Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Джиан-Лин Ли, Логарифмические коэффициенты и интегральные средние однолистных функций, *Матем. заметки*, 2009, том 85, выпуск 1, 131–133

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm6586>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 14:07:56

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Логарифмические коэффициенты и интегральные средние однолистных функций

Джиан-Лин Ли

Пусть S – класс функций $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$ аналитических и однолистных в единичном круге $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Логарифмические коэффициенты γ_n функции $f(z)$ определяются соотношением

$$\log \frac{f(z)}{z} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n z^n, \quad z \in D.$$

Логарифмические коэффициенты функции Кёбе $k_\eta(z) = z(1 - \eta z)^{-2}$ имеют вид $\gamma_n = \eta^n/n$, где $|\eta| = 1$. Известно, что неравенство $|\gamma_n| \leq 1/n$ выполняется для всех спиралеобразных функций $f(z)$ из класса S , но не выполняется для почти выпуклых функций [1] и для всего класса S , даже по порядку величины [2; теорема 8.4]. Тем не менее, Милин показал, что в некотором усредненном смысле коэффициенты γ_n не могут превышать $1/n$ (см. [2] и [3]). Известная лемма Милина гласит, что

$$\sum_{k=1}^n k |\gamma_k|^2 \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \delta, \quad f \in S, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1)$$

где

$$\delta = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log 2)^n}{n! n} - \log \log 2 - c \right\} = 0.3118 \dots$$

и c – константа Эйлера. Константа Милина δ в неравенстве (1) не может быть равной нулю. Де Бранже [4] дал удивительное доказательство гипотезы Милина, в котором утверждается, что $\delta = 0$ в усредненном смысле. Именно,

$$M_n = M_n(f) := \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{k=1}^m \left(\frac{1}{k} - k |\gamma_k|^2 \right) \geq 0, \quad f \in S, \quad n = 2, 3, \dots, \quad (2)$$

что позволяет получить знаменитую гипотезу Бибербаха из неравенства Лебедева–Милина $|a_n| \leq n e^{-M_n}$ (см. [5], [6]). Знак равенства в (2) возможен только для функции Кёбе. Одним из следствий неравенства (2) является соотношение

$$\sum_{k=1}^{\infty} k |\gamma_k|^2 r^k \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} r^k = \log \frac{1}{1-r}, \quad f \in S, \quad 0 \leq r < 1 \quad (3)$$

(см. [7]).

Хорошо известно, что, при $0 \leq r < 1$, интегральные средние логарифмических производных функций $f \in S$ имеют вид

$$I_2^2\left(r, \frac{zf'(z)}{f(z)}\right) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{rf'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})} \right|^2 d\theta = 1 + 4 \sum_{k=1}^{\infty} k^2 |\gamma_k|^2 r^{2k}. \quad (4)$$

Применив (3), где r в левой части заменено на r^2 , и неравенство

$$kr^k \leq \frac{e^{-1}}{1-r},$$

Каюмов [8] получил неравенство

$$I_2^2\left(r, \frac{zf'(z)}{f(z)}\right) \leq 1 + \frac{4}{e} \frac{|\log(1-\sqrt{r})|}{1-r}, \quad f \in S, \quad 0 \leq r < 1, \quad (5)$$

которое можно применить для доказательства гипотезы Бреннана для некоторого специального класса функций. В [8; с. 500] Каюмов поставил следующий вопрос.

Вопрос. Можно ли заменить “логарифмический” множитель в (5) некоторой абсолютной константой?

В случае, когда индекс Хеймана $\alpha(f)$ некоторой функции $f \in S$ удовлетворяет неравенству $\alpha(f) > 0$, Каюмов дал положительный ответ на этот вопрос в [8].

В данной работе будет показано, что ответ на этот вопрос отрицательный.

Сначала заметим, что $\sqrt{r}$ в (5) можно просто заменить на r . Тогда ответ на поставленный выше вопрос будет отрицательным. Действительно, если “логарифмический” множитель в (5) может быть заменен абсолютной константой, то

$$I_2^2\left(r, \frac{zf'(z)}{f(z)}\right) = O\left(\frac{1}{1-r}\right) \quad \text{при } r \rightarrow 1, \quad (6)$$

что эквивалентно утверждению

$$\sum_{k=1}^n k^2 |\gamma_k|^2 = O(n) \quad \text{при } n \rightarrow \infty \quad (7)$$

для $f \in S$ (см. [9; лемма 1]). Следовательно, из (7) следует, что

$$\sum_{k=1}^n k^2 |\gamma_k|^2 = o(n \log n) \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \quad (8)$$

что эквивалентно утверждению

$$I_2^2\left(r, \frac{zf'(z)}{f(z)}\right) = o\left(\frac{1}{1-r} \log \frac{1}{1-r}\right) \quad \text{при } r \rightarrow 1 \quad (9)$$

для $f \in S$. Однако Хейман [10] построил функцию $f \in S$, для которой (9) не выполняется (см. также [2; с. 272]). Таким образом, нельзя заменить “логарифмический” множитель в (5) некоторой абсолютной константой.

Заметим, что (8) или (9) выполняется для $f \in S$ в случае, когда o заменено на O , тогда как (6) или (7) выполняется для любой функции $f \in S$, образ которой имеет конечную область (см. [9]). Следовательно, ответ на поставленный выше вопрос может быть положительным для любой функции $f \in S$, образ которой имеет положительную область или чьи логарифмические коэффициенты удовлетворяют неравенству $|\gamma_n| \leq 1/n$ при всех $n \geq 1$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] D. Girela, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.*, **25**:2 (2000), 337–350. [2] P.L. Duren, *Univalent Functions*, Grundlehren Math. Wiss., **259**, Springer-Verlag, New York, 1983.
[3] I.M. Milin, *Univalent Functions and Orthogonal Systems*, Transl. Math. Monogr., **49**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1977. [4] L. de Branges, *Acta Math.*, **154**:1–2 (1985), 137–152. [5] И. А. Александров, *Сиб. матем. журн.*, **28**:2 (1987), 7–20. [6] Jian-Lin Li, *J. Math. Anal. Appl.*, **332**:1 (2007), 164–170. [7] I.M. Milin, A.Z. Grinshpan, *Complex Variables Theory Appl.*, **7**:1–3 (1986), 139–147. [8] I.P. Kayumov, *Math. Notes*, **78** (2005), 498–502. [9] P.L. Duren, Y.J. Leung, *J. Analyse Math.*, **36** (1979), 36–43.
[10] W.K. Hayman, *Michigan Math. J.*, **27**:2 (1980), 149–179.

Джиан-Лин Ли

Shaanxi Normal University, China

E-mail: jllimath@yahoo.com.cn

Поступило

01.12.2007