Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Фишкин, О числе нулей аналитического возмущения тождественно нулевой функции на компакте, *Матем. заметки*, 2009, том 85, выпуск 1, 110–118

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm6582>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 11:29:02

О числе нулей аналитического возмущения тождественно нулевой функции на компакте

А. Ю. Фишкин

Получена верхняя оценка на число изолированных нулей аналитического возмущения $f(z, t)$ функции $f(z, 0) \equiv 0$ на компакте $\{z \in K \subseteq \mathbb{C}\}$ при малых значениях параметра $t \in \mathbb{C}^n$. Оценка использует информацию об идеале Баутина для ряда Тейлора функции f по z в одной точке компакта K (например, в точке 0), а также оценку максимума модуля функции f в окрестности компакта K .

Библиография: 8 названий.

1. Теоремы об оценке числа нулей голоморфных функций. Прежде, чем сформулировать основной результат настоящей работы, дадим несколько определений. Через $\Delta_\rho(\xi) \subset \mathbb{C}^n$ мы будем обозначать полидиск с центром в точке $\xi \in \mathbb{C}^n$ и полирадиусом $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_n)$. Для полирадиусов мы будем писать $\rho < R$, если $\rho_i < R_i$ при всех i . Далее размерность полидисков не будет явно указываться, когда она известна из контекста. Через $\bar{U}$ обозначим замыкание множества U , через $O(U)$ и $O(\bar{U})$ – классы функций, голоморфных в U и в окрестности $\bar{U}$ соответственно. Пусть $O^n(\xi)$ – кольцо ростков аналитических функций от n переменных в точке ξ . Через $I_\rho(\xi)$ мы будем обозначать идеалы в кольце $O(\Delta_\rho(\xi))$, через $I(\xi)$ – идеалы в кольце $O^n(\xi)$. Для функции f , голоморфной в окрестности точки ξ , мы будем писать $f \in I(\xi)$, если ее росток в точке ξ принадлежит $I(\xi)$. Идеал, порожденный функциями $\{f_0, \dots, f_d\} \subset O(\Delta_\rho(\xi))$ (либо их ростками в точке ξ) будем обозначать через $(f_0, \dots, f_d)_\rho(\xi)$ (соответственно $(f_0, \dots, f_d)(\xi)$). Если $f \in O(\Delta_\rho(\xi))$, то положим

$$\|f\|_{\rho, \xi} = \max_{t \in \Delta_\rho(\xi)} |f(t)|.$$

В дальнейшем мы часто будем считать $\xi = 0$ и в этом случае будем писать Δ_ρ , O^n , I_ρ , I , $(f_0, \dots, f_d)_\rho$, $(f_0, \dots, f_d)$ и $\|f\|_\rho$, опуская зависимость от точки ξ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 (Идеал Баутина). Рассмотрим голоморфную в окрестности начала координат функцию $f(z, t)$ от нескольких комплексных переменных, первая из которых $z \in \mathbb{C}$ называется основной, а остальные n являются параметрами: $t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{C}^n$. Пусть

$$f(z, t) = \sum_{k \geq 0} f_k(t) z^k \quad (1)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 07-01-00017-а) и ИЦНИЛ_а (грант № 05-01-02801).

есть разложение ростка $f(z, t)$ в ряд Тейлора по z в начале координат. Тогда идеал $I = I(0) = (f_0(t), \dots, f_k(t), \dots)(0)$, порожденный всеми коэффициентами f_k , называется *идеалом Баутина* ростка f в начале координат.

Поскольку кольцо O^n нетерово (см. [1; с. 29, 44]), всякая строго возрастающая последовательность идеалов в нем конечна. Это мотивирует следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. В условиях определения 1 индексом Баутина ряда (1) называется минимальное d , для которого $I = (f_0, \dots, f_d)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть $\{f_0, \dots, f_n\} \subset O(\overline{\Delta_\rho(\xi)})$, и $I_\rho(\xi) = (f_0, \dots, f_n)_\rho(\xi)$. Скажем, что $C > 0$ является *константой роста* в разложении элементов идеала $I_\rho(\xi)$ по образующим $f_0, \dots, f_n$, если для любой функции $f \in I_\rho(\xi)$ существует разложение

$$f = \sum_{i=0}^n a_i f_i \quad (2)$$

с коэффициентами $a_i \in O(\overline{\Delta_\rho(\xi)})$ такое, что для любого i справедливо неравенство

$$\|a_i\|_{\rho, \xi} \leq C \|f\|_{\rho, \xi}. \quad (3)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. *Внутренним диаметром* линейно связного компактного множества называется максимум из кратчайших длин кривых, соединяющих внутри этого множества всевозможные пары его точек. Через $\text{dist}(V, W)$ мы обозначаем расстояние между двумя множествами $V, W \subset \mathbb{C}$ в смысле следующего определения:

$$\text{dist}(V, W) = \inf_{\substack{v \in V \\ w \in W}} |v - w|.$$

Сформулируем основной результат этой работы.

ТЕОРЕМА 1. Пусть K – линейно связный компакт в $\mathbb{C}$, содержащий диск $\overline{\Delta_r(0)}$ радиуса $r \leq 1$. Пусть U – односвязная окрестность компакта K с кусочно-гладкой границей. Предположим, что функция $f(z, t)$ голоморфна в $\overline{U} \times \overline{\Delta_R(0)}$ и по абсолютной величине не превосходит там M . Пусть ряд Тейлора по z для $f(z, t)$ в нуле имеет вид (1), I – соответствующий идеал Баутина, d – его индекс. Тогда существуют полирадиус ρ , $0 < \rho = \rho(f_0, \dots, f_d) < R$, такой, что для любого $t \in \overline{\Delta_\rho}$ число $N(t)$ изолированных нулей функции $f(\cdot, t)$ на компакте K оценивается сверху константой, зависящей только от первых тейлоровских коэффициентов $f_0, \dots, f_d$ ряда (1), от величины M и от геометрии множеств K и U . Более точно, пусть D – внутренний диаметр компакта K , $\varepsilon = \text{dist}(K, \partial U)$ и C – константа роста из определения 3 для идеала $(f_0, \dots, f_d)_\rho$. Тогда

$$N(t) \leq e^{2D/\varepsilon} \log \left(\frac{(d+1)CM}{r^d} \right). \quad (4)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. При заданном t голоморфная функция $f(z, t)$ одного комплексного переменного z либо имеет только изолированные нули, либо равна нулю тождественно. В последнем случае изолированных нулей нет, и оценка (4) выполняется тривиально.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Отметим, что на практике часто требуется оценить число нулей функции $f(z, t)$ на отрезке. В этом случае, чтобы воспользоваться теоремой 1, в качестве K берется объединение отрезка и малого круга $\Delta_r(0)$. В аналогичной ситуации, когда вместо семейства $f(z, t)$ рассматривается одна функция $f(z)$, подобный прием был применен ранее Ильяшенко и Пановым в [2].

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Существование полирадиуса ρ и константы роста для идеала $(f_0, \dots, f_d)_\rho$ утверждается теоремой Эрве и следствием из нее, сформулированными в п. 2. Известные нам утверждения не дают эффективного алгоритма для нахождения этих величин в общем случае, однако их можно найти при заданных образующих $f_0, \dots, f_d$. В п. 4 мы вычислим константу роста для так называемого идеала Дюлака, возникающего в теории дифференциальных уравнений (см. [3]) и обсудим, как теорема 1 может быть использована для оценки числа предельных циклов квадратичных векторных полей, близких к центрам.

Теорема 1 обобщает два известных результата об оценке числа нулей аналитической функции: теорему Баутина и теорему Ильяшенко и Яковенко о нулях и росте. Приведем их формулировки.

ТЕОРЕМА 2 (теорема Баутина [3; с. 211, теорема 12.25]). Пусть f – аналитическая функция, представленная рядом Тейлора (1). Тогда существуют такие вещественное число $\varepsilon > 0$ и полирадиус $\rho > 0$, что число изолированных нулей функции $f(\cdot, t)$ в $\Delta_\varepsilon(0)$ при $t \in \Delta_\rho(0)$ не превосходит d , где d – индекс соответствующего идеала Баутина.

ТЕОРЕМА 3 (теорема о нулях и росте [4; с. 94]). Пусть $K \Subset \mathbb{C}$ – линейно связный компакт, U – односвязная окрестность компакта K с кусочно-гладкой границей, D – внутренний диаметр компакта K , $\varepsilon = \text{dist}(K, \partial U)$. Пусть функция f голоморфна в $\bar{U}$ и $0 < m \leq \max_K |f|$, $M \geq \max_{\bar{U}} |f|$. Обозначим через N число нулей функции $f(z)$ в K . Тогда

$$N \leq e^{2D/\varepsilon} \log \frac{M}{m}. \quad (5)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Отметим, что теорема 1 применима, когда теоремы 2 и 3 применить не удастся. В теореме 1, как и в теореме Баутина, дается равномерная по параметру $t \in \Delta_\rho(0)$ оценка на число нулей функции $f(z, t)$. Однако в отличие от теоремы Баутина, оценка из теоремы 1 выполняется на заданном компакте K , а не только в некоторой окрестности нуля. Прямое применение теоремы 3 о нулях и росте связано с нахождением оценок на m и M . В условиях теоремы 1 обе эти величины могут быть сколь угодно малы, и равномерная по параметру оценка их отношения становится основным препятствием в применении теоремы 3, которое преодолевает теорема 1.

2. Теорема Эрве и ее следствия. В этом пункте сформулирована теорема Эрве и доказаны ее следствия – существование константы роста для любого идеала в O^n в разложении по произвольным образующим и инвариантность идеала Баутина относительно сдвигов по z .

ТЕОРЕМА 4 (теорема Эрве [1; с. 44, теорема 7]). Для любого идеала I кольца O^n можно выбрать конечный набор голоморфных в окрестности начала координат функций $(f_0, \dots, f_n)$ с ростками, принадлежащими I , для которого найдется сколь угодно малый полирадиус $\rho > 0$ такой, что

- 1) $f_i \in O(\overline{\Delta_\rho})$ для всех i ;
- 2) любая функция $f \in I$, голоморфная в $\overline{\Delta_\rho}$, принадлежит идеалу $I_\rho = (f_0, \dots, f_n)_\rho$;
- 3) существует константа роста $C = C(\rho, f_0, \dots, f_n)$ для разложения элементов идеала I_ρ по образующим $f_0, \dots, f_n$.

Приведем несколько важных следствий этой теоремы.

СЛЕДСТВИЕ 1. В теореме Эрве вместо специального набора образующих можно взять любой набор образующих идеала I .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 4 следует, что любая функция $f \in I$ в достаточно маленьком полидиске представляется в виде линейной комбинации некоторых образующих идеала I с голоморфными коэффициентами, для которых выполнены неравенства (3). Выразим эти образующие через любые другие в малой окрестности начала координат. Перегруппировав слагаемые, мы найдем другую константу C , с которой неравенство (3) будет справедливо для коэффициентов при новых образующих.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если последовательность функций $f_n \in I$ равномерно сходится на компактах в окрестности начала координат к f , то $f \in I$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [1; с. 48, следствие 1].

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть U – область в $\mathbb{C}$, содержащая точку 0, функция $f(z, t)$ голоморфна в $\overline{U} \times \overline{\Delta_\rho(0)}$, I – идеал Баутина для ряда Тейлора функции $f(z, t)$ в точке $z = 0$. Тогда для произвольного $z_0 \in \overline{U}$ функция $f(z_0, t)$ принадлежит I .

Этот результат, как нам известно, впервые доказан в работе [5]. Для полноты изложения приведем его доказательство здесь.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Переходя, если нужно, от области U к малой окрестности ее замыкания, можно считать, что $z_0 \in U$. Рассмотрим последовательность дисков $\Delta(z_1), \dots, \Delta(z_N)$ такую, что $z_N = 0$ и $z_i \in \Delta(z_{i+1}) \subset U$ для каждого i от 0 до $N - 1$. Поскольку все коэффициенты ряда Тейлора функции $f(z, t)$ в точке z_N принадлежат I , и ряд сходится равномерно на компактах внутри $\Delta(z_N)$, по следствию 2 сумма ряда в $\Delta(z_N)$ принадлежит I . То же самое верно и для всех производных функции f по переменной z . Поэтому коэффициенты ряда Тейлора функции $f(z, t)$ в точке z_{N-1} принадлежат I , т.е. идеал Баутина функции f в точке z_{N-1} содержится в I . Повторяя это рассуждение N раз, мы получим, что идеал Баутина в точке z_0 содержится в I . Обратное утверждение следует, если поменять точки z_0 и z_N ролями.

3. Оценка числа нулей. В этом пункте мы докажем теорему 1. При доказательстве будет использована теорема 3 о нулях и росте.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть $f(z, t)$ – рассматриваемая функция, а C и ρ задаются следствием 1 для идеала Баутина функции $f(z, t)$ в начале координат с образующими $f_0(t), \dots, f_d(t)$. Представим полидиск $\overline{\Delta_\rho(0)}$ в виде объединения, быть может, пересекающихся множеств:

$$\overline{\Delta_\rho(0)} = \bigcup_{0 \leq i \leq d} V^i \cup \Sigma.$$

Здесь Σ – локус идеала Баутина для f :

$$\Sigma = \{t \in \overline{\Delta_\rho(0)} \mid f_k(t) = 0, 0 \leq k \leq d\},$$

V^i – область, где функция f_i мажорирует остальные образующие идеала Баутина:

$$V^i = \{t \in \overline{\Delta_\rho(0)} \mid 0 \neq |f_i(t)| \geq |f_k(t)|, 0 \leq k \leq d\}.$$

Отметим, что нули функции $f(\cdot, t)$ при фиксированном $t \in \Delta_\rho(0)$ изолированы в U , если и только если $t \notin \Sigma$.

Пусть $t \in V^i$. Положим $g(z, t) = f(z, t)/f_i(t)$. Воспользуемся теоремой 3 для компакта K , его окрестности U и функции $g(z, t)$. Параметры D и ε нам уже заданы, осталось получить оценку снизу на $\max_K |g(\cdot, t)|$ и оценку сверху на $\max_{\overline{U}} |g(\cdot, t)|$.

Первую из этих величин мы оценим снизу через $\max_{z \in \overline{\Delta_r(0)}} |g(z, t)|$. Поскольку i -й коэффициент ряда Тейлора функции $g(z, t)$ по z в нуле равен 1, из неравенств Коши имеем

$$\max_{z \in \overline{\Delta_r(0)}} |g(z, t)| \geq r^i \geq r^d,$$

где последнее неравенство выполнено потому, что $r \leq 1$. Оценим сверху максимум $|g(z, t)|$ в $\overline{U}$. По следствию 3 функция $f(z, t)$, как функция от t при фиксированном $z \in \overline{U}$, принадлежит идеалу Баутина I . По следствию 1 найдется полидиск $\overline{\Delta_\rho}$, в котором для некоторых $a_k(z, t)$ будет выполнено

$$f(z, t) = \sum_{0 \leq k \leq d} a_k(z, t) f_k(t),$$

$$\|a_k(z, t)\|_\rho \leq C \cdot \|f(z, t)\|_\rho \leq CM.$$

Теперь вспоминая, что при $t \in V^i$ имеет место неравенство $|f_k(t)/f_i(t)| \leq 1$, получим для $z \in \overline{U}$

$$|g(z, t)| \leq \sum_{0 \leq k \leq d} |a_k(z, t)| \cdot \left| \frac{f_k(t)}{f_i(t)} \right| \leq (d+1)CM.$$

Подставляя полученные оценки в (5) и учитывая, что для $t \in V^i$ число $N(t)$ совпадает с числом изолированных нулей функции $g(z, t)$ в K , получим (4). Так как i было произвольным, теорема доказана.

4. Константа роста для идеала Дюлака. В этом пункте мы найдем константу роста для идеала Дюлака, возникающего в теории центров квадратичных векторных полей на плоскости. Рассмотрим многочлены от $t = (t_1, \dots, t_6) \in \mathbb{C}^6$, заданные формулами

$$f_1 = t_1, \quad f_2 = t_5 p_3, \quad f_3 = t_2 t_4 p_3 p_4, \quad f_4 = t_2 t_4 p_3^2 p_2, \quad (6)$$

где

$$p_3 = t_3 - t_6, \quad p_4 = t_4 + 5(t_3 - t_6), \quad p_2 = t_6(t_3 - 2t_6) - t_2^2. \quad (7)$$

Пусть

$$\Sigma = \{t \in \mathbb{C}^6 \mid f_i(t) = 0 \text{ для } i = 1, \dots, 4\}.$$

Идеал Дюлака – это идеал $I(\Sigma) = (f_1, \dots, f_4)(\Sigma)$ ростков голоморфных функций на Σ , порожденный образующими $f_1, \dots, f_4$. Ниже мы будем рассматривать также идеалы $I(\xi) = (f_1, \dots, f_4)(\xi)$ при $\xi \in \Sigma$. Назовем $I(\xi)$ идеалом Дюлака в точке ξ .

Квадратичные векторные поля в $\mathbb{R}^2$, коэффициенты которых после определенной перенормировки попадают в локус Σ идеала Дюлака, имеют особую точку типа центр (см. [3], [6]). В работах [7] и [8] Баутиным была доказана теорема о том, что при возмущении квадратичного векторного поля в $\mathbb{R}^2$ в малой окрестности положения равновесия типа центр рождается не более трех предельных циклов (см. также [3; с. 233, теорема 13.1]). В доказательстве этого результата идеал $I(\Sigma)$ возникает как идеал Баутина для функции, нули которой соответствуют предельным циклам векторного поля. При этом образующие идеала Баутина задаются существенно более сложными формулами по сравнению с многочленами $f_1, \dots, f_4$. Ниже мы укажем полирадиус $\rho < (1, \dots, 1)$ и константу роста идеала $I = I(0)$ в полидиске радиуса $R \cdot \rho$ для любого $R \in (0, 1]$ (теорема 5). Доказательство теоремы 5 иллюстрирует подход, благодаря которому удается найти константу роста в малом полидиске для идеала $I(\xi)$ при произвольном $\xi \in \Sigma$. Как следствие, с помощью замены образующих можно найти константу роста в разложении функций из $I(\xi)$ по образующим идеала Баутина, возникающего в задаче об оценке числа предельных циклов квадратичных векторных полей. Это позволяет применить теорему 1 к квадратичным векторным полям и получить оценку сверху на число предельных циклов, пересекающих большую окрестность возмущенного центра. Соответствующие результаты будут опубликованы в другой статье.

Имеет место следующая

ТЕОРЕМА 5. Пусть $I = I(0)$ – идеал Дюлака в начале координат, $R \in \mathbb{R}$, $0 < R \leq 1$,

$$\rho(R) = R \cdot \left(1, 1, \frac{1}{10}, 1, 1, \frac{1}{20}\right). \quad (8)$$

Пусть $D_R = \Delta_{\rho(R)}(0)$ – полидиск в $\mathbb{C}^6$. Тогда если $f \in O(\overline{D_R})$ и росток функции f принадлежит I , то $f \in I_{\rho(R)} = (f_1, \dots, f_4)_{\rho(R)}$. При этом константа роста в разложении функций из идеала $I_{\rho(R)}$ по образующим (6) не превосходит

$$C = \frac{405}{R^6}. \quad (9)$$

Заметим, что по условию теоремы $f \in I$, поэтому разложение функции f по образующим $f_1, \dots, f_4$ имеет место в некоторой окрестности начала координат:

$$f = a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3 f_3 + a_4 f_4. \quad (10)$$

Основную часть доказательства теоремы составляет эффективная проверка того, что любая функция f с ростком из I , голоморфная в $\overline{D_R}$, удовлетворяет разложению (10) с голоморфными коэффициентами в $\overline{D_R}$. Мы выпишем явные формулы для коэффициентов a_i этого разложения и проверим выполнение оценок

$$\|a_i\|_{\rho(R)} \leq C \|f\|_{\rho(R)}$$

с константой роста C , заданной формулой (9).

Приведем несколько вспомогательных утверждений из теории функций многих комплексных переменных.

ЛЕММА 1. Пусть U – область в $\mathbb{C}^n$, функции f и g голоморфны в U , $\Gamma = \{t \in U \mid g(t) = 0\}$ – множество нулей функции g в U , а $\Gamma' = \{t \in \Gamma \mid \text{grad } g = 0\}$ – подмножество Γ , где все частные производные g обращаются в нуль. Положим $S =$

$\Gamma - \Gamma' \subset U$. Допустим, что S связно и $\bar{S} \supset \Gamma$. Тогда, если в некоторой подобласти $V \subset U$ такой, что $V \cap \Gamma \neq \emptyset$, выполнено $f|_{\Gamma \cap V} = 0$, то $f|_{\Gamma} = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме о неявной функции S является аналитическим многообразием. На этом многообразии голоморфная функция f тождественно обращается в нуль на открытом множестве $S \cap V$. Так как S связно, по теореме единственности имеем $f|_S = 0$. Поскольку $\bar{S} \supset \Gamma$, то $f|_{\Gamma} = 0$ по непрерывности.

ЛЕММА 2. Пусть U – область в $\mathbb{C}^n$, функции $g, f \in O(U)$, $\Gamma = \{t \in U \mid g(t) = 0\}$ и росток функции g неприводим ни в какой точке множества U . Тогда если $f|_{\Gamma} = 0$, то f делится на g в U , т.е. существует такая функция $h \in O(U)$, что $f = gh$.

Доказательство см. в [1; с. 41, теорема 6].

Из лемм 1 и 2 легко следует

ЛЕММА 3. Пусть функции f и g удовлетворяют всем условиям леммы 1 и росток функции g неприводим ни в какой точке множества U . Тогда f делится на g в U .

Пусть $t = (t_1, \dots, t_6) \in \mathbb{C}^6$ и $p_4 = t_4 + 5(t_3 - t_6)$. Положим

$$\Gamma_1 = \{t \in \mathbb{C}^6 \mid t_1 = 0\}, \quad \Gamma_4 = \{t \in \mathbb{C}^6 \mid p_4 = 0\}, \quad \Gamma_5 = \{t \in \mathbb{C}^6 \mid t_5 = 0\}$$

и обозначим через $\pi_i: \mathbb{C}^6 \rightarrow \Gamma_i$ проекцию на Γ_i вдоль координатной оси t_i . Напомним, что для произвольного $R > 0$ мы полагаем $D_R = \Delta_{\rho(R)}(0)$, где $\rho(R)$ определяется формулой (8).

ЛЕММА 4. Для произвольного $R > 0$, $f \in O(D_R)$ и $i \in \{1, 4, 5\}$ справедливы следующие утверждения:

- $\pi_i(D_R) \subset D_R$;
- функция $f \circ \pi_i$ голоморфна в D_R и не зависит от t_i ;
- $f - f \circ \pi_i = 0$ на $\Gamma_i \cap D_R$;
- функции $(f - f \circ \pi_1)/t_1$, $(f - f \circ \pi_5)/t_5$ и $(f - f \circ \pi_4)/p_4$ голоморфны в D_R .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для π_1 и π_5 утверждение а) очевидно. Докажем его для π_4 . По определению

$$\pi_4(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6) = (t_1, t_2, t_3, -5(t_3 - t_6), t_5, t_6).$$

Пусть $t \in D_R$. Тогда $|t_3| \leq R/10$, $|t_6| \leq R/20$ и поэтому

$$|5(t_3 - t_6)| \leq \frac{15R}{20} \leq R,$$

откуда следует, что $\pi_4(t) \in D_R$. Утверждения б) и с) сразу следуют из а) и определений π_i и Γ_i . Утверждение д) следует из с) по лемме 2.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Лемма 4 мотивирует выбор $\rho(R)$.

В следующей лемме мы найдем коэффициенты $a_i \in O^6$ в разложении (10).

ЛЕММА 5. Пусть I – идеал, порожденный ростками $f_1, \dots, f_4$ в начале координат, и функция $f \in I$ голоморфна в окрестности начала координат. Пусть $R < 1$ настолько мало, что в полидиске D_R справедливо представление

$$f = b_1 f_1 + b_2 f_2 + b_3 f_3 + b_4 f_4 \quad (11)$$

с голоморфными коэффициентами $b_i \in O(D_R)$. Тогда в D_R справедливо также представление (10) с голоморфными коэффициентами $a_1, \dots, a_4$, заданными формулами

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{f - f \circ \pi_1}{f_1}, & a_2 &= \frac{f \circ \pi_1 - f \circ \pi_1 \circ \pi_5}{f_2}, \\ a_3 &= \frac{t_4 \cdot (f \circ \pi_1 \circ \pi_5 / t_4 - (f \circ \pi_1 \circ \pi_5 / t_4) \circ \pi_4)}{f_3}, & a_4 &= \frac{t_4 \cdot (f \circ \pi_1 \circ \pi_5 / t_4) \circ \pi_4}{f_4}. \end{aligned} \quad (12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что если функции a_i , заданные формулами (12), голоморфны, то условие (10) для них выполнено автоматически. Докажем, что заданные a_i голоморфны в D_R . Заметим, что

$$\begin{aligned} f_1 \circ \pi_1 &= 0, & f_i \circ \pi_1 &= f_i, & i &= 2, 3, 4, \\ f_2 \circ \pi_5 &= 0, & f_i \circ \pi_5 &= f_i, & i &= 3, 4, \\ \left(\frac{f_3}{t_4} \right) \circ \pi_4 &= 0, & \left(\frac{f_4}{t_4} \right) \circ \pi_4 &= \frac{f_4}{t_4}. \end{aligned}$$

Отсюда в силу (11)

$$\begin{aligned} g_1 &= f \circ \pi_1 \in (f_2, f_3, f_4)_{\rho(R)}, & g_2 &= g_1 \circ \pi_5 \in (f_3, f_4)_{\rho(R)}, \\ g_3 &= \left(\frac{g_2}{t_4} \right) \circ \pi_4 \in \left(\frac{f_4}{t_4} \right)_{\rho(R)}, \end{aligned}$$

при этом g_1 и g_2 голоморфны в D_R по лемме 4, а поскольку

$$g_2 \in (f_3, f_4)_{\rho(R)} \subset (t_4)_{\rho(R)},$$

то $g_2/t_4 \in O(D_R)$. Отсюда также следует, что $g_3 \in O(D_R)$ по лемме 4.

Рассмотрим в D_R разность $f - g_1$. Она делится на f_1 по лемме 4. То есть

$$\frac{f - g_1}{f_1} \in O(D_R).$$

Рассмотрим теперь разность $g_1 - g_2 \in (f_2, f_3, f_4)_{\rho(R)}$. Она делится на t_5 по лемме 4 и на p_3 в силу (6). Следовательно, она делится на f_2 . Поэтому частное

$$\frac{g_1 - g_2}{f_2} \in O(D_R).$$

Далее, $g_2/t_4 - g_3 \in (f_3/t_4, f_4/t_4)$. Эта разность делится на p_4 по лемме 4, а на t_2 и p_3 — в силу (6). Значит, она делится на f_3/t_4 :

$$\frac{g_2 - t_4 g_3}{f_3} \in O(D_R).$$

Наконец, поскольку $g_3 \in (f_4/t_4)_{\rho(R)}$, то $t_4 g_3 / f_4 \in O(D_R)$.

Итак, мы показали, что формулы (12) задают голоморфные функции a_i в полидиске D_R . Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5. Пусть теперь задано R , $0 < R \leq 1$, для которого $f \in O(D_R)$. В лемме 5 мы нашли коэффициенты a_i , голоморфные в (быть может меньшей) окрестности начала координат и удовлетворяющие условию (10). Поскольку ростки $t_1, t_2, t_4, t_5, p_3, p_4, p_2$ неприводимы всюду в $\mathbb{C}^6$, по лемме 3, функции a_i , заданные формулами (12), голоморфны во всем $\overline{D_R}$. По теореме единственности условие (10) также выполнено в $\overline{D_R}$. Оценим $|a_i|$ в $\overline{D_R}$ по принципу максимума. В силу выбора R на остоле полидиска D_R справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned} |t_1| &= |t_2| = |t_4| = |t_5| = R, \\ |p_3| &\geq \frac{R}{20}, \quad |p_4| \geq \frac{R}{4}, \quad |p_2| \geq \frac{99R^2}{100}, \\ |f_1| &= R, \quad |f_2| \geq \frac{R^2}{20}, \quad |f_3| \geq \frac{R^4}{80}, \quad |f_4| \geq \frac{99R^6}{40\,000} \geq \frac{R^6}{405}. \end{aligned} \quad (13)$$

Положим $M = \|f\|_{\rho(R)}$. Из формул (12) и (13), применяя принцип максимума, получим

$$\|a_1\|_{\rho(R)} \leq \frac{2M}{R}, \quad \|a_2\|_{\rho(R)} \leq \frac{40M}{R^2}, \quad \|a_3\|_{\rho(R)} \leq \frac{160M}{R^4}, \quad \|a_4\|_{\rho(R)} \leq \frac{405M}{R^6}.$$

Отсюда, учитывая, что $R < 1$, получим (9). Теорема доказана.

Автор сердечно благодарит Ю. С. Ильяшенко, В. Клепцына, а также всех, кто проверял и рецензировал эту статью за плодотворные обсуждения, полезные идеи и кропотливый труд по исправлению и улучшению текста.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] М. Эрве, *Функции многих комплексных переменных: Локальная теория*, Мир, М., 1965.
- [2] Yu. Ilyashenko, A. Panov, "Some upper estimates of the number of limit cycles of planar vector fields with applications to Liénard equation", *Mosc. Math. J.*, **1**:4 (2001), 583–599.
- [3] Yu. Ilyashenko, S. Yakovenko, *Lectures on Analytic Differential Equations*, Grad. Stud. Math., **86**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008.
- [4] Yu. Ilyashenko, S. Yakovenko, "Counting real zeroes of analytic functions satisfying linear differential equations", *J. Differential Equations*, **126**:1 (1996), 87–105.
- [5] R. Roussarie, *Bifurcation of Planar Vector Fields and Hilbert's Sixteenth Problem*, Progr. Math., **164**, Birkhäuser, Basel, 1998.
- [6] H. Dulac, "Détermination et intégration d'une certaine classe d'équations différentielles ayant pour point singulier un centre", *Bull. Sci. Math.* (2), **32** (1908), 230–252.
- [7] Н. Н. Баутин, "О числе предельных циклов, рождающихся при изменении коэффициентов из состояния равновесия типа фокус или центр", *Докл. АН СССР*, **24**:7 (1939), 669–672.
- [8] Н. Н. Баутин, "О числе предельных циклов, появляющихся при изменении коэффициентов из состояния равновесия типа фокуса или центра", *Матем. сб.*, **30**:1 (1952), 181–196.

А. Ю. Фишкин

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: fishkinalexey@gmail.com

Поступило

01.06.2007

Исправленный вариант

20.05.2008