Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. А. Заторский, А. Р. Малярчук, Треугольные матрицы и комбинаторные формулы обращения, *Матем. заметки*, 2009, том 85, выпуск 1, 12–21

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm6585>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 15:47:34

Треугольные матрицы и комбинаторные формулы обращения

Р. А. Заторский, А. Р. Малярчук

Работа посвящена построению матрицы, обратной к бесконечной треугольной матрице, установлению коэффициентов связи полиномиальных последовательностей и общих комбинаторных формул обращения.

Библиография: 6 названий.

1. Треугольные матрицы и парадетерминанты.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 [1]. Треугольную таблицу чисел, принадлежащих полю K ,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}_n \quad (1)$$

назовем *треугольной матрицей*, а число n – ее *порядком*.

Обратим внимание на тот факт, что треугольная матрица в нашем понимании не является матрицей в обычном смысле этого термина, поскольку она является треугольной, но не прямоугольной таблицей чисел.

Каждому элементу a_{ij} матрицы (1) поставим в соответствие $(i - j + 1)$ элементов a_{ik} , $k = j, \dots, i$, которые назовем *производными элементами* матрицы, порожденными *ключевым элементом* a_{ij} .

Произведение всех производных элементов, порожденных элементом a_{ij} , обозначим через $\{a_{ij}\}$ и назовем *факториальным произведением* ключевого элемента a_{ij} , т.е.

$$\{a_{ij}\} = \prod_{k=j}^i a_{ik}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 [1]. Набор ключевых элементов матрицы (1) назовем *нормальным набором* этой матрицы, если они порождают *монотрансверсаль*, т.е. множество производных элементов мощности n , каждые два из которых не лежат в одном столбце этой матрицы.

Пусть $\mathbb{P}(n)$ – множество всех упорядоченных разбиений (композиций) (см. [2], [3; с. 67]) натурального числа n на натуральные слагаемые. Известно, что

$$|\mathbb{P}(n)| = \sum_{r=1}^n \binom{n-1}{r-1} = 2^{n-1}. \quad (2)$$

Легко видеть, что между нормальными наборами ключевых элементов матрицы (1) и упорядоченными разбиениями натурального числа n существует взаимно однозначное соответствие.

Каждому нормальному набору a ключевых элементов поставим в соответствие знак $(-1)^{\varepsilon(a)}$, где $\varepsilon(a)$ – сумма всех индексов ключевых элементов этого набора.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3 [1]. *Парадетерминантом* треугольной матрицы (1) назовем число

$$\text{ddet}(A) = \left\langle \begin{array}{cccc} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{array} \right\rangle = \sum_{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r) \in \mathbb{P}(n)} (-1)^{\varepsilon(a)} \prod_{s=1}^r \{a_{i(s), j(s)}\},$$

где $a_{i(s), j(s)}$ – ключевой элемент, соответствующий s -й компоненте разбиения $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r)$.

Каждому элементу a_{ij} треугольной матрицы (1) поставим в соответствие треугольную таблицу R_{ij} элементов этой матрицы, полученную вычеркиванием строк и столбцов, расположенных ниже и левее этого элемента, и назовем ее *углом* этой матрицы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4 [1]. Прямоугольную таблицу элементов треугольной матрицы (1) назовем *вписанной* в эту матрицу, если одна ее вершина совпадает с элементом a_{n1} , а противоположная к ней – с элементом a_{ii} , $i = 1, 2, \dots, n$. Обозначим эту таблицу через $T(i)$.

ПРИМЕЧАНИЕ 1. Если в определении 4 значение индекса i равно 1 или $i = n$, то прямоугольная таблица вырождается соответственно в первый столбец или последнюю строку.

При вычислении парадетерминанта удобно пользоваться *алгебраическими дополнениями*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5 [1]. *Алгебраическим дополнением* D_{ij} к факториальному произведению $\{a_{ij}\}$ ключевого элемента a_{ij} треугольной матрицы (1) назовем число

$$D_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \text{ddet}(R_{j-1,1}) \cdot \text{ddet}(R_{n,i+1}),$$

где $R_{j-1,1}$ и $R_{n,i+1}$ – углы этой матрицы.

Хотя определение парадетерминанта треугольной матрицы существенно отличается от классического понятия детерминанта, их свойства во многом аналогичны.

ТЕОРЕМА 1 (Разложение парадетерминанта по элементам вписанной прямоугольной таблицы, [1]). Пусть A – треугольная матрица (1) и $T(i)$ – некоторая вписанная прямоугольная таблица элементов этой матрицы. Тогда справедливо равенство

$$\text{ddet}(A) = \sum_{s=1}^i \sum_{r=i}^n \{a_{rs}\} \cdot D_{rs}, \quad (3)$$

где D_{rs} – алгебраическое дополнение к факториальному произведению ключевого элемента a_{rs} , который принадлежит вписанной прямоугольной таблице $T(i)$.

СЛЕДСТВИЕ 1 [1]. При $i = 1$ по формуле (3) и примечанию 1 получим разложение парадетерминанта по элементам первого столбца

$$\text{ddet}(A) = \sum_{r=1}^n (-1)^{r+1} \cdot \{a_{r1}\} \cdot \text{ddet}(R_{n,r+1}).$$

Если $i = n$, то получим разложение по элементам последней строки

$$\text{ddet}(A) = \sum_{s=1}^n (-1)^{n+s} \cdot \{a_{ns}\} \cdot \text{ddet}(R_{s-1,1}).$$

Более детальную информацию о треугольных матрицах и парадетерминантах можно найти в [1], [4].

2. Полиномиальные последовательности и треугольные матрицы. Обозначим через P множество всех вещественных многочленов одной переменной.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6 [5]. Полиномиальная последовательность – семейство $\{p_n(x) : n \in \mathbb{N}_0\}$ таких вещественных многочленов, что $\deg(p_n(x)) = n$ для всех n .

Так как многочлены полиномиальной последовательности имеют возрастающую степень, они образуют базис в линейном пространстве P . Полиномиальную последовательность $\{1, x, x^2, \dots\}$ назовем *стандартной*.

Иногда полиномиальную последовательность мы будем представлять в виде вектора-столбца

$$\begin{pmatrix} a_{00}x^0 \\ a_{10}x^0 + a_{11}x^1 \\ a_{20}x^0 + a_{21}x^1 + a_{22}x^2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{n,0}x^0 + a_{n,1}x^1 + \dots + a_{n,n}x^n \\ \dots\dots\dots \end{pmatrix}.$$

Тут согласно определению 6 имеют место неравенства $a_{ii} \neq 0$, $i = 0, 1, 2, \dots$.

Определим сумму двух полиномиальных последовательностей и умножение полиномиальной последовательности на любое действительное число аналогично операции суммы векторов и умножения вектора на число.

Две полиномиальные последовательности будем считать равными, если равны их соответствующие компоненты.

Пусть заданы две полиномиальные последовательности

$$f = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{00} \\ f_{10} + f_{11}x \\ f_{20} + f_{21}x + f_{22}x^2 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad (4)$$

$$g = \begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{00} \\ g_{10} + g_{11}x \\ g_{20} + g_{21}x + g_{22}x^2 \\ \vdots \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Тогда в силу неравенств $f_{ii} \neq 0$, $i = 0, 1, 2, \dots$, многочлен g_s единственным образом можно представить в виде линейной комбинации многочленов $f_0, f_1, \dots, f_s$.

Таким образом, треугольную матрицу вида

$$\begin{pmatrix} a_{00} & & & \\ a_{10} & a_{11} & & \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (6)$$

можно, например, интерпретировать как линейное преобразование A , которое полиномиальной последовательности f ставит в соответствие полиномиальную последовательность g :

$$\begin{cases} g_0 = a_{00}f_0, \\ g_1 = a_{10}f_0 + a_{11}f_1, \\ g_2 = a_{20}f_0 + a_{21}f_1 + a_{22}f_2, \\ \dots \end{cases} \quad (7)$$

Определим матричный вид системы уравнений (7) следующим образом:

$$\begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \\ \vdots \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} a_{00} & & & \\ a_{10} & a_{11} & & \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

ПРИМЕЧАНИЕ 2. Если полиномиальную последовательность рассматривать как некоторый бесконечномерный вектор, то линейное преобразование (7) становится частным случаем общего линейного преобразования бесконечномерного векторного пространства. Поэтому справедливо равенство $(AB)C = A(BC)$ и неравенство $AB \neq BA$.

Очевидно, что выполняется также равенство

$$AE = EA,$$

где E – единичная треугольная матрица.

Наконец отметим, что произведение двух треугольных матриц с ненулевыми диагональными элементами дает треугольную матрицу с ненулевыми диагональными элементами.

Найдем обратную треугольную матрицу A^{-1} к треугольной матрице A . С этой целью решим систему уравнений (7) относительно системы неизвестных $(f_0, f_1, f_2, \dots)$. Покажем, что решением этой системы уравнений является

$$f_i = \sum_{j=0}^i \frac{(-1)^{i+j}}{a_{jj}} \cdot \left\langle \frac{a_{r+j+1, s+j}}{a_{r+j+1, s+j+1}} \right\rangle_{0 \leq s \leq r \leq i-j-1} \cdot g_j, \quad i = 0, 1, \dots$$

При $i = 0$ система уравнений (7) имеет решение

$$f_0 = \sum_{j=0}^0 \frac{(-1)^{0+j}}{a_{00}} \cdot \left\langle \frac{a_{r+j+1, s+j}}{a_{r+j+1, s+j+1}} \right\rangle_{0 \leq s \leq r \leq -j-1} \cdot g_j = \frac{1}{a_{00}} \cdot g_0;$$

тут мы считаем, что

$$\left\langle \frac{a_{r+j+1, s+j}}{a_{r+j+1, s+j+1}} \right\rangle_{0 \leq s \leq r \leq -1} = 1.$$

Предположим, что система уравнений (7) при $i = k - 1$ имеет решение

$$f_{k-1} = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-1)^{k-1+j}}{a_{jj}} \cdot \left\langle \frac{a_{r+j+1, s+j}}{a_{r+j+1, s+j+1}} \right\rangle_{0 \leq s \leq r \leq k-j-2} \cdot g_j, \quad (8)$$

и докажем, что при этом

$$f_k = \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^{k+j}}{a_{jj}} \cdot \left\langle \frac{a_{r+j+1, s+j}}{a_{r+j+1, s+j+1}} \right\rangle_{0 \leq s \leq r \leq k-j-1} \cdot g_j.$$

Найдем из последнего уравнения системы (7) при $i = k$ многочлен f_k :

$$f_k = - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{a_{ki}}{a_{kk}} f_i + \frac{1}{a_{kk}} g_k.$$

Возьмем в последнем равенстве вместо многочленов f_i , $i = 0, 1, \dots, k-1$, их известные значения (8):

$$f_k = - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{a_{ki}}{a_{kk}} \sum_{j=0}^i \frac{(-1)^{i+j}}{a_{jj}} \cdot \left\langle \frac{a_{r+j+1, s+j}}{a_{r+j+1, s+j+1}} \right\rangle_{0 \leq s \leq r \leq i-j-1} \cdot g_j + \frac{1}{a_{kk}} g_k.$$

Поменяем порядок суммирования:

$$f_k = \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^{k+j} \frac{1}{a_{jj}} \left(\sum_{i=j}^{k-1} (-1)^{i-k+1} \frac{a_{ki}}{a_{kk}} \cdot \left\langle \frac{a_{r+j+1, s+j}}{a_{r+j+1, s+j+1}} \right\rangle_{0 \leq s \leq r \leq i-j-1} \right) \cdot g_j + \frac{1}{a_{kk}} g_k.$$

Но выражение в скобках в последнем равенстве является разложением парадетерминанта

$$\left\langle \frac{a_{r+j+1, s+j}}{a_{r+j+1, s+j+1}} \right\rangle_{0 \leq s \leq r \leq k-j-1}$$

по элементам последней строки, поэтому имеем

$$\begin{aligned} f_k &= \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^{k+j} \frac{1}{a_{jj}} \cdot \left\langle \frac{a_{r+j+1,s+j}}{a_{r+j+1,s+j+1}} \right\rangle_{0 \leq s \leq r \leq k-j-1} \cdot g_j + \frac{1}{a_{kk}} g_k \\ &= \sum_{j=0}^k (-1)^{k+j} \frac{1}{a_{jj}} \cdot \left\langle \frac{a_{r+j+1,s+j}}{a_{r+j+1,s+j+1}} \right\rangle_{0 \leq s \leq r \leq k-j-1} \cdot g_j. \end{aligned}$$

Таким образом, нами доказана следующая

ТЕОРЕМА 2. *Обратной треугольной матрицей к матрице (6) является треугольная матрица*

$$(b_{ij})_{0 \leq j \leq i < \infty} = \left(\frac{(-1)^{i+j}}{a_{jj}} \cdot \left\langle \frac{a_{r+j+1,s+j}}{a_{r+j+1,s+j+1}} \right\rangle_{0 \leq s \leq r \leq i-j-1} \right)_{0 \leq j \leq i < \infty}.$$

Следует отметить, что парадетерминант

$$\left\langle \frac{a_{r+j+1,s+j}}{a_{r+j+1,s+j+1}} \right\rangle_{0 \leq s \leq r \leq i-j-1}$$

определен даже в тех случаях, когда знаменатель выражения $a_{r+j+1,s+j}/a_{r+j+1,s+j+1}$ обращается в нуль, ибо при нахождении значения парадетерминанта нули сокращаются и неопределенности исчезают.

3. Коэффициенты связи полиномиальных последовательностей. В [5; с. 124] отмечается, что задача определения коэффициентов связи для произвольных полиномиальных последовательностей представляет значительные трудности и выделяется класс так называемых биномиальных последовательностей, для которых эта задача поддается разрешению.

Определим коэффициенты связи для произвольных полиномиальных последовательностей.

Найдем матрицу линейного преобразования полиномиальной последовательности f , задающейся равенством (4), в полиномиальную последовательность g , которая определена равенством (5). С этой целью найдем матрицу A из матричного равенства

$$\begin{pmatrix} a_{00} & & & \\ a_{10} & a_{11} & & \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_{00} & & & \\ f_{10} & f_{11} & & \\ f_{20} & f_{21} & f_{22} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{00} & & & \\ g_{10} & g_{11} & & \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

или

$$AF(X) = G(X),$$

где (X) обозначает стандартную полиномиальную последовательность.

Из последнего равенства очевидно следуют равенства

$$AF = G \quad \text{и} \quad A = GF^{-1}.$$

Умножая матрицы G и F^{-1} , получим

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \sum_{k=j}^i g_{ik} \cdot \left(\frac{(-1)^{k+j}}{f_{jj}} \cdot \left\langle \frac{f_{r+j+1,s+j}}{f_{r+j+1,s+j+1}} \right\rangle_{0 \leq s \leq r \leq k-j-1} \right) \\ &= \frac{(-1)^{i+j}}{f_{jj}} \sum_{k=j}^i (-1)^{i-k} g_{ik} \cdot \left\langle \frac{f_{r+j+1,s+j}}{f_{r+j+1,s+j+1}} \right\rangle_{0 \leq s \leq r \leq k-j-1}. \end{aligned} \quad (9)$$

Но сумма в правой части равенства (9) является разложением парадетерминанта по элементам последней строки

$$\left\langle \begin{array}{cccc} \frac{f_{j+1,j}}{f_{j+1,j+1}} & & & \\ \frac{f_{j+2,j}}{f_{j+2,j+1}} & \frac{f_{j+2,j+1}}{f_{j+2,j+2}} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \frac{f_{i,j}}{f_{i,j+1}} & \frac{f_{i,j+1}}{f_{i,j+2}} & \dots & \frac{f_{i,i-1}}{f_{i,i}} \\ \frac{g_{i,j}}{g_{i,j+1}} & \frac{g_{i,j+1}}{g_{i,j+2}} & \dots & \frac{g_{i,i-1}}{g_{i,i}} \end{array} \right\rangle_{i-j+1} ;$$

следовательно, нами доказана следующая

ТЕОРЕМА 3. *Элементы матрицы линейного преобразования полиномиальной последовательности $f = F(X)$, которая задается равенством (4), в полиномиальную последовательность $g = G(X)$, задающуюся равенством (5), равны*

$$a_{ij} = \frac{(-1)^{i+j}}{f_{jj}} \cdot \left\langle \begin{array}{cccc} \frac{f_{j+1,j}}{f_{j+1,j+1}} & & & \\ \frac{f_{j+2,j}}{f_{j+2,j+1}} & \frac{f_{j+2,j+1}}{f_{j+2,j+2}} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \frac{f_{i,j}}{f_{i,j+1}} & \frac{f_{i,j+1}}{f_{i,j+2}} & \dots & \frac{f_{i,i-1}}{f_{i,i}} \\ \frac{g_{i,j}}{g_{i,j+1}} & \frac{g_{i,j+1}}{g_{i,j+2}} & \dots & \frac{g_{i,i-1}}{g_{i,i}} \end{array} \right\rangle_{i-j+1},$$

$$0 \leq j \leq i < \infty.$$

4. Формулы обращения. В [6; с. 7–8] Риордан отмечает, что “... число различных пар взаимно обратных соотношений пока невелико, а возможности для дальнейшего увеличения их числа определить трудно”.

Теперь в нашем распоряжении есть все необходимые сведения для того, чтобы доказать следующую, важную для комбинаторного анализа теорему.

ТЕОРЕМА 4 (теорема об обращении). *Пусть заданы две треугольные матрицы*

$$F = \begin{pmatrix} f_{00} & & & \\ f_{10} & f_{11} & & \\ f_{20} & f_{21} & f_{22} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad u \quad G = \begin{pmatrix} g_{00} & & & \\ g_{10} & g_{11} & & \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

с ненулевыми диагональными элементами. Тогда справедливо обращение

$$g_n = \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^{n+i}}{f_{ii}} \cdot \left\langle \begin{array}{ccc} \frac{f_{i+1,i}}{f_{i+1,i+1}} & & \\ \frac{f_{i+2,i}}{f_{i+2,i+1}} & \frac{f_{i+2,i+1}}{f_{i+2,i+2}} & \\ \vdots & \dots & \ddots \\ \frac{f_{n,i}}{f_{n,i+1}} & \frac{f_{n,i+1}}{f_{n,i+2}} & \dots & \frac{f_{n,n-1}}{f_{n,n}} \\ \frac{g_{n,i}}{g_{n,i+1}} & \frac{g_{n,i+1}}{g_{n,i+2}} & \dots & \frac{g_{n,n-1}}{g_{n,n}} \end{array} \right\rangle_{n-i+1} \cdot f_i$$

$$\Leftrightarrow f_n = \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^{n+i}}{g_{ii}} \cdot \left\langle \begin{array}{ccc} \frac{g_{i+1,i}}{g_{i+1,i+1}} & & \\ \frac{g_{i+2,i}}{g_{i+2,i+1}} & \frac{g_{i+2,i+1}}{g_{i+2,i+2}} & \\ \vdots & \dots & \ddots \\ \frac{g_{n,i}}{g_{n,i+1}} & \frac{g_{n,i+1}}{g_{n,i+2}} & \dots & \frac{g_{n,n-1}}{g_{n,n}} \\ \frac{f_{n,i}}{f_{n,i+1}} & \frac{f_{n,i+1}}{f_{n,i+2}} & \dots & \frac{f_{n,n-1}}{f_{n,n}} \end{array} \right\rangle_{n-i+1} \cdot g_i, \quad (10)$$

для $n \in \mathbb{N}_0$, где $f_i, g_i, i = 0, 1, \dots, n$, – произвольные действительные числа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Треугольные матрицы GF^{-1} и FG^{-1} в равенствах $G(X) = GF^{-1}F(X)$ и $F(X) = FG^{-1}G(X)$ можно найти при помощи теоремы 3; поэтому сравнивая в этих матричных равенствах последние компоненты, получим обращение (10). Остается отметить, что поскольку матрицы GF^{-1} и FG^{-1} взаимно обратны, это обращение не нарушится, если вместо многочленов $f_i, g_i, i = 0, 1, \dots, n$, положить соответственно любые действительные числа.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $F = E = (\delta_{ij})_{0 \leq j \leq i < \infty}$ и

$$G = \begin{pmatrix} g_{00} & & & \\ g_{10} & g_{11} & & \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Тогда справедливо обращение

$$g_n = \sum_{i=0}^n g_{n,i} f_i \quad \Leftrightarrow \quad f_n = \sum_{s=0}^n \frac{(-1)^{n-s}}{g_{s,s}} \operatorname{ddet} \left(\frac{g_{s+i,s+j-1}}{g_{s+i,s+j}} \right)_{1 \leq j \leq i \leq n-s} \cdot g_s. \quad (11)$$

Если, в частности, в следствии 2, элементы матрицы G совпадают с биномиальными коэффициентами, числами Стирлинга первого рода, числами Ла со знаком, то формулы (11) дадут соответственно биномиальное обращение, обращение Стирлинга или обращение Ла (см. [5; с. 120]).

Приведем примеры новых формул обращения.

Матрице

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ 1 & 1 & & & & & \\ 2 & 1 & 1 & & & & \\ 3 & 2 & 1 & 1 & & & \\ 5 & 3 & 2 & 1 & 1 & & \\ 8 & 5 & 3 & 2 & 1 & 1 & \\ 13 & 8 & 5 & 3 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

соответствует обратная треугольная матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ -1 & 1 & & & & & \\ -1 & -1 & 1 & & & & \\ 0 & -1 & -1 & 1 & & & \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поэтому мы имеем формулу обращения

$$v_n = \sum_{i=0}^n F_{n-i} u_i \quad \Leftrightarrow \quad u_n = v_n - v_{n-1} - v_{n-2},$$

где F_i , $i = 0, 1, \dots$, — числа Фибоначчи.

Пусть

$$A = ((-1)^{\lfloor (i-j)/2 \rfloor})_{0 \leq j \leq i \leq n},$$

тогда

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ -1 & 1 & & & & & \\ 2 & -1 & 1 & & & & \\ -2 & 2 & -1 & 1 & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\ (-1)^{n-2} 2 & (-1)^{n-3} 2 & (-1)^{n-4} 2 & (-1)^{n-5} 2 & \dots & 1 & \\ (-1)^{n-1} 2 & (-1)^{n-2} 2 & (-1)^{n-3} 2 & (-1)^{n-4} 2 & \dots & -1 & 1 \end{pmatrix}_n.$$

Этой паре соответствует следующая формула обращения:

$$v_n = \sum_{i=0}^n (-1)^{\lfloor (n-i)/2 \rfloor} u_i \quad \Leftrightarrow \quad u_n = v_n - v_{n-1} + 2 \sum_{i=0}^{n-2} (-1)^i v_i.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] R. A. Zators'kii, "On paraderminants and parapermanents of triangular matrices", *Mat. Stud.*, **17**:1 (2002), 3–17.

- [2] Р. Стенли, *Перечислительная комбинаторика*, Мир, М., 1990.
- [3] Г. Эндриус, *Теория разбиений*, Наука, М., 1982.
- [4] Р. А. Заторский, “Определители треугольных матриц и траектории на диаграммах Ферре”, *Матем. заметки*, **72**:6 (2002), 834–852.
- [5] М. Айгнер, *Комбинаторная теория*, Мир, М., 1982.
- [6] Дж. Риордан, *Комбинаторные тождества*, Наука, М., 1982.

Р. А. Заторский

Прикарпатский национальный университет им. В. Стефаника

E-mail: romazz@rambler.ru

Поступило

30.05.2007

А. Р. Малярчук

Прикарпатский национальный университет им. В. Стефаника