Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Кондратьев, И. А. Рудаков, О периодических решениях квазилинейного волнового уравнения, *Матем. заметки*, 2009, том 85, выпуск 1, 36–53

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm6584>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 16:19:18

О периодических решениях квазилинейного волнового уравнения

В. А. Кондратьев, И. А. Рудаков

Исследуются свойства волнового оператора с условием периодичности по времени и однородными граничными условиями 3-го рода и Дирихле. Доказано существование нетривиального периодического по времени решения $\sin$ -Гордон с однородными граничными условиями 3-го рода и Дирихле. Получены теоремы о существовании периодического решения квазилинейного волнового уравнения с переменными по x коэффициентами и граничным условием 3-рода.

Библиография: 16 названий.

Введение. Рассматривается задача

$$u_{tt} - u_{xx} = g(u) + f(x, t), \quad 0 < x < \pi, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (0.1)$$

$$u(x, t + T) = u(x, t), \quad 0 < x < \pi, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (0.2)$$

Будем исследовать следующие два типа граничных условий:

$$u(0, t) = u(\pi, t) + hu_x(\pi, t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (0.3)$$

$$u(0, t) - hu_x(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (0.4)$$

Здесь $T = 2\pi b/a$, где a, b есть взаимно простые натуральные числа и $f(x, t)$ есть заданная T -периодическая по времени функция. Задача (0.1), (0.2) с однородными граничными условиями Дирихле изучена в работах [1]–[5]. В работах [6]–[9] доказано существование обобщенных решений задачи (0.1), (0.2) с однородными граничными условиями 3-го рода с константой $h > 0$. В работах [10], [11] рассмотрено волновое уравнение с переменными коэффициентами и граничными условиями 3-го рода с $h > 0$. Целью данной работы является исследование случая $h < 0$ и доказательство теорем о гладкости обобщенных решений задач (0.1)–(0.3) и (0.1), (0.2), (0.4), если функции g, f являются достаточно гладкими.

1. Линейное неоднородное уравнение. Решение задач (0.1)–(0.3) и (0.1), (0.2), (0.4) будем искать в виде ряда Фурье по системе

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{T}} \varphi_n(x), \frac{2}{\sqrt{T}} \varphi_n(x) \cos \frac{a}{b} mt, \frac{2}{\sqrt{T}} \varphi_n(x) \sin \frac{a}{b} mt \right\}. \quad (1.1)$$

Здесь $\varphi_n(x)$ есть нормированные ($\|\varphi_n\|_{L_2(0,\pi)} = 1$) собственные функции соответствующей задачи Штурма–Лиувилля:

$$\varphi'' + \lambda^2 \varphi = 0, \quad \varphi(0) = \varphi(\pi) + h\varphi'(\pi) = 0, \quad (1.2)$$

$$\varphi'' + \lambda^2 \varphi = 0, \quad \varphi(0) - h\varphi'(0) = \varphi(\pi) = 0. \quad (1.3)$$

Обозначим $\Omega = [0, \pi] \times \mathbb{R}/(T\mathbb{Z})$ и $\|\cdot\|$, $(\cdot, \cdot)$ – норму и скалярное произведение в $L_2(\Omega)$ соответственно. Система (1.1) является полной ортонормированной системой в $L_2(\Omega)$. Легко видеть, что задачи (1.2), (1.3) имеют одинаковые собственные числа λ_n , удовлетворяющие уравнению $\operatorname{tg}(\lambda_n \pi) = -h\lambda_n$. Обозначим $\theta_n = \lambda_n - (n - 1/2)$. Тогда

$$\lambda_n = n - \frac{1}{2} + \theta_n. \quad (1.4)$$

Не трудно показать, что $\theta_n \in (0, 1/2)$. В [9] показано, что существуют положительные константы b_0, b_1 (в качестве b_0 можно взять $2/(h\pi)$) такие, что

$$0 < b_0 \frac{1}{n} < \theta_n < b_1 \frac{1}{n} \quad \text{для всех } n \in \mathbb{N}. \quad (1.5)$$

Простые вычисления показывают, что для задачи (1.2) $\varphi_n = C_n \sin \lambda_n x$, а для задачи (1.3) $\varphi_n = C_n (\sin \lambda_n x + \lambda_n h \cos \lambda_n x)$, где $C_n = \sqrt{2/\pi + \alpha_n}$, $\alpha_n > 0$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$.

Определим оператор $A_0: L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$, для которого

$$D(A_0) = \left\{ u = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \varphi_n \left(a_{nm} \cos \frac{a}{b} mt + b_{nm} \sin \frac{a}{b} mt \right) \mid M, N \in \mathbb{N} \right\}$$

и $A_0 \varphi = \varphi_{tt} - \varphi_{xx}$ для любого $\varphi \in D(A_0)$. Пусть $A = A^*$ в $L_2(\Omega)$. Система функций (1.1) является системой собственных функций операторов A_0 и A с собственными значениями

$$\mu_{nm} = \lambda_n^2 - \left(\frac{a}{b} m \right)^2 = \left(n - \frac{1}{2} + \theta_n \right)^2 - \left(\frac{a}{b} m \right)^2.$$

Оператор A самосопряжен в $L_2(\Omega)$, образ $R(A)$ замкнут в $L_2(\Omega)$,

$$L_2(\Omega) = R(A) \oplus \ker A, \quad \dim \ker A < \infty.$$

При $a = 1$ (см. [7]) $\ker A = \{0\}$. Рассмотрим линейное неоднородное уравнение

$$u_{tt} - u_{xx} = f(x, t), \quad 0 < x < \pi, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (1.6)$$

Здесь f есть заданная T -периодическая функция из $L_2(\Omega)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Обобщенным решением задач (1.6), (0.2), (0.3) и (1.6), (0.2), (0.4) называется T -периодическая по t функция $u \in L_2(\Omega)$ такая, что*

$$(u, \varphi_{tt} - \varphi_{xx}) = (f, \varphi) \quad \text{для всех } \varphi \in D(A_0).$$

Обозначим $H_k(\Omega) = W_k^2(\Omega)$ пространство Соболева и $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{H_k(\Omega)}$, $H_0(\Omega) = L_2(\Omega)$. T -периодическая по t функция u является обобщенным решением задач (1.6), (0.2), (0.3) и (1.6), (0.2), (0.4) тогда и только тогда, когда $u \in D(A)$ и $Au = f$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $h > 0$, b есть нечетное число и $k \in \{0, 1\}$. Тогда для любой T -периодической по t функции $f \in H_k(\Omega) \cap R(A)$, задачи (1.6), (0.2), (0.3) и (1.6), (0.2), (0.4) имеют обобщенное решение $u \in H_{k+1}(\Omega)$. Это решение единственно в подпространстве $H_{k+1}(\Omega) \cap R(A)$ и существует положительная константа C_k , не зависящая от f , такая, что

$$\|A^{-1}f\|_{k+1} \leq C_k \|f\|_k \quad \text{для всех } f \in H_k(\Omega) \cap R(A).$$

Если $f \in H_1(\Omega) \cap R(A)$, то $A^{-1}f \in H_2(\Omega) \cap C^1(\Omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разложим функцию $f \in H_k(\Omega) \cap R(A)$ в ряд Фурье по системе (1.1)

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \varphi_n(x) + \sum_{\substack{n, m \in \mathbb{N} \\ \mu_{nm} \neq 0}} \varphi_n(x) \left(a_{nm} \cos \frac{a}{b} mt + b_{nm} \sin \frac{a}{b} mt \right).$$

Тогда

$$u = A^{-1}f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} f_n \varphi_n(x) + \sum_{\substack{n, m \in \mathbb{N} \\ \mu_{nm} \neq 0}} \frac{1}{\mu_{nm}} \varphi_n(x) \left(a_{nm} \cos \frac{a}{b} mt + b_{nm} \sin \frac{a}{b} mt \right).$$

Обозначим $u_1 = \sum_{n=1}^{\infty} (1/\lambda_n^2) f_n \varphi_n(x)$, $u_2 = u - u_1$. Легко видеть, что

$$|\varphi'_n(x)| \leq C \lambda_n \quad \text{для всех } x, n, \quad (1.7)$$

где C не зависит от x и n . Поэтому

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} |f_n \varphi'_n(x)| \leq C \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} \sum_{n=1}^{\infty} f_n^2 \right)^{1/2} < \infty$$

и $u \in C^1(0, \pi)$. Поскольку $\varphi''_n(x) = -\lambda_n^2 \varphi_n(x)$, то

$$u_1 \in H_2(0, \pi) \cap C^1(0, \pi). \quad (1.8)$$

Рассмотрим ряд

$$\sum_{\substack{n, m \in \mathbb{N} \\ \mu_{nm} \neq 0}} \frac{m}{\mu_{nm}} \varphi_n(x) \left(-a_{nm} \sin \frac{a}{b} mt + b_{nm} \cos \frac{a}{b} mt \right). \quad (1.9)$$

Учитывая нечетность b , оценим множитель

$$\begin{aligned} \left| \frac{m}{\mu_{nm}} \right| &= \frac{m}{\left| n - \frac{1}{2} + \theta_n - \frac{a}{b} m \right| \left(n - \frac{1}{2} + \theta_n + \frac{a}{b} m \right)} < \frac{b^2}{a} \frac{1}{\left| bn - am - \frac{b}{2} + b\theta_n \right|} \\ &\leq \frac{b^2}{a \left| \left| bn - am - \frac{b}{2} \right| - b\theta_n \right|} \leq \frac{b^2}{a \left| \frac{1}{2} - b\theta_n \right|} \leq C_1, \end{aligned} \quad (1.10)$$

если $\mu_{nm} \neq 0$ и $\theta_n \in (0, 1/(2b))$. А поскольку $\theta_n \rightarrow 0$, ряд (1.9) сходится в $L_2(\Omega)$ и $(u_2)_t \in L_2(\Omega)$.

Рассмотрим вначале граничные условия (0.3) и напишем ряд

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{n, m \in \mathbb{N} \\ \mu_{nm} \neq 0}} \frac{1}{\mu_{nm}} \varphi'_n(x) \left(a_{nm} \cos \frac{a}{b} mt + b_{nm} \sin \frac{a}{b} mt \right) \\ &= \sum_{\substack{n, m \in \mathbb{N} \\ \mu_{nm} \neq 0}} C_n \frac{\lambda_n}{\mu_{nm}} \cos \lambda_n x \left(a_{nm} \cos \frac{a}{b} mt + b_{nm} \sin \frac{a}{b} mt \right). \end{aligned} \quad (1.11)$$

Система функций $\{\cos \lambda_n x\}$ не является ортогональной в $L_2(0, \pi)$. Чтобы исследовать сходимость ряда (1.11), разложим функцию $\cos \lambda_n x$ в ряд Фурье по системе $\varphi_k(x) = C_k \sin \lambda_k x$:

$$\cos \lambda_n x = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{kn} \cdot \varphi_k(x), \quad (1.12)$$

где

$$\gamma_{kk} = C_k \int_0^\pi \cos \lambda_k x \sin \lambda_k x dx = \frac{1}{4\lambda_k} C_k (1 - \cos 2\lambda_k \pi) = \frac{1}{2} C_k \cdot \frac{\sin^2(\lambda_k \pi)}{\lambda_k}$$

и при $k \neq n$

$$\gamma_{kn} = \frac{1}{2} C_k \left(\frac{1}{\lambda_k - \lambda_n} + \frac{1}{\lambda_k + \lambda_n} - \frac{\cos(\lambda_k - \lambda_n)\pi}{\lambda_k - \lambda_n} - \frac{\cos(\lambda_k + \lambda_n)\pi}{\lambda_k + \lambda_n} \right).$$

Следовательно, существует константа $C_2 > 0$ такая, что

$$|\gamma_{kn}| \leq \frac{C_2}{|\lambda_k - \lambda_n|}, \quad |\gamma_{kk}| \leq \frac{C_2}{\lambda_k}. \quad (1.13)$$

Оценим сумму ряда

$$\begin{aligned} I &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ \mu_{nm} \neq 0}} \left| \frac{\lambda_n \gamma_{kn} a_{nm}}{\mu_{nm}} \right| \right)^2 \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{nm}^2 \right) \left(\sum_{\substack{l \in \mathbb{N} \\ \mu_{lm} \neq 0}} \frac{\lambda_l^2 \gamma_{kl}^2}{\mu_{lm}^2} \right) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{nm}^2 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\substack{l \in \mathbb{N} \\ \mu_{lm} \neq 0}} \frac{\lambda_l^2 \gamma_{kl}^2}{\mu_{lm}^2}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Пусть

$$S_m = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\substack{l \in \mathbb{N} \\ \mu_{lm} \neq 0}} \frac{\lambda_l^2 \gamma_{kl}^2}{\mu_{lm}^2} = \sum_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ \mu_{km} \neq 0}} \frac{\lambda_k^2 \gamma_{kk}^2}{\mu_{km}^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\substack{l \neq k \\ \mu_{lm} \neq 0}} \frac{\lambda_l^2 \gamma_{kl}^2}{\mu_{lm}^2}.$$

Легко видеть, что существует константа $C_0 > 0$ такая, что если $\mu_{km} \neq 0$, то $|\mu_{km}| \geq C_0 |k + (a/b)m - 1/2|$. Отсюда и из (1.13) выведем

$$\sum_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ \mu_{km} \neq 0}} \frac{\lambda_k^2 \gamma_{kk}^2}{\mu_{km}^2} \leq \frac{C_2^2}{C_0^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k - 1/2)^2} = \frac{\pi^2 C_2^2}{2C_0^2}. \quad (1.15)$$

Используя (1.13), оценим второе слагаемое:

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\substack{l \neq k \\ \mu_{lm} \neq 0}} \frac{\lambda_l^2 \gamma_{kl}^2}{\mu_{lm}^2} &= \sum_{\substack{l=1 \\ \mu_{lm} \neq 0}}^{\infty} \frac{\lambda_l^2}{\mu_{lm}^2} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^{\infty} \gamma_{kl}^2 \\
 &\leq C_2^2 \sum_{\substack{l=1 \\ \mu_{lm} \neq 0}}^{\infty} \frac{\lambda_l^2}{\left(l - \frac{1}{2} + \theta_l - \frac{a}{b}m\right)^2 \left(\lambda_l + \frac{a}{b}m\right)^2} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_k - \lambda_l)^2} \\
 &\leq 8C_2^2 b^2 \sum_{\substack{l=1 \\ \mu_{lm} \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{(2bl - 2am - b + b\theta_l)^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k - 1/2)^2}.
 \end{aligned}$$

Обозначим через l_0 такое натуральное число, что $b\theta_l < 1/2$ при любом $l \geq l_0$. Поскольку $2bl - 2am - b$ есть нечетное число, то

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\substack{l \neq k \\ \mu_{lm} \neq 0}} \frac{\lambda_l^2 \gamma_{kl}^2}{\mu_{lm}^2} &\leq 4\pi^2 C_2^2 b^2 \sum_{\substack{l=1 \\ \mu_{lm} \neq 0}}^{l_0-1} \frac{1}{(2bl - 2am - b + b\theta_l)^2} \\
 &\quad + 4\pi^2 C_2^2 b^2 \sum_{l=l_0}^{\infty} \frac{1}{(|2bl - 2am - b| - 1/2)^2} \\
 &\leq L_0 + 8\pi^2 C_2^2 b^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k - 1/2)^2} = L_0 + 4\pi^4 C_2^2 b^2,
 \end{aligned} \tag{1.16}$$

где

$$L_0 = 4\pi^2 C_2^2 b^2 \sum_{\substack{l=1 \\ \mu_{lm} \neq 0}}^{l_0-1} \frac{1}{\min_{m \in \mathbb{N}} (2bl - 2am - b + b\theta_l)^2}.$$

Из (1.15), (1.16) и равенства Парсеваля вытекает сходимость ряда I . Аналогично доказывается сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ \mu_{nm} \neq 0}} \left| \frac{\lambda_n \gamma_{kn} b_{nm}}{\mu_{nm}} \right| \right)^2. \tag{1.17}$$

Обозначим

$$v_{MN} = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N C_n \frac{\lambda_n a_{nm}}{\mu_{nm}} \cos \lambda_n x \cos \frac{a}{b} mt.$$

Из сходимости ряда I следует существование функции $v \in L_2(\Omega)$ такой, что

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ \mu_{nm} \neq 0}} C_n \frac{\lambda_n \gamma_{kn} a_{nm}}{\mu_{nm}} \right) \varphi_k(x) \cos \frac{a}{b} mt.$$

Покажем, что последовательность v_{MN} содержит сходящуюся к v в $L_2(\Omega)$ подпоследовательность. Обозначим

$$c_{km} = \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ \mu_{nm} \neq 0}} C_n \frac{\sqrt{T} \lambda_n \gamma_{kn} a_{nm}}{\sqrt{2} \mu_{nm}}, \quad e_m = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos \frac{a}{b} mt, \quad e_{km} = \varphi_k(x) e_m.$$

Тогда

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} c_{km} e_{km} = \bar{v}_{MK} + \alpha_{MK}, \quad (1.18)$$

где $\bar{v}_{MK} = \sum_{k=1}^K \sum_{m=1}^M c_{km} e_{km}$. Возьмем произвольное $l \in \mathbb{N}$. Из (1.18) следует существование натуральных чисел $M_1 = M_1(l)$, $K_1 = K_1(l)$ таких, что $M_1(l) \rightarrow \infty$, $K_1(l) \rightarrow \infty$ при $l \rightarrow \infty$ и при любых $M \geq M_1$, $K \geq K_1$ выполнено неравенство

$$\|\alpha_{MK}\| < \frac{1}{3l}. \quad (1.19)$$

Воспользовавшись введенными выше обозначениями, напомним

$$v_{MN} = v + (v_{MN} - v) = v + (v_{MN} - \bar{v}_{MK}) - \alpha_{MK}, \quad (1.20)$$

$$\begin{aligned} v_{MN} &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N C_n \frac{\sqrt{T} \lambda_n a_{nm}}{\sqrt{2} \mu_{nm}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{kn} \varphi_k(x) \right) e_m \\ &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N d_{nm} a_{nm} \left(\sum_{k=1}^K \gamma_{kn} \varphi_k(x) + r_{Kn} \right) e_m \\ &= \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^K \left(\sum_{n=1}^N d_{nm} a_{nm} \gamma_{kn} \right) e_{km} + T_{KMN}, \end{aligned}$$

где

$$d_{nm} = C_n \frac{\sqrt{T} \lambda_n}{\sqrt{2} \mu_{nm}}, \quad r_{Kn} = \sum_{k=K+1}^{\infty} \gamma_{kn} \varphi_k(x), \quad T_{KMN} = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N d_{nm} a_{nm} r_{Kn} e_m.$$

Оценим

$$\|r_{Kn}\|^2 = \sum_{k=K+1}^{\infty} \gamma_{kn}^2 \leq C_2^2 \sum_{k=K+1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_k - \lambda_N)^2},$$

если $K > N$. Таким образом, при $K > N$ имеем

$$\begin{aligned} \|T_{KMN}\| &\leq C_3 \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N |a_{nm}| \cdot \|r_{Kn}\| \leq C_4 \|f\| \sqrt{MN} \left(\sum_{k=K+1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_k - \lambda_N)^2} \right)^{1/2} \\ &\leq C_4 \|f\| \sqrt{MN} \left(\sum_{k=K+1}^{\infty} \frac{1}{(k - N - 1/2)^2} \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Вычислим

$$\begin{aligned} v_{MN} - \bar{v}_{MK} &= \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^K \left(\sum_{\substack{n=1 \\ \mu_{nm} \neq 0}}^N d_{nm} a_{nm} \gamma_{kn} \right) e_{km} + T_{KMN} \\ &\quad - \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^K \left(\sum_{\substack{n=1 \\ \mu_{nm} \neq 0}}^{\infty} d_{nm} a_{nm} \gamma_{kn} \right) e_{km} \\ &= - \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^K \left(\sum_{\substack{n=N+1 \\ \mu_{nm} \neq 0}}^{\infty} d_{nm} a_{nm} \gamma_{kn} \right) e_{km} + T_{KMN}. \end{aligned}$$

Обозначим

$$D_{KMN} = \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^K \left(\sum_{\substack{n=N+1 \\ \mu_{nm} \neq 0}}^{\infty} d_{nm} a_{nm} \gamma_{kn} \right) e_{km}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|D_{KMN}\|^2 &= \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^K \left(\sum_{\substack{n=N+1 \\ \mu_{nm} \neq 0}}^{\infty} d_{nm} a_{nm} \gamma_{kn} \right)^2 \leq \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^K \left(\sum_{n=N+1}^{\infty} a_{nm}^2 \right) \cdot \sum_{l=N+1}^{\infty} d_{lm}^2 \gamma_{kl}^2 \\ &= \sum_{m=1}^M \left(\sum_{n=N+1}^{\infty} a_{nm}^2 \right) \cdot \sum_{k=1}^K \sum_{l=N+1}^{\infty} d_{lm}^2 \gamma_{kl}^2. \end{aligned}$$

Из (1.15), (1.16) выводим

$$\sum_{k=1}^K \sum_{l=N+1}^{\infty} d_{lm}^2 \gamma_{kl}^2 \leq \frac{T \cdot \bar{C}}{2} S_m \leq \frac{T \cdot \bar{C}}{2} \left(\frac{\pi^2 C_2^2}{2C_0^2} + L_0 + 4\pi^4 C_2^2 b^2 \right).$$

Здесь $\bar{C} = \max_n C_n$. Следовательно,

$$\|D_{KMN}\| \leq \sqrt{\frac{T \cdot \bar{C}}{2} \left(\frac{\pi^2 C_2^2}{2C_0^2} + L_0 + 4\pi^4 C_2^2 b^2 \right)} \cdot \left(\sum_{m=1}^M \sum_{n=N+1}^{\infty} a_{nm}^2 \right)^{1/2}, \quad (1.22)$$

$$\|v_{MN} - v\| \leq \|D_{KMN}\| + \|T_{KMN}\| + \|\alpha_{MK}\|. \quad (1.23)$$

Из (1.22) вытекает существование числа $N_1 = N_1(M)$ такого, что $N_1 \rightarrow \infty$ при $M \rightarrow \infty$ и

$$\|D_{KMN_1(M)}\| < \frac{1}{3l}. \quad (1.24)$$

Из (1.21) следует существование числа $K_2 = K_2(M, N)$ такого, что выполнено $K_2 \geq \max(N, K_1(l))$ и

$$\|T_{K_2(M, N)MN}\| < \frac{1}{3l}. \quad (1.25)$$

Воспользовавшись (1.19), (1.23)–(1.25), получим оценку

$$\|v_{M_1(l)N_1(M_1(l))} - v\| \leq \|D_{K_2 M_1(l)N_1}\| + \|T_{K_2(M_1(l), N_1)M_1(l)N_1}\| + \|\alpha_{M_1(l)K_2}\| < \frac{1}{l}.$$

Следовательно,

$$\lim_{l \rightarrow \infty} v_{M_1(l)N_1(M_1(l))} = v. \quad (1.26)$$

Обозначим

$$h(x, t) = \sum_{\substack{n, m \in \mathbb{N} \\ \mu_{nm} \neq 0}} \frac{1}{\mu_{nm}} \varphi_n(x) a_{nm} \cos \frac{a}{b} mt, \quad g(x, t) = \sum_{\substack{n, m \in \mathbb{N} \\ \mu_{nm} \neq 0}} \frac{1}{\mu_{nm}} \varphi_n(x) b_{nm} \sin \frac{a}{b} mt.$$

Из (1.26) следует, что $h_x = v \in L_2(\Omega)$. Аналогично доказывается, что $g_x \in L_2(\Omega)$. Следовательно, $(u_2)_x = h_x + g_x \in L_2(\Omega)$ и $u \in H_1(\Omega)$. При $k = 0$ теорема доказана.

Пусть $k = 1$. Возьмем произвольную функцию $f \in H_1(\Omega) \cap R(A)$. Тогда (см. [12])

$$f_t = \sum_{\substack{n,m \in \mathbb{N} \\ \mu_{nm} \neq 0}} \varphi_n(x) \left(a'_{nm} \cos \frac{a}{b} mt + b'_{nm} \sin \frac{a}{b} mt \right),$$

где $a'_{nm} = (a/b)mb_{nm}$, $b'_{nm} = -(a/b)ma_{nm}$. Легко видеть, что

$$(A^{-1}f)_t = A^{-1}f_t = \sum_{\substack{n,m \in \mathbb{N} \\ \mu_{nm} \neq 0}} \frac{1}{\mu_{nm}} \varphi_n(x) \left(a'_{nm} \cos \frac{a}{b} mt + b'_{nm} \sin \frac{a}{b} mt \right).$$

Тогда по доказанному выше $(A^{-1}f)_{tx} = (A^{-1}f_t)_x \in L_2(\Omega)$. Рассмотрим ряд

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{n,m \in \mathbb{N} \\ \mu_{nm} \neq 0}} \frac{m^2}{\mu_{nm}} \varphi_n(x) \left(a_{nm} \sin \frac{a}{b} mt + b_{nm} \cos \frac{a}{b} mt \right) \\ &= \frac{a}{b} \sum_{\substack{n,m \in \mathbb{N} \\ \mu_{nm} \neq 0}} \frac{m}{\mu_{nm}} \varphi_n(x) \left(-b'_{nm} \sin \frac{a}{b} mt + a'_{nm} \cos \frac{a}{b} mt \right). \end{aligned}$$

Сходимость в $L_2(\Omega)$ данного ряда доказывается точно так же, как для ряда (1.9). Следовательно, $(A^{-1}f)_{tt} \in L_2(\Omega)$.

Рассмотрим ряд

$$\sum_{\substack{n,m \in \mathbb{N} \\ \mu_{nm} \neq 0}} \frac{\lambda_n^2}{\mu_{nm}} \varphi_n(x) \left(a_{nm} \sin \frac{a}{b} mt + b_{nm} \cos \frac{a}{b} mt \right). \quad (1.27)$$

Чтобы доказать сходимость в $L_2(\Omega)$ ряда (1.27), рассмотрим числовой ряд

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{n,m \in \mathbb{N} \\ \mu_{nm} \neq 0}} \frac{n^4}{\mu_{nm}^2} (a_{nm}^2 + b_{nm}^2) \\ &= \sum_{\substack{n \leq 3a/bm \\ \mu_{nm} \neq 0}} \frac{n^4}{\mu_{nm}^2} (a_{nm}^2 + b_{nm}^2) + \sum_{n > 3(a/b)m} \frac{n^4}{\mu_{nm}^2} (a_{nm}^2 + b_{nm}^2) \\ &\leq 81 \frac{a^4}{b^4} \sum_{\substack{n \leq 3a/bm \\ \mu_{nm} \neq 0}} \frac{m^4}{\mu_{nm}^2} (a_{nm}^2 + b_{nm}^2) + 4 \sum_{n,m \in \mathbb{N}} \frac{n^2}{(2/3n - 1/2)^2} (a_{nm}^2 + b_{nm}^2) \\ &\leq 81 \frac{a^4}{b^4} C_1^2 \sum_{n,m \in \mathbb{N}} ((b'_{nm})^2 + (a'_{nm})^2) + 144 \sum_{n,m \in \mathbb{N}} (a_{nm}^2 + b_{nm}^2) < \infty. \end{aligned}$$

Отсюда и из (1.4) вытекает сходимость в $L_2(\Omega)$ ряда (1.27). Тогда из (1.2), (1.3) следует $(A^{-1}f)_{xx} \in L_2(\Omega)$. Следовательно, $A^{-1}f \in H_2(\Omega)$.

Докажем включение $A^{-1}f \in C^1(\Omega)$. Для этого рассмотрим числовой ряд

$$J = \sum_{\substack{n,m \in \mathbb{N} \\ \mu_{nm} \neq 0}} \frac{n}{|\mu_{nm}|} (|a_{nm}| + |b_{nm}|) = \frac{b}{a} \sum_{\substack{n,m \in \mathbb{N} \\ \mu_{nm} \neq 0}} \frac{n}{m|\mu_{nm}|} (|a'_{nm}| + |b'_{nm}|).$$

Используя неравенство Коши–Буняковского, выведем

$$J \leq \frac{b}{a} \left(\sum_{n,m \in \mathbb{N}} (a'_{nm})^2 + (b'_{nm})^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{\mu_{nm} \neq 0} \frac{n^2}{m^2 \mu_{nm}^2} \right)^{1/2}.$$

Оценим сумму ряда:

$$\begin{aligned} \sum_{\mu_{nm} \neq 0} \frac{n^2}{m^2 \mu_{nm}^2} &= \sum_{n \leq 3(a/b)m} \frac{n^2}{m^2 \mu_{nm}^2} + \sum_{n > 3(a/b)m} \frac{n^2}{m^2 \mu_{nm}^2} \\ &\leq 9 \frac{a^2}{b^2} \sum_{\mu_{nm} \neq 0} \frac{1}{\mu_{nm}^2} + \sum_{n > 3(a/b)m} \frac{n^2}{m^2 \left(n - \frac{a}{b}m - \frac{1}{2} + \theta_n \right)^2 \left(n - \frac{1}{2} \right)^2} \\ &\leq 9 \frac{a^2}{b^2} \sum_{\mu_{nm} \neq 0} \frac{1}{\mu_{nm}^2} + 4 \sum_{n,m \in \mathbb{N}} \frac{1}{m^2 \left(\frac{2}{3}n - \frac{1}{2} \right)^2} < \infty. \end{aligned}$$

Из сходимости ряда J , (1.4), (1.7) следует, что классическая производная $(\partial/\partial x)u_2 \in C(\Omega)$. Воспользовавшись неравенством Коши–Буняковского, получим оценку

$$\sum_{\mu_{nm} \neq 0} \frac{m}{|\mu_{nm}|} (|a_{nm}| + |b_{nm}|) \leq \frac{b}{a} \left(\sum_{n,m \in \mathbb{N}} ((a'_{nm})^2 + (b'_{nm})^2) \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{\mu_{nm} \neq 0} \frac{1}{\mu_{nm}^2} \right)^{1/2} < \infty.$$

Следовательно, $(\partial/\partial t)u_2 \in C(\Omega)$. Таким образом, $u_2 \in C_1(\Omega)$.

Для граничных условий (0.3) теорема доказана. Случай граничных условий (0.4) легко свести к задаче с граничными условиями (0.3). Пусть функция $u \in C(\Omega)$ (см. [8]) является обобщенным решением задачи (1.6), (0.2), (0.4). Тогда функция $\bar{u}(x, t) = u(\pi - x, t)$ является решением задачи (1.6), (0.2), (0.3) с правой частью $\bar{f}(x, t) = f(\pi - x, t)$. Следовательно, утверждения теоремы 1 для граничных условий (0.4) являются следствиями доказанных утверждений для граничных условий (0.3). Теорема доказана.

2. Нелинейное уравнение. Рассмотрим квазилинейное волновое уравнение

$$u_{tt} - u_{xx} = g(u) + f(x, t), \quad 0 < x < \pi, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2.1)$$

Обозначим $\Lambda = \{\mu_{nm} \mid n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}_+\}$, где $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Следствием теоремы 1 и теоремы 4.1 работы [8] является следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $g \in C^1(\mathbb{R})$ и

$$\alpha \leq \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{g(u)}{u} \leq \overline{\lim}_{u \rightarrow \infty} \frac{g(u)}{u} \leq \beta, \quad (2.2)$$

где $[\alpha, \beta] \cap \Lambda = \emptyset$. Тогда при нечетном b для любой T -периодической по t функции $f \in C^1(\Omega)$ задачи (2.1), (0.2), (0.3) и (2.1), (0.2), (0.4) имеют решение $u \in H_2(\Omega) \cap C^1(\Omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существование обобщенного решения $u \in C(\Omega)$ получено в теореме 4.1 работы [8]. Представим это решение в виде $u = u_1 + u_2$, где $u_1 \in R(A)$, $u_2 \in N(A)$. Тогда $u_1 = A^{-1}(g(u) + f)$. Поскольку $g(u) + f \in C(\Omega)$, из теоремы 1 при $k = 0$ вытекает включение $u_1 \in H_1(\Omega)$. Отсюда и из конечномерности $N(A)$ следует, что $u \in H_1(\Omega) \cap C(\Omega)$. Из этого включения, теоремы Мозера и теоремы 1 получим $u \in H_2(\Omega) \cap C^1(\Omega)$. Теорема доказана.

Рассмотрим задачу о свободных колебаниях струны.

$$u_{tt} - u_{xx} = g(u), \quad 0 < x < \pi, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2.3)$$

Следствием теоремы 1 и работы [7] являются теоремы 3, 4.

ТЕОРЕМА 3. Пусть функция $g \in C^1(\mathbb{R})$, удовлетворяет (2.2) и следующим условиям: $g(0) = 0$,

$$\alpha_1 \leq \lim_{u \rightarrow 0} \frac{g(u)}{u} \leq \overline{\lim}_{u \rightarrow 0} \frac{g(u)}{u} \leq \beta_1, \quad (2.4)$$

где $\alpha_1 > \beta$, $[\alpha, \beta] \cap \Lambda = \emptyset$, $[\alpha_1, \beta_1] \cap \Lambda = \emptyset$, $[\beta, \alpha_1] \cap \Lambda \neq \emptyset$. Пусть также $g(u)/u \leq \lambda$ для всех $u \in \mathbb{R}/\{0\}$, где $\lambda \in \Lambda$, $\lambda > \beta_1$, $(\beta_1, \lambda) \cap \Lambda = \emptyset$. Тогда при нечетном b задачи (2.3), (0.2), (0.3) и (2.3), (0.2), (0.4) имеют нетривиальные (не равные тождественно нулю) решения $u \in H_2(\Omega) \cap C^1(\Omega)$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть функция $g \in C^1(\mathbb{R})$, $g(0) = 0$ и выполнены условия (2.2), (2.4), где $\alpha > \beta_1$, $[\alpha, \beta] \cap \Lambda = \emptyset$, $[\alpha_1, \beta_1] \cap \Lambda = \emptyset$, $[\beta_1, \alpha] \cap \Lambda \neq \emptyset$. Пусть также $g(u)/u \geq \lambda$ для всех $u \in \mathbb{R}/\{0\}$, где $\lambda \in \Lambda$, $\lambda < \alpha_1$, $(\lambda, \alpha_1) \cap \Lambda = \emptyset$. Тогда при нечетном b задачи (2.3), (0.2), (0.3) и (2.3), (0.2), (0.4) имеют нетривиальные решения $u \in H_2(\Omega) \cap C^1(\Omega)$.

В качестве приложения теоремы 4 рассмотрим уравнение sin-Гордон (см. [13]):

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2.5)$$

Заметим, что из работы [16] следует существование нетривиального, гладкого $T = 5\pi/3$ -периодического по времени решения уравнения (2.5) с граничными условиями Дирихле $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$, которое зависит от времени.

Будем искать 2π -периодическое решение, удовлетворяющее граничным условиям (0.3) или (0.4). В этом случае

$$\Lambda = \left\{ \left(n - \frac{1}{2} \right)^2 - m^2 + \alpha_n \mid n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}_+ \right\}, \quad \text{где } \alpha_n = (2n - 1)\theta_n + \theta_n^2.$$

ТЕОРЕМА 5. Если $T = 2\pi$ и

$$-1 \notin \Lambda, \quad (2.6)$$

то задачи (2.5), (0.2), (0.3) и (2.5), (0.2), (0.4) имеют нетривиальное решение $u \in H_2(\Omega) \cap C^1(\Omega)$, которое зависит от времени.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим вначале, что если $T = 2\pi$, то $\ker A = \{0\}$. Действительно, равенство $\mu_{nm} = 0$ равносильно уравнению $2\theta_n = 2m - 2n + 1$, которое не имеет решения, поскольку $2\theta_n < 1$ (см. [7]). Обозначим $z_{nm} = (n - 1/2)^2 - m^2$. Тогда

$$\{z_{nm} \mid n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}_+\} = \left\{ l + \frac{1}{4} \mid l \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Используя введенные обозначения, запишем соотношение

$$\mu_{nm} = z_{nm} + \alpha_n. \quad (2.7)$$

Поскольку $\alpha_1 = \theta_1 + \theta_1^2 < 3/4$, из (2.7) следует, что $\mu_{11} \in (-3/4, 0)$. Отсюда и из (2.6), (2.7) вытекает выполнение условий теоремы 4. Из теоремы 4 следует существование нетривиального решения $u \in H_2(\Omega) \cap C^1(\Omega)$ задач (2.5), (0.2), (0.3) и (2.5), (0.2), (0.4). Докажем, что это решение зависит от времени.

Предположим противное, т.е. функция $u = u(x) \in H_2(0, \pi) \cap C^1[0, \pi]$ является нетривиальным решением задачи

$$-u_{xx} + \sin u = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad (2.8)$$

$$u(0) = u(\pi) + hu'(\pi) = 0. \quad (2.9)$$

Умножив равенство (2.8) на u_x , выводим

$$u_x^2 = 2(C - \cos u). \quad (2.10)$$

Если $C < 1$, то подставив $x = 0$ в равенство (2.10), придем к противоречию: $u_x^2(0) = 2(C - 1) < 0$. При $C = 1$ уравнение (2.10) примет вид $u_x = \pm 2 \sin(u/2)$. Рассмотрим случай

$$u_x = 2 \sin \frac{u}{2}. \quad (2.11)$$

Проинтегрировав уравнение (2.11), получим частное решение $u \equiv 0$ и нетривиальное решение $\operatorname{tg}(u/4) = Ce^{2x}$, $C \neq 0$. Подставив сюда $x = 0$, с учетом (2.9) придем к противоречию. Уравнение $u_x = -2 \sin(u/2)$ рассматривается аналогично.

Если $C > 1$, то из (2.10) следует, что $u_x \neq 0$. Если $u_x > 0$ при всех x , то функция $u(x)$ возрастает и из (2.9) вытекает, что $u(\pi) > 0$. Поэтому $u(\pi) + hu'(\pi) > 0$, что противоречит (2.9). Если $u_x < 0$ при всех x , то аналогично доказывается, что $u(\pi) + hu'(\pi) < 0$, что также противоречит (2.9). Таким образом, задача (2.8), (2.9) имеет только тривиальное решение в классе $C^1[0, \pi]$.

В заключение заметим, что если функция $u = u(x) \in H_2(0, \pi) \cap C^1[0, \pi]$ является решением уравнения (2.8) с граничными условиями

$$u(0) - hu'(0) = u(\pi) = 0, \quad (2.12)$$

то функция $\bar{u} = u(\pi - x)$ является решением задачи (2.8), (2.9). Поэтому задача (2.8), (2.12) имеет также только тривиальное решение. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Условие (2.6) выполнено, например, при

$$h > \frac{8}{\pi}. \quad (2.13)$$

Действительно, согласно [7] имеем

$$\alpha_n \leq (2n - 1)\theta_n + \frac{1}{4} \leq \left(2 - \frac{1}{n}\right) \frac{2}{\pi h} + \frac{1}{4}.$$

Следовательно, $0 < \alpha_n < 4/(\pi h) + 1/4$. Отсюда и из (2.7), (2.13) следует $0 < \alpha_n < 3/4$, $\mu_{nm} \neq -1$.

Условие (2.6) выполнено также, если

$$h > \frac{8}{3\pi}, \quad \theta_2 \neq \sqrt{3} - 1, 5. \quad (2.14)$$

Действительно, в этом случае $\alpha_n < 1,75$ и, следовательно, $\mu_{nm} \neq -1$ при $n > 2$. При $n = 2$ имеем $\mu_{22} = -1,75 + 3\theta_2 + \theta_2^2 \neq -1$, если выполнено (2.14). Для остальных значений n, m также, очевидно, выполнено условие $\mu_{nm} \neq -1$.

3. Граничные условия 3-го рода с отрицательным h . Рассмотрим задачу Штурма–Лиувилля

$$\varphi'' + \lambda^2 \varphi = 0, \quad \varphi(0) = \varphi(\pi) + h\varphi'(\pi) = 0. \quad (3.1)$$

Пусть $h \in (-\infty, -\pi)$. Предположим $\lambda = -\mu^2 < 0$, где $\mu > 0$. Тогда $\varphi = C_1 e^{\mu x} + C_2 e^{-\mu x}$. Учитывая граничные условия, получим

$$\varphi = e^{\mu x} - e^{-\mu x}, \quad (3.2)$$

где μ удовлетворяет уравнению

$$\frac{2k}{e^{2\mu\pi} + 1} + \mu - k = 0, \quad (3.3)$$

а $k = -1/h < 1/\pi$. Обозначим $f(\mu) = 2k/(e^{2\mu\pi} + 1) + \mu - k$. Вычислим производную $f'(\mu) = (e^{4\mu\pi} - 2(2k\pi - 1)e^{2\mu\pi} + 1)^2/(e^{2\mu\pi} + 1)$. Рассмотрим квадратный трехчлен $g(t) = t^2 - 2(2k\pi - 1)t + 1$. При $h < -\pi$ его дискриминант $D_1 = 4k\pi(k\pi - 1) < 0$. Поэтому $f'(\mu) > 0$ при всех μ . А поскольку $f(0) = 0$, при $\mu > 0$ уравнение (3.2) решений не имеет. При $\lambda = 0$ уравнение имеет решение $\varphi = C_1 x + C_2$ и при $h < -\pi$ граничные условия не выполняются.

Таким образом, при $h < -\pi$ задача Штурма–Лиувилля (3.1) может иметь только положительные собственные значения $\lambda_n = \mu_n^2$. Легко видеть, что соответствующие собственные функции имеют вид

$$\varphi_n(x) = \sin \mu_n x, \quad (3.4)$$

где $\mu_n > 0$ и являются корнями уравнения

$$\operatorname{tg} \mu\pi = -h\mu. \quad (3.5)$$

Представим числа μ_n в виде

$$\mu_n = n - \frac{1}{2} - \theta_n, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3.6)$$

Легко видеть, что $\theta_n \in (0, 1/2)$. Подставив выражение (3.6) в (3.5), получим соотношение

$$\theta_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{k}{\pi} \cdot \frac{\theta_n \pi}{\operatorname{tg} \theta_n \pi} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2n} - \frac{\theta_n}{n}}. \quad (3.7)$$

Поскольку функция $t/\operatorname{tg} t$ при $t \in (0, \pi/2)$ убывает и принимает значения из интервала $(0, 1)$, из (3.7) получим оценку

$$0 < b_0 \frac{1}{n} < \theta_n < b_1 \frac{1}{n} \quad (3.8)$$

для всех $n \in \mathbb{N}$, где $b_0 = \theta_1/(\pi \operatorname{tg} \theta_1 \pi)$, $b_1 = 2/(\pi^2(1 - 2\theta_1))$.

При $h = -\pi$ есть нулевое собственное значение $\lambda_1 = 0$, соответствующее собственной функции $\varphi_1(x) = -x$. Если $\lambda = -\mu^2 < 0$, то собственная функция должна иметь вид (3.2), где μ удовлетворяет уравнению (3.3). При $h = -\pi$ производная $f'(\mu) = (e^{2\mu\pi} - 1)^2/(e^{2\mu\pi} + 1)^2 > 0$, если $\mu > 0$. А так как $f(0) = 0$, отрицательных собственных значений нет.

Как в предыдущем случае собственные функции с положительными собственными значениями имеют вид (3.4), где μ_n выражается формулой (3.6), θ_n удовлетворяет оценке (3.8), в которой $b_0 = \theta_1 k / (\operatorname{tg} \theta_1 \pi)$, $b_1 = 2k / (\pi(1 - 2\theta_1))$.

Докажем, что при $h \in (-\pi, 0)$ имеется ровно одно отрицательное собственное значение, а остальные собственные значения положительные. В этом случае, очевидно, нуль не является собственным значением.

Рассмотрим случай $\lambda = -\mu^2$. Соответствующая собственная функция выражается формулой (3.2), а μ удовлетворяет равенству (3.3). Поскольку $h \in (-\pi, 0)$, то $D_1 > 0$. Поэтому квадратный трехчлен g имеет различные корни t_1, t_2 . Из теоремы Виета делаем вывод $0 < t_1 < 1 < t_2$. Обозначим $\mu_0 = 1/(2\pi) \ln t_2 > 0$. Тогда $f'(\mu) = (e^{2\mu\pi} - 1)(e^{2\mu\pi} - e^{2\mu_0\pi}) / (e^{2\mu\pi} + 1)^2 > 0$, если $\mu > 0$. Таким образом, $f'(\mu) < 0$ при $\mu \in (0, \mu_0)$, $f'(\mu) > 0$ при $\mu > \mu_0$. А поскольку $f(0) = 0$, $f(k) > 0$, при $\mu > 0$ уравнение (3.3) имеет единственный корень $\mu_* \in (\mu_0, k)$. Следовательно, единственное отрицательное собственное значение $\lambda_1 = -\mu_*^2$, а соответствующая ему собственная функция $\varphi_1 = e^{\mu_* x} - e^{-\mu_* x}$.

4. Собственные значения волнового оператора. Собственные функции оператора Даламбера $\partial_{tt} - \partial_{xx}$, действующего на бесконечно гладких функциях, удовлетворяющих условиям (0.2), (0.3), имеют вид

$$\mu_{nm} = \lambda_n - \left(\frac{a}{b} m \right)^2, \quad (4.1)$$

где $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}_+$. Соответствующие им собственные функции выражаются формулами

$$e_{nm}^c = C_{nm} \varphi_n(x) \cos \frac{a}{b} mt, \quad e_{nm}^s = C_{nm} \varphi_n(x) \sin \frac{a}{b} mt, \quad e_{n0} = C_{n0} \varphi_n(x), \quad n, m \in \mathbb{N}.$$

Нормирующие множители C_{nm} подобраны так, что система функций $e_{nm}^c, e_{nm}^s, e_{n0}$ является ортонормированной в $L_2(\Omega)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Очевидно, что собственные значения задачи Штурма–Лиувилля (1.2) совпадают с собственными значениями задачи (3.1), а соответствующие им собственные функции равны $\varphi_n(\pi - x)$.

Рассмотрим самосопряженное расширение A оператора Даламбера такое, что $A = A_0^*$, где

$$D(A_0) = \left\{ \sum_{n=1}^N (c_n e_{n0} + \sum_{m=1}^M (a_{nm} e_{nm}^c + b_{nm} e_{nm}^s)) \mid N, M \in \mathbb{N}, c_n, a_{nm}, b_{nm} \in \mathbb{R} \right\}$$

и $A_0 u = u_{tt} - u_{xx}$ для всех $u \in D(A_0)$.

Заметим, что при $h \in [-\pi, 0)$ и $n = 1$ уравнение $\mu_{nm} = 0$ не имеет решения. В остальных случаях это уравнение равносильно соотношению $2bn - 2am - b = 2b\theta_n$. Из (3.8) следует, что данное уравнение имеет конечное число пар решений (n, m) . Поэтому $\dim \ker A < \infty$. При $b = 1$, очевидно, $\ker A = \{0\}$. Из (3.6), (4.1) выразим

$$\mu_{nm} = \left(n - \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{a}{b} m \right)^2 - \alpha_n, \quad (4.2)$$

где $\alpha_n = (2n - 1)\theta_n - \theta_n^2$. Из неравенств (3.8) вытекает включение

$$\alpha_n \in (c_0, 2b_1), \quad (4.3)$$

где $c_0 = \min(b_0, (1/2)\theta_1)$. Заметим, что из (3.7) следует $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = -2/(h\pi)$.

Рассмотрим уравнение

$$\left(n - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{a}{b}m\right)^2 = 0 \quad (4.4)$$

относительно $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}_+$. При нечетных b оно не выполняется ни при каких целых числах n , m . Если b четное число, то уравнение (4.4) имеет бесконечно много решений $n = al - (a - 1)/2$, $m = b/2(2l - 1)$, $l \in \mathbb{N}$.

При $h \in (-\pi, 0)$ для любой функции $f \in R(A)$

$$A^{-1}f = u_1 + u_2 + u_3, \quad (4.5)$$

где

$$\begin{aligned} u_1 &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^2} f_n \varphi_n(x) - \frac{1}{\mu_*^2} f_1 \varphi_1(x), \\ u_2 &= -\varphi_1(x) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_*^2 + (a^2/b^2)m^2} \left(a_{1m} \cos \frac{a}{b} mt + b_{1m} \sin \frac{a}{b} mt \right), \\ u_3 &= \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_{nm}} \varphi_n(x) \left(a_{nm} \cos \frac{a}{b} mt + b_{nm} \sin \frac{a}{b} mt \right), \end{aligned} \quad (4.6)$$

$\{f_n, a_{nm}, b_{nm}\}_{n,m \in \mathbb{N}}$ – коэффициенты Фурье функции f . Легко видеть, что $u_1, u_2 \in H_2(\Omega) \cap C^1(\Omega)$. Поэтому при $h \in (-\pi, 0)$ справедливо утверждение теоремы 1.

При $h = -\pi$ для функции $f \in R(A)$ прообраз $A^{-1}f$ выражается формулой (4.5), в которой

$$u_1 = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^2} f_n \varphi_n(x), \quad u_2 = -\frac{b^2}{a^2} x \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \left(a_{1m} \cos \frac{a}{b} mt + b_{1m} \sin \frac{a}{b} mt \right),$$

u_3 выражается формулой (4.6).

При $h < -\pi$ для любой функции $f \in R(A)$ имеем

$$A^{-1}f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^2} f_n \varphi_n(x) + \sum_{\mu_{nm} \neq 0} \frac{1}{\mu_{nm}} \varphi_n(x) \left(a_{nm} \cos \frac{a}{b} mt + b_{nm} \sin \frac{a}{b} mt \right).$$

Следовательно, при $h \leq -\pi$ также справедливо утверждение теоремы 1.

При $h < 0$ и нечетном b стандартно доказывается, что $\sum_{\mu \neq 0} 1/(\mu_{nm}^2) < \infty$. Поэтому оператор $A^{-1}: R(A) \rightarrow R(A)$ является вполне непрерывным. Более того, точно так же, как лемма 2.5 в [7] доказывается вполне непрерывность оператора $A^{-1}: R(A) \rightarrow C(\Omega)$.

5. Квазилинейное уравнение. Как и выше обозначим $\Lambda = \{\mu_{nm} \mid n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}_+\}$. Следствием теоремы 1 и теоремы 2 из [14] является следующая теорема.

ТЕОРЕМА 6. Пусть функция $g(u) \in C^1(\mathbb{R})$ и удовлетворяет условию (2.2), где $[\alpha, \beta] \cap \Lambda = \emptyset$. Тогда при нечетном b для любой T -периодической по t функции $f \in C^1(\Omega)$ задачи (0.1)–(0.3) и (0.1), (0.2), (0.4) имеют решение $u \in H_2(\Omega) \cap C^1(\Omega)$.

Обозначим $\Lambda_- = \{-\mu_{nm} \mid n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}_+\}$ и рассмотрим случай, когда b является четным числом. Опираясь на (4.3), не трудно проверить, что в этом случае для оператора $(-A)$ выполнено свойство II из работы [11], в котором

$$\Lambda_1 = \left\{ e_{nm}^c, e_{nm}^s \mid n = al - \frac{a-1}{2}, m = \frac{b}{2}(2l-1), l \in \mathbb{N} \right\}.$$

Пусть функция $g(u)$ непрерывна и удовлетворяет условию (2.2).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Обобщенным решением задач (0.1)–(0.3) и (0.1), (0.2), (0.4) называется T -периодическая по t функция $u \in L_2(\Omega)$ такая, что $(u, A_0\varphi) = (g(u) + f, \varphi)$ для всех $\varphi \in D(A_0)$.

Следствием теоремы 3.2 из [11] является следующая теорема.

ТЕОРЕМА 7. Пусть b есть четное число, функция $g(u)$ непрерывна и удовлетворяет условию (2.2), где $[\alpha, \beta] \cap \Lambda_- = \emptyset$. Если функция $g(u) + c_0 u$ не убывает, то для любой T -периодической по t функции $f \in L_2(\Omega)$ задачи (0.1)–(0.3) и (0.1), (0.2), (0.4) имеют обобщенное решение $u \in L_2(\Omega)$.

6. Волновое уравнение с переменными коэффициентами. Рассмотрим квазилинейное уравнение колебаний неоднородной струны

$$p(x)u_{tt} - (p(x)u_x)_x = g(x, t, u) + f(x, t), \quad 0 < x < \pi, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (6.1)$$

с граничными условиями (0.3) или (0.4), в которых $h > 0$. T -периодическое решение ($T = 2\pi a/b$, $a, b \in \mathbb{N}$, $(a, b) = 1$) задач (6.1), (0.2), (0.3) или (6.1), (0.2), (0.4) будем искать в виде ряда Фурье по системе

$$S = \left\{ \varphi_n(x), \varphi_n(x) \cos \frac{a}{b} mt, \varphi_n(x) \sin \frac{a}{b} mt \right\}_{n,m \in \mathbb{N}},$$

где функции $\varphi_n(x)$ являются решением одной из задач Штурма–Лиувилля

$$-(p(x)\varphi'(x))' = p(x)\lambda\varphi(x), \quad \varphi(0) = \varphi(\pi) + h\varphi'(\pi) = 0, \quad (6.2)$$

$$-(p(x)\varphi'(x))' = p(x)\lambda\varphi(x), \quad \varphi(0) - h\varphi'(0) = \varphi(\pi) = 0. \quad (6.3)$$

Функция $p(x)$ удовлетворяет следующим условиям (см. [15]):

$$p \in C^3[0, \pi], \quad p(x) \geq d > 0 \quad \text{для любого } x \in [0, \pi], \quad (6.4)$$

$$\min_{[0, \pi]} \eta_p(x) > 0, \quad (6.5)$$

где $\eta_p(x) = (1/2)(p''/p) - (1/4)(p'/p)^2$. В работе [11] на функцию $p(x)$ накладывается еще одно условие в граничной точке отрезка $[0, \pi]$. Если исследуется граничное условие (0.4), то требуется, чтобы

$$\frac{p'(0)}{p(0)} > -\frac{2}{h}. \quad (6.6)$$

А если рассматривается граничное условие (0.3), то требуется, чтобы

$$\frac{p'(\pi)}{p(\pi)} < \frac{2}{h}. \quad (6.7)$$

Рассуждения, проведенные нами в пункте 4, позволяют рассмотреть случаи, когда в условиях (6.5)–(6.7) стоят противоположные неравенства.

Замена неизвестной функции

$$z(x) = \sqrt{p(x)}\varphi(x) \quad (6.8)$$

приводит задачи Штурма–Лиувилля (6.2), (6.3) соответственно к следующим задачам:

$$\begin{aligned} z'' + (\lambda - \eta_p(x))z &= 0, & z(0) &= z(\pi) + h_1 z'(\pi) = 0, \\ z'' + (\lambda - \eta_p(x))z &= 0, & z(0) - h_2 z'(0) &= z(\pi) = 0. \end{aligned}$$

Здесь

$$h_1 = \frac{2p(\pi)h}{2p(\pi) - hp'(\pi)}, \quad h_2 = \frac{2p(0)h}{2p(0) + hp'(0)}.$$

Рассмотрим задачу (6.2) с функцией $p(x)$, удовлетворяющей условию (6.4). Простые рассуждения показывают, что при

$$\frac{p'(\pi)}{p(\pi)} = \frac{2}{h} \quad (6.9)$$

замена переменной (6.8) приводит к задаче

$$z'' + (\lambda - \eta_p(x))z = 0, \quad z(0) = z'(\pi) = 0;$$

при $p'(\pi)/p(\pi) \in (2/h, 2(1/h + 1/\pi))$ выполнено неравенство $h_1 < -\pi$; при $p'(\pi)/p(\pi) = 2(1/h + 1/\pi)$ получим равенство $h_1 = -\pi$; а при $p'(\pi)/p(\pi) > 2(1/h + 1/\pi)$ имеем включение $h_1 \in (-\pi, 0)$.

Обозначим $\eta_1 = \min_{[0,\pi]} \eta_p(x)$, $\eta_2 = \max_{[0,\pi]} \eta_p(x)$. Пусть λ_n есть последовательность собственных значений задачи (6.2). Точно также, как в [11], с использованием теоремы Штурма о сравнении доказывается, что если $p(x)$ удовлетворяет условию (6.9) и $\eta_1 > 0$, то $\lambda_n = \mu_n^2$, где $\mu_n = n - 1/2 + \theta_n$ и

$$\frac{\eta_1}{\sqrt{1 + \eta_1} + 1} \frac{1}{n} \leq \theta_n \leq \frac{2\eta_2}{3} \frac{1}{n} \quad \text{для всех } n \in \mathbb{N};$$

если

$$\frac{p'(\pi)}{p(\pi)} > \frac{2}{h}, \quad (6.10)$$

$$\eta_2 < 0, \quad (6.11)$$

то существует $n_0 \in \mathbb{N}$ и положительные константы $b_0, b_1 \in \mathbb{R}$ такие, что

$$\lambda_n = \mu_n^2, \quad \mu_n = n - \frac{1}{2} - \theta_n > 0 \quad \text{для всех } n \geq n_0 \quad (6.12)$$

и при $n \geq n_0$ справедлива оценка (3.8).

Рассмотрим пространство $L_2(\Omega)$ со скалярным произведением

$$(f, g) = \int_{\Omega} p(x) f(x, t) g(x, t) dx dt, \quad f, g \in L_2(\Omega).$$

Функции системы S являются ортогональными в $L_2(\Omega)$. Определим оператор $A_0: L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$, для которого

$$D(A_0) = \left\{ u = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \varphi_n \left(a_{nm} \cos \frac{a}{b} mt + b_{nm} \sin \frac{a}{b} mt \right) \mid M, N \in \mathbb{N} \right\}$$

и $A_0\varphi = p\varphi_{tt} - (p\varphi_x)_x$ для всех $\varphi \in D(A_0)$. Пусть $\bar{A}_0\varphi = (1/p)A_0\varphi$ для любого $\varphi \in D(A_0)$. Обозначим $A = (\bar{A}_0)^*$ в $L_2(\Omega)$. Система функций S является системой собственных функций операторов $\bar{A}_0$ и A с собственными значениями μ_{nm} (см. [10]).

Пусть функция $g(x, t, u) \in C([0, \pi] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ и удовлетворяет неравенству

$$\alpha \leq \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{g(x, t, u)}{p(x)u} \leq \overline{\lim}_{u \rightarrow \infty} \frac{g(x, t, u)}{p(x)u} \leq \beta \quad (6.13)$$

равномерно по $(x, t) \in \Omega$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Обобщенным решением задач (6.1), (0.2), (0.3) и (6.1), (0.2), (0.4) называется T -периодическая по t функция $u \in C([0, \pi] \times \mathbb{R})$ такая, что

$$\int_{\Omega} u A_0 \varphi \, dx \, dt = \int_{\Omega} (g(x, t, u) + f) \varphi \, dx \, dt \quad \text{для всех } \varphi \in D(A_0).$$

Следствием теоремы 2 работы [14] является теорема 8.

ТЕОРЕМА 8. Пусть выполнены условия (6.4), функция $g(x, t, u) \in C([0, \pi] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ T -периодична по t и удовлетворяет (6.13), где $[\alpha, \beta] \cap \Lambda = \emptyset$. Предположим также, что либо верно равенство (6.9) и $\eta_1 > 0$, либо имеют место неравенства (6.10), (6.11). Тогда при нечетном b для любой T -периодической по t функции $f \in L_2(\Omega)$ задача (6.1), (0.2), (0.3) имеет обобщенное решение $u \in C(\Omega)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Н. Brézis, L. Nirenberg, “Forced vibration for a nonlinear wave equation”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **31**:1 (1978), 1–30.
- [2] P. H. Rabinowitz, “Free vibration for a semilinear wave equation”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **31**:1 (1978), 31–68.
- [3] П. И. Плотников, “Существование счетного множества периодических решений задачи о вынужденных колебаниях для слабо нелинейного волнового уравнения”, *Матем. сб.*, **136**:4 (1988), 546–560.
- [4] E. Feireisl, “On the existence of periodic solutions of a semilinear wave equation with a superlinear forcing term”, *Czechoslovak Math. J.*, **38**:1 (1988), 78–87.
- [5] И. А. Рудаков, “Нелинейные колебания струны”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1984, № 2, 9–13.
- [6] И. А. Рудаков, “Периодическое по времени решение уравнения вынужденных колебаний струны с однородными граничными условиями”, *Дифференц. уравнения*, **39**:11 (2003), 1550–1555.
- [7] И. А. Рудаков, “Нетривиальное периодическое решение нелинейного волнового уравнения с однородными граничными условиями”, *Дифференц. уравнения*, **41**:10 (2005), 1392–1399.
- [8] И. А. Рудаков, “Периодические решения нелинейного волнового уравнения с однородными граничными условиями”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **70**:1 (2006), 117–128.
- [9] И. А. Рудаков, “Периодические решения квазилинейного волнового уравнения с однородными граничными условиями”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **12**:5 (2006), 189–201.
- [10] И. А. Рудаков, “Периодические решения нелинейного волнового уравнения с непостоянными коэффициентами”, *Матем. заметки*, **76**:3 (2004), 427–438.
- [11] И. А. Рудаков, “Периодические решения квазилинейного волнового уравнения с переменными коэффициентами”, *Матем. сб.*, **198**:7 (2007), 91–108.

- [12] M. Berti, P. Bolle, “Multiplicity of periodic solutions of nonlinear wave equations”, *Nonlinear Anal.*, **56**:7 (2004), 1011–1046.
- [13] L. Nirenberg, “Variational and topological methods in nonlinear problems”, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, **4**:3 (1981), 267–302.
- [14] И. А. Рудаков, “Периодическое по времени решение нелинейного волнового уравнения с граничными условиями Неймана и Дирихле”, *Изв. вузов. Матем.*, 2007, № 2, 46–55.
- [15] V. Barbu, N. H. Pavel, “Periodic solutions to nonlinear one-dimensional wave equation with x -dependent coefficients”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **349**:5 (1997), 2035–2048.
- [16] И. А. Рудаков, “Задача о свободных периодических колебаниях струны с немонотонной нелинейностью”, *УМН*, **40**:1 (1985), 215–216.

В. А. Кондратьев

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило

26.11.2007

Исправленный вариант

17.03.2008

И. А. Рудаков

Брянский государственный университет им. академика

И. Г. Петровского

E-mail: rudakov_bgu@mail.ru