] последняя система обладает ограниченным решением $\tilde{\rho} = (\tilde{\rho}_0, \tilde{\rho}_1, \tilde{\rho}_2, \dots)$. Следовательно, система (2) также обладает ограниченным решением вида

$$\varphi = \frac{1}{\mu\xi} \cdot \tilde{\rho}, \quad \text{т.е.} \quad \varphi_i = \frac{1}{\mu\xi} \cdot \tilde{\rho}_i, \quad i \in \mathbb{Z}_+.$$

Итак, справедлива

ТЕОРЕМА 2. При выполнении условий (α1)–(α5), (β1), (γ1), (γ2) система (2) обладает неотрицательным ограниченным решением $\varphi = (\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots) \in m$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Следует отметить, что при условиях (α1)–(α5), (β1) и (γ1), (γ2) одновременно и однородная, и неоднородная системы вида (2) обладают ограниченными решениями.

В заключение автор выражает благодарность проф. Енгибаряну Н. Б. за обсуждение результатов работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Б. З. Вулих, *Введение в функциональный анализ*, ГИФМЛ, М., 1958.
- [2] Л. В. Канторович, В. И. Крылов, *Приближенные методы высшего анализа*, ГИФМЛ, М., 1962.
- [3] Л. Г. Арабаджян, “О дискретных уравнениях Винера–Хопфа”, *Матем. анализ и его прил.*, 1980, 43–48.
- [4] Л. Г. Арабаджян, Н. Б. Енгибарян, “Уравнения в свертках и нелинейные функциональные уравнения”, *Итоги науки и техн. Сер. Мат. анализ*, **22**, ВИНТИ, М., 1984, 175–244.
- [5] N. B. Yengibarian, “Factorization of Markov chains”, *J. Theoret. Probab.*, **17**:2 (2004), 459–481.
- [6] L. G. Arabajian, M. T. Hakopian, “On one infinite algebraic system with a Toeplitz matrix”, *J. Integral Equations Math. Phys.*, **1**:1 (1992), 32–43.
- [7] Н. Б. Енгибарян, М. А. Мнацаканян, “Линейные алгебраические системы с теплицевыми матрицами”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **17**:5 (1977), 1102–1116.
- [8] Л. Г. Арабаджян, “Об одном интегральном уравнении теории переноса в неоднородной среде”, *Дифференц. уравнения*, **23**:9 (1987), 1618–1622.

Л. Г. Арабаджян

Институт математики НАН Республики Армении,
Армянский государственный педагогический университет
им. Х. Абовяна
E-mail: arabajyan@mail.ru

Поступило

12.11.2008