Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. В. Калужина, И. И. Марченко, О величинах отклонений целых функций бесконечного порядка от функций рациональных, *Матем. заметки*, 2009, том 85, выпуск 1, 22–35

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm6583>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 13:12:14

О величинах отклонений целых функций бесконечного порядка от функций рациональных

Л. В. Калужина, И. И. Марченко

Исследуются величины отклонений $b(a, f)$ целых функций бесконечного порядка от функций рациональных.

Библиография: 20 названий.

1. Введение. Теория распределения значений мероморфных функций была создана в 20-х годах прошлого столетия финским математиком Рольфом Неванлинной.

Основными характеристиками неванлинновской теории являются две функции – функция приближения мероморфной функции $f(z)$ к числу a на окружности $\{z : |z| = r\}$ и считающая функция a -точек:

$$m(r, a, f) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \frac{1}{|f(re^{i\varphi}) - a|} d\varphi, & a \neq \infty, \\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\varphi})| d\varphi, & a = \infty, \end{cases}$$

$$N(r, a, f) = \int_0^r \frac{n(t, a, f) - n(0, a, f)}{t} dt + n(0, a, f) \log r,$$

где $\log^+ x = \max(\log x, 0)$, $n(r, a, f)$ – число a -точек мероморфной функции $f(z)$ в круге $\{z : |z| \leq r\}$ с учетом кратностей. Функция

$$T(r, f) := m(r, \infty, f) + N(r, \infty, f)$$

называется *неванлинновской характеристикой* мероморфной функции.

ТЕОРЕМА А [1]. Для мероморфной функции $f(z)$ и любого значения $a \in \overline{\mathbb{C}}$ справедливо следующее асимптотическое равенство:

$$m(r, a, f) + N(r, a, f) = T(r, f) + O(1), \quad r \rightarrow \infty. \quad (1.1)$$

Вторая основная теорема Неванлинны показывает, что для большинства значений $a \in \overline{\mathbb{C}}$ основную роль в сумме (1.1) играет считающая функция $N(r, a, f)$.

ТЕОРЕМА В [1]. Пусть $\{a_k\}_{k=1}^q \in \overline{\mathbb{C}}$ – конечный набор различных комплексных чисел. Тогда неравенство

$$\sum_{k=1}^q m(r, a_k, f) \leq 2T(r, f) + O(\ln(rT(r, f)))$$

выполняется для всех $r \rightarrow \infty$, исключая, быть может, множество конечной меры.

Дефектом функции $f(z)$ в точке a называется величина

$$\delta(a, f) = \liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{m(r, a, f)}{T(r, f)}.$$

Множество $D(f) = \{a \in \overline{\mathbb{C}} : \delta(a, f) > 0\}$ называется множеством дефектных значений.

Из теорем А, В следует

ТЕОРЕМА С [1]. Пусть $f(z)$ – мероморфная функция в плоскости $\mathbb{C}$. Тогда

- а) для каждого $a \in \overline{\mathbb{C}}$ $0 \leq \delta(a, f) \leq 1$;
- б) множество дефектных значений не более чем счетно и $\sum_{a \in \overline{\mathbb{C}}} \delta(a, f) \leq 2$.

В 1986 г. Франк и Вайсэборн получили обобщение теоремы В на случай функций рациональных.

ТЕОРЕМА D [2]. Для трансцендентной мероморфной функции $f(z)$ и различных рациональных функций $q_1(z), \dots, q_m(z)$ неравенство

$$m(r, f) + \sum_{k=1}^m m\left(r, \frac{1}{f - q_k}\right) \leq (2 + \varepsilon)T(r, f)$$

справедливо для всех $r \rightarrow \infty$, кроме, быть может, множества конечной меры.

В 1986 г. Штайнмец обобщил этот результат на случай малых функций.

ТЕОРЕМА Е [3]. Пусть $\{a_k\}_{k=1}^m$ – множество различных мероморфных функций таких, что

$$T(r, a_k) = o(T(r, f)), \quad r \rightarrow \infty.$$

Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ и для всех $r \rightarrow \infty$, кроме, быть может, множества конечной меры, выполняется неравенство

$$m(r, f) + \sum_{k=1}^m m\left(r, \frac{1}{f - a_k}\right) \leq (2 + \varepsilon)T(r, f).$$

В 1969 г. Петренко [4] поставил вопрос: как изменится неванлинновская теория, если изменить метрику приближения мероморфной функции к значению $a \in \overline{\mathbb{C}}$. С этой целью он рассмотрел функцию отклонения

$$\mathcal{L}(r, a, f) = \begin{cases} \max_{|z|=r} \log^+ \frac{1}{|f(z) - a|}, & a \neq \infty, \\ \max_{|z|=r} \log^+ |f(z)|, & a = \infty. \end{cases}$$

Величина

$$\beta(a, f) = \liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{L}(r, a, f)}{T(r, f)}$$

называется величиной отклонения мероморфной функции $f(z)$ в точке a . Ясно, что для каждого $a \in \overline{\mathbb{C}}$ $\delta(a, f) \leq \beta(a, f)$. Петренко получил точную оценку для величины отклонения мероморфных функций конечного нижнего порядка, т.е. в случае

$$\lambda = \liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{\log T(r, f)}{\log r} < \infty,$$

а также некоторую оценку для суммы ряда $\sum_{a \in \overline{\mathbb{C}}} \beta(a, f)$.

ТЕОРЕМА F [4]. Для мероморфной функции $f(z)$ конечного нижнего порядка λ справедливы неравенства

$$\beta(a, f) \leq B(\lambda) := \begin{cases} \frac{\pi\lambda}{\sin \pi\lambda}, & \text{если } \lambda \leq 0.5, \\ \pi\lambda, & \text{если } \lambda > 0.5, \end{cases} \quad (1.2)$$

$$(1.3)$$

$$\sum_{a \in \overline{\mathbb{C}}} \beta(a, f) \leq 816\pi(\lambda + 1)^2.$$

Величина $B(\lambda)$ называется константой Пэ́йли. В 1932 г. Пэ́йли высказал гипотезу [5]: если $f(z)$ – целая функция конечного порядка $\rho \geq 1/2$, то

$$\beta(\infty, f) = \liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{\log M(r, f)}{T(r, f)} \leq \pi\rho,$$

где $M(r, f) = \max_{|z|=r} |f(z)|$.

В 1969 г. Говоров подтвердил эту гипотезу [6]. В том же году Петренко получил оценку (1.3) в общем случае для мероморфных функций конечного нижнего порядка, применив при этом свой метод, основанный на найденном им новом представлении мероморфной функции в секторе [7]. Следует отметить, что оценка (1.2) была получена ранее Гольдбергом и Островским [8].

В 1990 году Марченко и Щерба получили точный аналог соотношения дефектов для величин $\beta(a, f)$.

ТЕОРЕМА G [9]. Если $f(z)$ – мероморфная функция конечного нижнего порядка λ , то

$$\sum_{a \in \overline{\mathbb{C}}} \beta(a, f) \leq 2B(\lambda).$$

В 2007 г. Чеханович и Марченко исследовали величины отклонений целых функций конечного нижнего порядка от функций рациональных. Из этих результатов следует

ТЕОРЕМА H [10]. Пусть $f(z)$ – трансцендентная целая функция конечного нижнего порядка λ , $\mathfrak{M}$ – множество рациональных функций. Тогда множество $\{q \in \mathfrak{M} : \beta(q, f) > 0\}$ является не более чем счетным и

$$\sum_{\nu} \beta(q_{\nu}, f) \leq B(\lambda).$$

Для мероморфных функций бесконечного нижнего порядка величина $\beta(a, f)$ может быть равна ∞ , поэтому в этом случае интересен следующий результат Бергвайлера и Бока.

ТЕОРЕМА I [11]. Для мероморфных функций бесконечного нижнего порядка

$$\liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{L}(r, \infty, f)}{rT'_-(r, f)} \leq \pi. \quad (1.4)$$

Заметим, что $rT'_-(r, f) = A(r, f) + O(1)$, $r \rightarrow \infty$, где $A(r, f)$ – сферическая площадь круга $\{z : |z| \leq r\}$ при отображении $\omega = f(z)$ с учетом кратности покрытия, деленная на площадь сферы Римана.

В связи с оценкой (1.4) Еременко ввел величину

$$b(a, f) = \liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{L}(r, a, f)}{A(r, f)}$$

и доказал аналог соотношения дефектов для этих величин.

Из оценки (1.4) следует, что для каждой мероморфной функции бесконечного нижнего порядка и для каждого $a \in \overline{\mathbb{C}}$ справедлива оценка

$$b(a, f) \leq \pi.$$

Следует отметить, что для целой функции $E_0(z)$ из работы [12; с. 125] величина $b(\infty, E_0) = \pi$.

ТЕОРЕМА J [13]. Пусть $f(z)$ – мероморфная функция бесконечного нижнего порядка. Тогда

$$\sum_{a \in \overline{\mathbb{C}}} b(a, f) \leq 2\pi.$$

Основным результатом работы является следующая

ТЕОРЕМА 1. Для целых функций бесконечного нижнего порядка множество

$$\Omega = \{q \in \mathfrak{M} : b(q, f) > 0\}$$

является не более чем счетным и

$$\sum_{q \in \mathfrak{M}} b(q, f) \leq \pi.$$

Отметим, что в случае функций постоянных ($q(z) \equiv \text{const}$) теорема 1 следует из результатов работы [14].

2. Вспомогательные результаты. В работе [11] были введены последовательности, которые являются обобщениями пиков Поляна для функций бесконечного нижнего порядка. Напомним их определение.

Для любых последовательностей $M_j \rightarrow \infty$, $\varepsilon_j \rightarrow 0$ существуют последовательности $\rho_j \rightarrow \infty$ и $\mu_j \rightarrow \infty$ такие, что для всех r , удовлетворяющих неравенству $|\log(r/\rho_j)| \leq M_j/\mu_j$, выполняется следующее неравенство:

$$T(r, f) \leq (1 + \varepsilon_j) \left(\frac{r}{\rho_j} \right)^{\mu_j} T(\rho_j, f), \quad j \rightarrow \infty. \quad (2.1)$$

Последовательности μ_j и M_j можно выбрать так, чтобы

$$\mu_j = o(\log^{3/2} T(\rho_j, f)), \quad M_j = o(\log T(\rho_j, f)), \quad j \rightarrow \infty. \quad (2.2)$$

Положим

$$P_j = \rho_j e^{-M_j/\mu_j}, \quad Q_j = \rho_j e^{M_j/\mu_j}.$$

Тогда неравенство (2.1) выполняется для всех $r \in [P_j, Q_j]$. Будем считать, что $M_j > 1$. Рассмотрим множества

$$A_j = \left\{ r \in [\rho_j, Q_j] : T(r, f) \leq \frac{1}{\sqrt{\mu_j}} \left(\frac{r}{\rho_j} \right)^{\mu_j} T(\rho_j, f) \right\},$$

$$B_j = \left\{ r \in [P_j, \rho_j] : T(r, f) \leq \frac{1}{\sqrt{\mu_j}} \left(\frac{r}{\rho_j} \right)^{\mu_j} T(\rho_j, f) \right\}.$$

Положим

$$\begin{aligned} R_j &= \begin{cases} \min A_j, & \text{если } A_j \neq \emptyset, \\ Q_j, & \text{если } A_j = \emptyset, \end{cases} \\ t_j &= \begin{cases} \max B_j, & \text{если } B_j \neq \emptyset, \\ P_j, & \text{если } B_j = \emptyset, \end{cases} \\ S_j &= e^{-1/\mu_j} R_j, \quad T_j = e^{-2/\mu_j} R_j. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Тогда

$$t_j < \rho_j < T_j < S_j < R_j.$$

В работе [11] доказано, что

$$\frac{T(R_j, f)}{R_j^{\mu_j}} + \frac{T(t_j, f)}{t_j^{\mu_j}} = o\left(\mu_j \int_{t_j}^{T_j} \frac{T(r, f)}{r^{\mu_j+1}} dr\right), \quad j \rightarrow \infty. \quad (2.4)$$

Кроме этого, из неравенства (19) работы [11] следует, что

$$T(\rho_j, f) \leq T^{3/2}(t_j, f), \quad j \rightarrow \infty. \quad (2.5)$$

Следующие утверждения являются некоторыми аналогами леммы о логарифмической производной.

ЛЕММА 1. Пусть $f(z)$ – мероморфная функция бесконечного нижнего порядка. Тогда для любого натурального числа k

$$\int_{t_j}^{T_j} \frac{\mathcal{L}(r, f^{(k)}/f)}{r^{\mu_j+1}} dr = o\left(\mu_j \int_{t_j}^{T_j} \frac{T(r, f)}{r^{\mu_j+1}} dr\right), \quad j \rightarrow \infty,$$

где

$$\mathcal{L}\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) = \log^+ \max_{|z|=r} \left| \frac{f^{(k)}(z)}{f(z)} \right|.$$

ЛЕММА 2. Пусть $f(z)$ – мероморфная функция бесконечного нижнего порядка. Тогда для любого натурального числа k

$$\int_{t_j}^{T_j} \frac{m(r, f^{(k)}/f)}{r^{\mu_j+1}} dr = o\left(\int_{t_j}^{T_j} \frac{T(r, f)}{r^{\mu_j+1}} dr\right), \quad j \rightarrow \infty.$$

Для $k = 1$ леммы 1, 2 доказаны в работе [14]. В общем случае эти утверждения доказываются тем же методом без существенных изменений.

3. Доказательство теоремы 1. Вначале докажем теорему 1 в случае, когда $\{q_k\}$ – полиномы.

Рассмотрим конечный набор различных полиномов $\{p_k(z)\}_{k=1}^m$. Положим $d = \max \deg(p_k)$ и $b(p_k, f) > 0$, $k = 1, 2, \dots, m$. Выберем число t_0 так, чтобы для всех $|z| > t_0$ $p_n(z) \neq p_k(z)$, $n \neq k$. Тогда

$$c_{k,n} = \min_{|z| \geq t_0} |p_n(z) - p_k(z)| > 0, \quad c = \min_{k,n} \{c_{k,n}\} > 0.$$

Для $j \geq n_0$ положим

$$G_j = \{z : t_j < |z| < T_j, \log |f^{(d+1)}(z)| < -\sqrt{T(\rho_j, f)}\},$$

где последовательности t_j, ρ_j, T_j определены соотношениями (2.1), (2.3), а число n_0 удовлетворяет неравенству $t_{n_0} > t_0$.

Обозначим через $G_{j,k}$ множество, состоящее из тех связных компонент G_j , которые содержат точки $z_1, z_2, \dots, z_{d+1}$ такие, что

$$|f(z_1) - p_k(z_1)| < \frac{c}{4}, \quad (3.1)$$

$$|f^{(l-1)}(z_l) - p_k^{(l-1)}(z_l)| < \exp(-\sqrt{T(\rho_j, f)}), \quad l = 2, \dots, d+1. \quad (3.2)$$

Покажем, что при $j \geq j_0$ множества $G_{j,k}$, $k = 1, 2, \dots, m$, попарно не пересекаются. Для этого используем один прием Вейцмана [15].

Пусть $l(t)$ – длина линий уровня $|f^{(d+1)}(z)| = t$ в круге $|z| \leq T_j$. По принципу длины и площади [16]

$$\int_0^\infty \frac{l^2(t)}{tp(t)} dt \leq 2\pi^2 T_j^2, \quad (3.3)$$

где

$$p(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} n\left(T_j, \frac{1}{f^{(d+1)} - te^{i\varphi}}\right) d\varphi.$$

Тогда, используя соотношение $S_j = e^{1/\mu_j} T_j$ и лемму Картана [12], получим

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} n\left(T_j, \frac{1}{f^{(d+1)} - te^{i\varphi}}\right) d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} n\left(T_j, e^{i\varphi}, \frac{f^{(d+1)}}{t}\right) d\varphi \leq \mu_j \int_0^{2\pi} N\left(S_j, e^{i\varphi}, \frac{f^{(d+1)}}{t}\right) d\varphi \\ &\leq \mu_j \left(T\left(S_j, \frac{f^{(d+1)}}{t}\right) + O(1)\right) \leq \mu_j \left(T\left(S_j, f^{(d+1)}\right) + \log^+ \frac{1}{t} + O(1)\right). \end{aligned}$$

Из леммы о логарифмической производной [12] и (2.2) легко следует

$$T(S_j, f^{(d+1)}) = m(S_j, f^{(d+1)}) \leq m(S_j, f) + O(\log(T(R_j, f))) \leq 2T(R_j, f), \quad j \rightarrow \infty.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} n\left(T_j, \frac{1}{f^{(d+1)} - te^{i\varphi}}\right) d\varphi &\leq \mu_j \left(2T\left(S_j, f\right) + \log^+ \frac{1}{t}\right) \\ &\leq \log^2 T(R_j, f) \left(2T(R_j, f) + \log^+ \frac{1}{t}\right). \end{aligned}$$

Пусть $\gamma_1 = \exp(-\sqrt{T(\rho_j, f)})$, $\gamma_2 = 2\gamma_1$. Из последнего неравенства и (3.3) следует

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \frac{l^2(t)}{t} dt &\leq \pi T_j^2 \log^2 T(R_j, f) \left(2T(R_j, f) + \log^+ \frac{1}{\gamma_1}\right) \\ &\leq \pi R_j^2 \log^2 T(R_j, f) \left(2T(R_j, f) + \frac{1}{2}T(\rho_j, f)\right). \end{aligned} \quad (3.4)$$

В силу соотношений (2.1) и (2.2) имеем

$$T(R_j, f) \leq T(Q_j, f) = T(\rho_j e^{M_j/\mu_j}, f) \leq (1 + \varepsilon_j) e^{M_j} T(\rho_j, f) < T^2(\rho_j, f).$$

Поэтому из неравенства (3.4) следует, что

$$\int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \frac{l^2(t)}{t} dt \leq T^3(\rho_j, f).$$

Таким образом, существует число $\alpha_j \in [\sqrt{T(\rho_j, f)} - \log 2, \sqrt{T(\rho_j, f)}]$ такое, что

$$l(e^{-\alpha_j}) \leq T^{3/2}(\rho_j, f), \quad j \rightarrow \infty.$$

Далее положим $G'_j = \{z : t_j \leq |z| \leq T_j, \log |f^{(d+1)}(z)| \leq -\alpha_j\}$. Ясно, что $G_{j,k} \subset G_j \subset G'_j$. Пусть $z \in G_{j,k}$. Тогда существует связная компонента M множества G_j такая, что $z \in M \subset G_{j,k} \subset G_j \subset G'_j$. Точки $z_{d+1}, z \in M \subset G'_j$ соединим кривой Γ , лежащей в G'_j , длина которой не превосходит границы G'_j . Тогда

$$\begin{aligned} |f^{(d)}(z) - f^{(d)}(z_{d+1})| &= \left| \int_{\Gamma} f^{(d+1)}(z) dz \right| \\ &\leq \int_{\Gamma} |f^{(d+1)}(z)| |dz| < T^{3/2}(\rho_j, f) \exp(-\sqrt{T(\rho_j, f)}). \end{aligned}$$

Следовательно, для $z \in G_{j,k}$

$$\begin{aligned} |f^{(d)}(z) - p_k^{(d)}(z)| &\leq |f^{(d)}(z) - f^{(d)}(z_{d+1})| + |f^{(d)}(z_{d+1}) - p_k^{(d)}(z)| \\ &< (T^{3/2}(\rho_j, f) + 1) \exp(-\sqrt{T(\rho_j, f)}). \end{aligned}$$

Соединим точки $z_d, z \in M \subset G'_j$ кривой $\hat{\Gamma}$, лежащей в G'_j , длина которой не превосходит границы G'_j . Тогда

$$\begin{aligned} &|f^{(d-1)}(z) - f^{(d-1)}(z_d) - p_k^{(d-1)}(z) + p_k^{(d-1)}(z_d)| \\ &= \left| \int_{\hat{\Gamma}} (f^{(d)}(z) - p_k^{(d)}(z)) dz \right| \leq \int_{\hat{\Gamma}} |f^{(d)}(z) - p_k^{(d)}(z)| |dz| \\ &< (T^{3/2}(\rho_j, f) + 1) \exp(-\sqrt{T(\rho_j, f)}) T^{3/2}(\rho_j, f). \end{aligned}$$

Следовательно, для $z \in G_{j,k}$

$$\begin{aligned} |f^{(d-1)}(z) - p_k^{(d-1)}(z)| &\leq |f^{(d-1)}(z) - p_k^{(d-1)}(z) - f^{(d-1)}(z_d) + p_k^{(d-1)}(z_d)| \\ &\quad + |f^{(d-1)}(z_d) - p_k^{(d-1)}(z_d)| \\ &< ((T^{3/2}(\rho_j, f) + 1) T^{3/2}(\rho_j, f) + 1) \exp(-\sqrt{T(\rho_j, f)}) \\ &= (T^3(\rho_j, f) + T^{3/2}(\rho_j, f) + 1) \exp(-\sqrt{T(\rho_j, f)}). \end{aligned}$$

И так далее. Через $d - 2$ шага мы получаем, что для всех $z \in G_{j,k}$

$$\begin{aligned} |f'(z) - p'_k(z)| &\leq |f'(z) - p'_k(z) - f'(z_2) + p'_k(z_2)| + |f'(z_2) - p'_k(z_2)| \\ &< (T^{3d/2}(\rho_j, f) + T^{3(d-1)/2}(\rho_j, f) + \dots + T^{3/2}(\rho_j, f) + 1) \\ &\quad \times \exp(-\sqrt{T(\rho_j, f)}) \\ &< 2T^{3d/2}(\rho_j, f) \exp(-\sqrt{T(\rho_j, f)}). \end{aligned}$$

Соединим точки $z_1, z \in M \subset G'_j$ кривой $\tilde{\Gamma}$, лежащей в G'_j , длина которой не превосходит границы G'_j . Тогда

$$|f(z) - f(z_1) - p_k(z) + p_k(z_1)| = \left| \int_{\tilde{\Gamma}} (f'(z) - p'_k(z)) dz \right| \leq \int_{\tilde{\Gamma}} |f'(z) - p'_k(z)| |dz| < 2T^{3(d+1)/2}(\rho_j, f) \exp(-\sqrt{T(\rho_j, f)}) < \frac{c}{4}, \quad j \rightarrow \infty.$$

Таким образом, при $j \geq j_0$ для $z \in G_{j,k}$ имеем

$$|f(z) - p_k(z)| \leq |f(z) - f(z_1) - p_k(z) + p_k(z_1)| + |f(z_1) - p_k(z_1)| < \frac{c}{4} + \frac{c}{4} < \frac{c}{2}.$$

Следовательно, при $j \geq j_0$ множества $G_{j,k}$, $k = 1, 2, \dots, m$, попарно не пересекаются. Далее положим

$$u_{j,k}(z) = \begin{cases} \log \frac{1}{|f^{(d+1)}(z)|}, & \text{если } z \in G_{j,k}, \\ \sqrt{T(\rho_j, f)}, & \text{если } z \notin G_{j,k}. \end{cases}$$

Функции $u_{j,k}$ являются δ -субгармоническими функциями [9] в области $\{z : t_j < |z| < T_j\}$, т.е. могут быть представлены в виде разности двух субгармонических.

Напомним определение и основные свойства T^* -функции Бернштейна. Для $z = re^{i\theta}$, $r \in (t_j, T_j)$, $\theta \in [0, \pi]$, положим [17]

$$m^*(z, u_{j,k}) = \sup_{E=2\theta} \frac{1}{2\pi} \int_E u_{j,k}(re^{i\varphi}) d\varphi, \quad T^*(z, u_{j,k}) = m^*(z, u_{j,k}) + N(r, u_{j,k}),$$

где $|E|$ – мера Лебега множества E , $N(r, u_{j,k})$ – неванлинновская считающая функция нулей функции $f^{(d+1)}(z)$ в области $G_{j,k} \cap \{z : |z| < r\}$. Пусть $\tilde{u}_{j,k}(z)$ – круговая перестройка функции $u(z)$ [16]. Заметим, что [16]

$$m^*(z, u_{j,k}) = \frac{1}{\pi} \int_0^\theta \tilde{u}_{j,k}(re^{i\varphi}) d\varphi.$$

Из теоремы Бернштейна [17] следует, что $T^*(z, u_{j,k})$ – субгармоническая функция в области

$$K = \{re^{i\theta} : t_j < r < T_j, 0 < \theta < \pi\},$$

непрерывная в $K \cup (-T_j, t_j) \cup (t_j, T_j)$ и логарифмически выпуклая при $r > 0$ для каждого $\theta \in [0, \pi]$ и, кроме того, справедливы соотношения

$$T^*(r, u_{j,k}) = N(r, u_{j,k}), \quad T^*(re^{i\pi}, u_{j,k}) = T(r, u_{j,k}),$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} T^*(re^{i\theta}, u) = \frac{\tilde{u}_{j,k}(re^{i\theta})}{\pi} \quad \text{для } 0 < \theta < \pi,$$

где $T(r, u_{j,k})$ – неванлинновская характеристика δ -субгармонической функции $u_{j,k}(z)$.

Для действительнзначной функции $\varphi(r)$ от действительного переменного r рассмотрим оператор

$$L\varphi(r) = \liminf_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(re^h) + \varphi(re^{-h}) - 2\varphi(r)}{h^2}.$$

Если $\varphi(r)$ – дважды дифференцируемая функция в точке r , то $L\varphi(r) = r(d/dr)r \times (d/dr)\varphi(r)$.

Функция $T^*(r, u_{j,k})$ выпукла относительно $\log r$ для каждого фиксированного $\theta \in [0, \pi]$, поэтому для $r \in [t_j, T_j]$, $\theta \in [0, \pi]$ выполняется неравенство $LT^*(r, \theta, f) \geq 0$.

ЛЕММА 3. Для почти всех $\theta \in [0, \pi]$ и для почти всех $r \in [t_j, T_j]$ таких, что на окружности $|z| = r$ нет нулей и полюсов функции $f^{(d+1)}(z)$, справедливо неравенство

$$LT^*(r, u_{j,k}) \geq -\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^m \frac{\partial \tilde{u}_{j,k}(r, \theta)}{\partial \theta}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этой леммы аналогично доказательству леммы 1 из [18].

Далее положим [9]

$$T_0^*(z, f) = \sum_{k=1}^m T^*(z, u_{j,k}).$$

Из определения оператора L и логарифмической выпуклости функции $T^*(z, u_{j,k})$ следует, что для всех $r = |z| \in (t_j, T_j)$ имеем

$$LT_0^*(z, f) \geq \sum_{k=1}^m LT^*(z, u_{j,k}) \geq 0. \quad (3.5)$$

Из леммы 3 получаем, что для почти всех $r = |z| \in (t_j, T_j)$

$$LT_0^*(z, f) \geq -\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^m \frac{\partial \tilde{u}_{j,k}(r, \theta)}{\partial \theta} \geq 0. \quad (3.6)$$

Далее, для каждого α , $0 < \alpha < \pi/(2\mu_j)$, $r \in (t_j, T_j)$, положим [19], [20]

$$\sigma(r) = \int_0^\alpha T_0^*(re^{i\theta}, f) \sin(\mu_j(\alpha - \theta)) d\theta.$$

Используя лемму Фату, имеем

$$L\sigma(r) \geq \int_0^\alpha LT_0^*(re^{i\theta}, f) \sin(\mu_j(\alpha - \theta)) d\theta \geq 0.$$

Отсюда функция $\sigma(r)$ логарифмически выпукла на (t_j, T_j) . Поэтому для почти всех $r \in (t_j, T_j)$, $L\sigma(r) = r(d/dr)r\sigma'(r)$, где $\sigma'(r)$ – левосторонняя производная функции $\sigma(r)$. В силу (3.6) справедливо неравенство

$$L\sigma(r) \geq -\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^m \int_0^\alpha \frac{\partial \tilde{u}_{j,k}(r, \theta)}{\partial \theta} \sin(\mu_j(\alpha - \theta)) d\theta. \quad (3.7)$$

Интегрируя правую часть неравенства (3.7) по частям, получаем, что для почти всех $r \in (t_j, T_j)$

$$\begin{aligned} r \frac{d}{dr} r \sigma'(r) &\geq \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^m \tilde{u}_{j,k}(r, 0) \sin(\mu_j \alpha) - \mu_j T_0^*(re^{i\alpha}, f) + \mu_j \cos(\mu_j \alpha) N\left(r, \frac{1}{f'}\right) + \mu_j^2 \sigma(r) \\ &:= h(r) + \mu_j^2 \sigma(r). \end{aligned}$$

Разделим полученное неравенство на r^{μ_j+1} и проинтегрируем его от t_j до T_j . Тогда

$$\int_{t_j}^{T_j} \frac{1}{r^{\mu_j}} \frac{d}{dr} r \sigma'(r) dr \geq \int_{t_j}^{T_j} \frac{h(r)}{r^{\mu_j+1}} dr + \mu_j^2 \int_{t_j}^{T_j} \frac{\sigma(r)}{r^{\mu_j+1}} dr.$$

Используя монотонность $r \sigma'(r)$ и применяя формулу интегрирования по частям к левой части этого неравенства, получаем

$$\int_{t_j}^{T_j} \frac{h(r)}{r^{\mu_j+1}} dr \leq \left(\frac{\sigma(r)}{r^{\mu_j-1}} + \mu_j \frac{\sigma(r)}{r^{\mu_j}} \right) \Big|_{t_j}^{T_j}. \quad (3.8)$$

Из определения функции $T_0^*(z, f)$ и неравенства (2.5) следует, что для всех $\theta \in [0, \pi]$, $r \in [t_j, T_j]$

$$\begin{aligned} T_0^*(z, f) &\leq m(r, 0, f^{(d)}) + m \sqrt{T(\rho_j, f)} + N(r, 0, f^{(d)}) \\ &\leq T(r, f^{(d+1)}) + m T^{3/4}(r, f), \quad z = r e^{i\theta}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\sigma(r) \leq \frac{1}{\mu_j} (T(r, f^{(d+1)}) + m T^{3/4}(r, f)).$$

Из леммы о логарифмической производной [12] и (2.2), легко следует

$$T(T_j, f^{(d+1)}) \leq O(\log T(S_j, f)) + T(T_j, f) \leq \frac{3}{2} T(S_j, f), \quad j \rightarrow \infty.$$

Таким образом, справедливо неравенство

$$\sigma(T_j) \leq \frac{2}{\mu_j} T(S_j, f).$$

Аналогично

$$\sigma(S_j) \leq \frac{2}{\mu_j} T(R_j, f).$$

В силу монотонности функции $r \sigma'(r)$ имеем

$$\sigma(S_j) - \sigma(T_j) = \int_{T_j}^{S_j} \sigma'(r) dr \geq T_j \sigma'(T_j) \log \frac{S_j}{T_j} = \frac{1}{\mu_j} T_j \sigma'(T_j).$$

Поэтому

$$T_j \sigma'(T_j) \leq \mu_j \sigma(S_j) \leq 2T(R_j, f).$$

Из полученных неравенств и (2.4) следует, что

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sigma'(r)}{r^{\mu_j-1}} + \mu_j \frac{\sigma(r)}{r^{\mu_j}} \right) \Big|_{t_j}^{T_j} &\leq \frac{4T(R_j, f)}{R_j^{\mu_j}} - \frac{\sigma'(1)}{t_j^{\mu_j}} \leq \frac{4T(R_j, f)}{R_j^{\mu_j}} + \frac{T(t_j, f)}{t_j^{\mu_j}} \\ &< \varepsilon \mu_j \int_{t_j}^{T_j} \frac{T(r, f)}{r^{\mu_j+1}} dr, \quad j \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Подставляя полученную оценку в (3.8), имеем

$$\begin{aligned} & \frac{\sin(\mu_j \alpha)}{\pi} \sum_{k=1}^m \int_{t_j}^{T_j} \frac{\tilde{u}_{j,k}(r, 0)}{r^{\mu_j+1}} dr \\ & \quad - \mu_j \int_{t_j}^{T_j} \frac{T(r, f^{(d+1)})}{r^{\mu_j+1}} dr + \mu_j \cos(\mu_j \alpha) \int_{t_j}^{T_j} \frac{N(r, 0, f^{(d+1)})}{r^{\mu_j+1}} \\ & < \varepsilon \mu_j \int_{t_j}^{T_j} \frac{T(r, f)}{r^{\mu_j+1}} dr, \quad j \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\frac{\sin(\mu_j \alpha)}{\pi} \sum_{k=1}^m \int_{t_j}^{T_j} \frac{\tilde{u}_{j,k}(r, 0)}{r^{\mu_j+1}} dr - \mu_j \int_{t_j}^{T_j} \frac{T(r, f^{(d+1)})}{r^{\mu_j+1}} dr < \varepsilon \mu_j \int_{t_j}^{T_j} \frac{T(r, f)}{r^{\mu_j+1}} dr, \quad j \rightarrow \infty. \quad (3.9)$$

Ясно, что

$$T(r, f^{(d+1)}) = m(r, f^{(d+1)}) \leq m\left(r, \frac{f^{(d+1)}}{f}\right) + T(r, f).$$

Поэтому из леммы 2 следует

$$\int_{t_j}^{T_j} \frac{T(r, f^{(d+1)})}{r^{\mu_j+1}} dr < (1 + \varepsilon) \int_{t_j}^{T_j} \frac{T(r, f)}{r^{\mu_j+1}} dr, \quad j \rightarrow \infty. \quad (3.10)$$

Из этого неравенства, (3.9) и (3.10) получаем

$$\sum_{k=1}^m \int_{t_j}^{T_j} \frac{\tilde{u}_{j,k}(r, 0)}{r^{\mu_j+1}} dr < \frac{(1 + \varepsilon)\pi\mu_j}{\sin(\mu_j \alpha)} \int_{t_j}^{T_j} \frac{T(r, f)}{r^{\mu_j+1}} dr. \quad (3.11)$$

Так как $b(p_k, f) > 0$, то

$$\mathcal{L}(r, p_k, f) = \max_{|z|=r} \log^+ \frac{1}{|f(z) - p_k|} = \log^+ \frac{1}{|f(re^{i\theta_k(r)}) - p_k|} \rightarrow \infty, \quad r \rightarrow \infty.$$

Поэтому при $j \rightarrow \infty$ для всех $r \in [t_j, T_j]$ справедливо неравенство $|f(re^{i\theta_k(r)}) - p_k| < c/4$. Ясно, что

$$\mathcal{L}(r, p_k, f) \leq \log^+ \left| \frac{f^{(d+1)}(re^{i\theta_k(r)}) - p_k^{(d+1)}(re^{i\theta_k(r)})}{f(re^{i\theta_k(r)}) - p_k(re^{i\theta_k(r)})} \right| + \log^+ \left| \frac{1}{f^{(d+1)}(re^{i\theta_k(r)})} \right|.$$

Отсюда, если $|f^{(d+1)}(re^{i\theta_k(r)})| \geq \exp(-\sqrt{T(\rho_j, f)})$, то

$$\mathcal{L}(r, p_k, f) \leq \log^+ \left| \frac{f^{(d+1)}(re^{i\theta_k(r)})}{f(re^{i\theta_k(r)}) - p_k(re^{i\theta_k(r)})} \right| + \sqrt{T(\rho_j, f)}.$$

Если $|f^{(d+1)}(re^{i\theta})| < \exp(-\sqrt{T(\rho_j, f)})$, а

$$|f^{(d)}(re^{i\theta_k(r)}) - p_k^{(d)}(re^{i\theta_k(r)})| \geq \exp(-\sqrt{T(\rho_j, f)}),$$

то

$$\log^+ \frac{1}{|f(re^{i\theta_k(r)}) - p_k(re^{i\theta_k(r)})|} \leq \log^+ \left| \frac{f^{(d)}(re^{i\theta_k(r)}) - p^{(d)}(re^{i\theta_k(r)})}{f(re^{i\theta_k(r)}) - p_k(re^{i\theta_k(r)})} \right| + \sqrt{T(\rho_j, f)}.$$

Если

$$|f^{(d+1)}(re^{i\theta_k(r)})| < \exp(-\sqrt{T(\rho_j, f)}), \quad |f^{(d)}(re^{i\theta_k(r)})| < \exp(-\sqrt{T(\rho_j, f)}), \quad \dots, \\ |f''(re^{i\theta_k(r)}) - p_k''(re^{i\theta_k(r)})| < \exp(-\sqrt{T(\rho_j, f)}),$$

а

$$|f'(re^{i\theta_k(r)}) - p_k'(re^{i\theta_k(r)})| \geq \exp(-\sqrt{T(\rho_j, f)}),$$

то

$$\log^+ \frac{1}{|f(re^{i\theta_k(r)}) - p_k(re^{i\theta_k(r)})|} \leq \log^+ \left| \frac{f'(re^{i\theta_k(r)}) - p'(re^{i\theta_k(r)})}{f(re^{i\theta_k(r)}) - p_k(re^{i\theta_k(r)})} \right| + \sqrt{T(\rho_j, f)}.$$

Если $|f^{(l)}(re^{i\theta_k(r)})| < \exp(-\sqrt{T(\rho_j, f)})$, где $l = 1, 2, \dots, d+1$, то

$$\log^+ \left| \frac{1}{f^{(d+1)}(re^{i\theta_k(r)})} \right| \leq \tilde{u}_{j,k}(r).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} & \log^+ \frac{1}{|f(re^{i\theta_k(r)}) - p_k(re^{i\theta_k(r)})|} \\ & \leq \tilde{u}_{j,k}(r) + \log^+ M\left(r, \frac{(f-p_k)'}{f-p_k}\right) + \log^+ M\left(r, \frac{(f-p_k)''}{f-p_k}\right) + \dots \\ & \quad + M\left(r, \frac{(f-p_k)^{(d+1)}}{f-p_k}\right) + \sqrt{T(\rho_j, f)}, \quad 1 \leq k \leq m. \end{aligned}$$

Отсюда и (2.5) имеем, что для всех $r \in [t_j, T_j]$

$$\sum_{k=1}^m \mathcal{L}(r, p_k, f) \leq \sum_{k=1}^m u_{j,k}(r) + \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^{d+1} \log^+ M\left(r, \frac{(f-p_k)^{(i)}}{f-p_k}\right) + mT^{3/4}(r, f). \quad (3.12)$$

Используя (2.4), получаем

$$\begin{aligned} \mu_j \int_{t_j}^{T_j} \frac{T(r, f)}{r^{\mu_j+1}} dr &= \frac{T(t_j, f)}{t_j^{\mu_j}} - \frac{T(T_j, f)}{T_j^{\mu_j}} + \int_{t_j}^{T_j} \frac{rT'_-(r, f)}{r^{\mu_j+1}} dr \\ &< (1 + \varepsilon) \int_{t_j}^{T_j} \frac{A(r, f)}{r^{\mu_j+1}} dr, \quad j \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Из (3.11), (3.12) и леммы 1 следует, что при $j \geq j_0(\varepsilon)$

$$\sum_{k=1}^m \int_{t_j}^{T_j} \frac{\mathcal{L}(r, p_k, f)}{r^{\mu_j+1}} dr < \frac{(1 + \varepsilon)\pi}{\sin(\mu_j \alpha)} \int_{t_j}^{T_j} \frac{A(r, f)}{r^{\mu_j+1}} dr.$$

В этом неравенстве перейдем к пределу при $\alpha \rightarrow \pi/2\mu_j$:

$$\sum_{k=1}^m \int_{t_j}^{T_j} \frac{\mathcal{L}(r, p_k, f)}{r^{\mu_j+1}} dr < (1 + \varepsilon)\pi \int_{t_j}^{T_j} \frac{A(r, f)}{r^{\mu_j+1}} dr, \quad j \rightarrow \infty.$$

Таким образом, существует последовательность $r_j \in [t_j, T_j]$ такая, что

$$\sum_{k=1}^q \mathcal{L}(r_j, p_k, f) < (1 + \varepsilon)\pi A(r_j, f), \quad j \rightarrow \infty.$$

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^m b(p_k, f) \leq (1 + \varepsilon)\pi.$$

В силу произвольности числа $\varepsilon > 0$ имеем

$$\sum_{k=1}^m b(p_k, f) \leq \pi. \quad (3.13)$$

Докажем теперь неравенство (3.13) для функций рациональных. Пусть $\{q_k(z)\}_{k=1}^m$ – множество различных рациональных функций, $q_k = P_k(z)/Q_k(z)$, $P_k(z)$, $Q_k(z)$ – полиномы, $k = 1, 2, \dots, m$. Положим $p(z) = \prod_{k=1}^m Q_k(z)$, $F(z) = f(z)p(z)$. Ясно, что

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m b(q_k, f) &= \sum_{k=1}^m \liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{L}(r, q_k, f)}{A(r, f)} = \sum_{k=1}^m \liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{\max_{|z|=r} \log^+ 1/|f(z) - q_k|}{A(r, f)} \\ &= \sum_{k=1}^m \liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{\max_{|z|=r} \log^+ p(z)/|F(z) - p_k(z)|}{A(r, f)} \\ &\leq \sum_{k=1}^m \liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{\max_{|z|=r} \log^+ 1/|F(z) - p_k(z)|}{A(r, f)} + \limsup_{r \rightarrow \infty} m \frac{\log^+ \max_{|z|=r} |p(z)|}{A(r, f)}. \end{aligned}$$

Так как $f(z)$ – целая функция бесконечного нижнего порядка, то $A(r, f)$ также будет функцией бесконечного нижнего порядка. Поэтому $\log^+ M(r, p) = O(\log r) = o(A(r, f))$, $r \rightarrow \infty$. Следовательно,

$$\sum_{k=1}^m b(q_k, f) \leq \sum_{k=1}^m b(p_k, F) \leq \pi. \quad (3.14)$$

Пусть

$$\Omega = \{q \in \mathfrak{M} : b(q, f) > 0\}, \quad \Omega_n = \left\{q \in \mathfrak{M} : b(q, f) > \frac{1}{n}\right\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ясно, что

$$\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n.$$

Из оценки (3.14) следует, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ множество Ω_n – конечное. Поэтому множество Ω не более чем счетное и утверждение теоремы 1 следует из неравенства (3.14).

ЗАМЕЧАНИЕ. Следует сказать, что метод доказательства теоремы 1 проходит и для целых функций конечного нижнего порядка $\lambda > 0$, только надо использовать обычные пики Поля и $\mu_j = \lambda$ (см. также [9]). В этом случае

$$\sum_{q \in \mathfrak{M}} b(q, f) \leq \begin{cases} \frac{\pi}{\sin \pi \lambda}, & \text{если } 0 < \lambda \leq 0.5, \\ \pi, & \text{если } \lambda > 0.5. \end{cases}$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Р. Неванлинна, *Однозначные аналитические функции*, ОГИЗ, М., 1941.
- [2] G. Frank, G. Weissenborn, “Rational deficient functions of meromorphic functions”, *Bull. London Math. Soc.*, **18**:1 (1986), 29–33.
- [3] N. Steinmetz, “Eine Verallgemeinerung des zweiten Nevanlinnaschen Hauptsatzes”, *J. Reine Angew. Math.*, **368** (1986), 134–141.
- [4] В. П. Петренко, *Рост мероморфных функций*, Вища школа, Харьков, 1978.
- [5] R. E. A. C. Paley, “A note on integral functions”, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **28** (1932), 262–265.
- [6] Н. В. Говоров, “О гипотезе Пэйли”, *Функц. анализ и его прил.*, **3**:2 (1969), 41–45.
- [7] В. П. Петренко, “Рост мероморфных функций конечного нижнего порядка”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **2** (1969), 414–454.
- [8] А. А. Гольдберг, И. В. Островский, *Распределение значений мероморфных функций*, Наука, М., 1970.
- [9] И. И. Марченко, А. И. Щерба, “О величинах отклонений мероморфных функций”, *Матем. сб.*, **181**:1 (1990), 3–24.
- [10] E. Ciechanowicz, I. I. Marchenko, “On deviations from rational functions of entire functions of finite lower order”, *Ann. Polon. Math.*, **91**:2–3 (2007), 161–177.
- [11] W. Bergweiler, H. Bock, “On the growth of meromorphic functions of infinite order”, *J. Anal. Math.*, **64** (1994), 327–336.
- [12] У. К. Хейман, *Мероморфные функции*, Мир, М., 1966.
- [13] A. Eremenko, “An analogue of the defect relation for the uniform metric”, *Complex Variables Theory Appl.*, **34**:1–2 (1997), 83–97.
- [14] И. И. Марченко, “О росте целых и мероморфных функций”, *Матем. сб.*, **189**:6 (1998), 59–84.
- [15] A. Weitsman, “A theorem on Nevanlinna deficiencies”, *Acta math.*, **128**:1–2 (1972), 41–52.
- [16] У. К. Хейман, *Многолистные функции*, ИЛ, М., 1960.
- [17] A. Baernstein, “Integral means, univalent functions and circular symmetrization”, *Acta Math.*, **133**:1 (1974), 139–169.
- [18] И. И. Марченко, “Об аналоге второй основной теоремы для равномерной метрики”, *Матем. физика, анализ, геометрия*, **5**:3–4 (1998), 212–227.
- [19] M. Essen, D. F. Shea, “Applications of Denjoy integral inequalities and differential inequalities to growth problems for subharmonic and meromorphic functions”, *Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A*, **82**:2 (1982), 201–216.
- [20] R. Gariepy, J. L. Lewis, “Space Analogues of some theorems for subharmonic and meromorphic functions”, *Ark. Mat.*, **13**:1–2 (1975), 91–105.

Л. В. Калужинова

Украинская государственная академия железнодорожного транспорта, г. Харьков, Украина
E-mail: Kaluzhynova@univer.kharkov.ua

Поступило

23.06.2007

И. И. Марченко

Szczecin University, Institute of Mathematics, Szczecin, Poland
E-mail: marchenko@wmf.univ.szczecin.pl