Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Ершов, Асимптотическое разложение решения дифференциального уравнения второго порядка, *Матем. заметки*, 2009, том 85, выпуск 1, 134–138

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm6587>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 10:17:36

Асимптотическое разложение решения дифференциального уравнения второго порядка

А. А. Ершов

Введение. Рассматривается дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + Q(t)u = 0. \quad (1)$$

Известно, что при достаточно широких предположениях относительно комплексно-значной функции вещественной переменной $Q(t)$ можно получить асимптотические разложения решений этого уравнения при больших значениях аргумента t . Так называемый метод ВКБ позволяет получать такие разложения, например, в случае, когда модули коэффициента $Q(t)$ и его производных любого порядка стремятся к бесконечности при $t \rightarrow \infty$ [1].

1. В этом пункте рассматривается случай, когда

$$Q(t) = P_n(t) + \varphi(t),$$

где $P_n(t)$ – алгебраический многочлен степени n , а $\varphi(t)$ – почти периодическая функция вида $\sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{i\lambda_k t}$, $c_k, \lambda_k \in \mathbb{R}$. Задача состоит в том, чтобы доказать существование асимптотического разложения решения при большом аргументе вида

$$u(t) \stackrel{\text{as}}{=} Q(t)^{-1/4} \exp(iS(t)) \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{w_j(t)}{t^j} \right),$$

где $S(t) = \int_0^t \sqrt{Q(s)} ds$, а $w_j(t)$ – некоторые почти периодические функции вида $\sum_{j=1}^{\infty} b_{j,k} \times e^{i\lambda_{j,k} t}$.

Для дальнейших поисков решения введем класс функций V , замкнутый относительно дифференцирования, умножения и взятия линейных комбинаций. Потребуем также, чтобы интеграл с переменным верхним пределом, среднее значение подынтегральной функции которого равно нулю, принадлежал V .

Примером такого класса могут быть функции вида

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{i\lambda_k t},$$

где $\lambda_k > \varepsilon > 0$ для любого натурального k и $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k \lambda_k^n| < \infty$ для любого целого n . Например, функция $f(t) = (3 - e^{it} - e^{i\sqrt{2}t})^{-1}$ принадлежит этому классу. Легко доказать, что множество таких функций действительно замкнуто относительно вышеуказанных операций.

Будем считать, что функция φ принадлежит классу V .

Будем исследовать формальное асимптотическое разложение решения, сделав замену неизвестной функции:

$$u(t) = w(t)Q(t)^{-1/4} \exp(iS(t)).$$

Функция $w(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 w}{dt^2} + \frac{dw}{dt} \left(2iQ(t)^{1/2} - \frac{1}{2} \frac{Q'(t)}{Q(t)} \right) + w \left(\frac{5}{16} \frac{[Q'(t)]^2}{[Q(t)]^2} - \frac{1}{4} \frac{Q''(t)}{Q(t)} \right) = 0. \quad (2)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 07-01-96002 р-урал-а).

Рассмотрим полином четной степени $P_{2m}(t)$, и пусть его старший коэффициент равен 1 (это не нарушает общности рассуждений, исследование в случае полинома нечетной степени по существу не отличается от рассмотренного ниже). Пусть $P_{2m}(t) = \sum_{k=0}^{2m} a_k t^k$, где $a_{2m} = 1$, m – натуральное число. Тогда можно получить следующие разложения в ряд коэффициентов уравнения (2). Например,

$$\begin{aligned} Q(t)^{1/2} &= \sqrt{t^{2m} + \sum_{k=0}^{2m-1} a_k t^k + \varphi(t)} \\ &= t^m \left(1 + \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^{2m-1} a_k t^{k-2m} + t^{-2m} \varphi(t) \right) - \frac{1}{8} \left(\sum_{k=0}^{2m-1} a_k t^{k-2m} + t^{-2m} \varphi(t) \right)^2 + \dots \right). \end{aligned}$$

Так как класс V замкнут относительно умножения и взятия линейных комбинаций, уравнение (2) можно переписать следующим образом:

$$\frac{d^2 w}{dt^2} + \frac{dw}{dt} \left(2it^m + \sum_{k=-m+1}^{\infty} \frac{1}{t^k} \varphi_k(t) \right) + w \left(\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{t^k} \psi_k(t) \right) = 0,$$

где $\varphi_k(t)$, $\psi_k(t)$ являются функциями из класса V , а ряды сходятся. Первые члены рядов $\varphi_{-m+1}, \dots, \varphi_{m-1}$ и $\psi_2, \dots, \psi_{2m-1}$ даже постоянные.

Будем искать решение в виде формального ряда

$$w = 1 + \frac{w_{m+1}}{t^{m+1}} + \frac{w_{m+2}}{t^{m+2}} + \frac{w_{m+3}}{t^{m+3}} + \frac{w_{m+4}}{t^{m+4}} + \dots,$$

где w_i – ограниченные функции.

Хотя все функции w_k при $k < 3m$ оказываются постоянными, для однообразности доказательства обобщим все w_i до почти периодических функций класса V .

После формального дифференцирования этого ряда получаем соотношения

$$\begin{aligned} w' &= \frac{w'_{m+1}}{t^{m+1}} - (m+1) \frac{w_{m+1}}{t^{m+2}} + \frac{w'_{m+2}}{t^{m+2}} - (m+2) \frac{w_{m+2}}{t^{m+3}} + \frac{w'_{m+3}}{t^{m+3}} - (m+3) \frac{w_{m+3}}{t^{m+4}} + \dots, \\ w'' &= \frac{w''_{m+1}}{t^{m+1}} - 2(m+1) \frac{w'_{m+1}}{t^{m+2}} + (m+1)(m+2) \frac{w_{m+1}}{t^{m+3}} + \frac{w''_{m+2}}{t^{m+2}} - 2(m+2) \frac{w'_{m+2}}{t^{m+3}} + \dots. \end{aligned}$$

Приравняем функции при равных степенях t :

$$\begin{aligned} t^{-1}: \quad & 2iw'_{m+1} = 0, \quad w_{m+1} = \alpha_{m+1}, \\ t^{-2}: \quad & 2i(-(m+1)w_{m+1} + w'_{m+2}) + w'_{m+1}\varphi_1(t) + \psi_2(t) = 0, \\ & -2i(m+1)\alpha_{m+1} + 2iw'_{m+2} + \psi_2(t) = 0, \end{aligned}$$

$$w'_{m+2} = (m+1)\alpha_{m+1} - \frac{1}{2i}\psi_2(t) = \frac{i}{2}\psi_2(t) + (m+1)\alpha_{m+1} = \chi_{m+2}(t) + (m+1)\alpha_{m+1},$$

$$w_{m+2} = \int_0^t \chi_{m+2}(\tau) d\tau + (m+1)\alpha_{m+1}t + \alpha_{m+2}.$$

Найдем α_{m+1} из условия

$$(m+1)\alpha_{m+1}t + \int_0^t \frac{i}{2}\psi_2(\theta) d\theta = O(1), \quad t \rightarrow \infty.$$

Из выбора α_{m+1} следует, что среднее значение функции $\chi_{m+2}(t)$ равно нулю, поэтому $w_{m+2}(t)$ будет принадлежать классу V .

Константа α_{m+2} пока еще не определена, мы определим ее из следующих разложений:

$$\begin{aligned} t^{-3}: \quad & 2i(-(m+2)w_{m+2} + w'_{m+3}) + w'_{m+1}\varphi_2(t) + w'_{m+2}\varphi_1(t) + \psi_3(t) = 0, \\ w'_{m+3} &= (m+2)w_{m+2} + \frac{i}{2}(w'_{m+1}\varphi_2 + w'_{m+2}\varphi_1 + \psi_3) = \chi_{m+3}(t) + (m+2)\alpha_{m+2} \end{aligned}$$

(обозначим за χ_{m+3} соответствующую функцию).

Аналогично

$$w_{m+3} = \int_0^t \chi_{m+3}(\tau) d\tau + (m+2)\alpha_{m+2}t + \alpha_{m+3}.$$

Функция χ_{m+3} состоит из произведений φ , φ' , φ'' , первообразных этих функций и их линейных комбинаций, но поскольку функция $\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} (p_k \sin \lambda_k t + q_k \cos \lambda_k t)$, то χ_{m+3} такого же вида и, следовательно, из класса V . Значит, константу $(m+2)\alpha_{m+2}$ можно также найти как среднее значение функции $(-\chi_{m+3})$, т.е.

$$\alpha_{m+2} = -\frac{1}{m+2} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \chi_{m+3}(\tau) d\tau.$$

Заметим, что для почти периодических функций этот предел равен среднему значению функции $-(1/(m+2))\chi_{m+3}$. Функция w_{m+3} будет также из класса V .

Рассмотрим произвольную степень $-p$, где p – натуральное число:

$$t^{-p}: \quad w_p'' - 2(p-1)w_{p-1}' + (p-2)(p-1)w_{p-2} + 2i(w_{m+p}' - (m+p-1)w_{m+p-1}) \\ + \sum_{j=m+1}^{p+m-1} (w_j' - (j-1)w_{j-1})\varphi_{p-j} + \sum_{k=2}^{p-m-1} \psi_k w_{p-k} + \psi_p = 0,$$

$$w_{m+p}' = (m+p-1)w_{m+p-1} \\ + \frac{i}{2} \left(w_p'' - 2(p-1)w_{p-1}' + (p-2)(p-1)w_{p-2} \right. \\ \left. + \sum_{j=m+1}^{p+m-1} (w_j' - (j-1)w_{j-1})\varphi_{p-j} + \sum_{k=2}^{p-m-1} \psi_k w_{p-k} + \psi_p \right) \\ = \chi_{m+p}(t) + (m+p-1)\alpha_{m+p-1},$$

$$w_{m+p}(t) = \int_0^t \chi_{m+p}(\tau) d\tau + (m+p-1)\alpha_{m+p-1}t + \alpha_{m+p},$$

где

$$\alpha_{m+p-1} = -\frac{1}{(m+p-1)} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \chi_{m+p}(\tau) d\tau.$$

Эта формула будет верна для любой функции w_i . При этом надо полагать все $w_i \equiv 0$, если $i < m+1$.

Таким образом, следуя данному алгоритму, найдем бесконечный асимптотический ряд, являющийся формальным. Можно доказать, что существует решение уравнения, для которого данный ряд является асимптотическим.

2. Заметим, что можно рассмотреть и другие случаи быстро растущего $Q(t)$. Например, когда $Q(t) = \exp(2\lambda t) + \varphi(t)$, где $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$, а $\varphi(t)$ – некоторая гладкая функция, имеющая более медленный рост. Но в этом случае уже будет отсутствовать резонанс. Докажем существование асимптотического разложения решения при большом аргументе вида

$$u(t) \stackrel{\text{as}}{=} Q(t)^{-1/4} \exp(iS(t)) \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{w_j(t)}{e^{j\lambda t}} \right),$$

где $S(t) = \int_0^t \sqrt{Q(s)} ds$, а $w_j(t)$ – некоторые функции, растущие медленнее экспоненты $c_j e^{j\mu t}$, $0 < \mu < \lambda$.

С этой целью рассмотрим следующее семейство классов функций W_k . Класс W_k зададим условием: гладкая функция $f(t)$ принадлежит классу W_k , если для любого целого неотрицательного n существует константа C_n , зависящая от k , такая, что $|f^{(n)}(t)| < C_n e^{k\mu t}$ для любого $t > 0$. Из определения класса W_k следует, что интеграл с переменным верхним пределом от функции из W_k принадлежит W_k . Также заметим,

что если функции f и g принадлежат классам W_i и W_j соответственно, то произведение $f * g$ будет принадлежать классу W_{i+j} .

Таковыми функциями могут быть алгебраические или тригонометрические многочлены.

В дальнейшем будем считать, что функция φ принадлежит классу W_1 .

Чтобы найти формальное асимптотическое разложение решения, выполним ту же замену функции:

$$u(t) = w(t)Q(t)^{-1/4} \exp(iS(t)).$$

Функция $w(t)$ удовлетворяет уравнению (2)

Рассмотрим экспоненту с произвольным показателем, представив ее в виде $e^{2\lambda t}$, где λ – любое положительное число. Получим разложения в ряд коэффициентов уравнения (2). Например,

$$Q(t)^{1/2} = e^{\lambda t} \sqrt{1 + \frac{\varphi(t)}{e^{2\lambda t}}} = e^{\lambda t} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\varphi(t)}{e^{2\lambda t}} - \frac{1}{8} \frac{\varphi(t)^2}{e^{4\lambda t}} + \dots \right),$$

$$\frac{1}{Q(t)} = \frac{1}{e^{2\lambda t}} \frac{1}{1 + \varphi(t)/e^{2\lambda t}} = \frac{1}{e^{2\lambda t}} \left(1 - \frac{\varphi(t)}{e^{2\lambda t}} + \frac{(\varphi(t))^2}{e^{4\lambda t}} - \dots \right).$$

Учитывая то, что все классы W_k замкнуты относительно взятия линейных комбинаций, и свойство произведения функций из разных классов, уравнение (2) преобразуем к следующему виду:

$$\frac{d^2 w}{dt^2} + \frac{dw}{dt} \left(2ie^{\lambda t} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{e^{k\lambda t}} \varphi_k(t) \right) + w \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{e^{k\lambda t}} \psi_k(t) \right) = 0,$$

где $\varphi_0(t), \psi_0(t) \in W_1$, $\varphi_k(t), \psi_k(t) \in W_k$ при $k > 0$, а ряды являются сходящимися.

Решение найдем в виде формального ряда

$$w' = \frac{w_1}{e^{\lambda t}} + \frac{w_2}{e^{2\lambda t}} + \frac{w_3}{e^{3\lambda t}} + \frac{w_4}{e^{4\lambda t}} + \dots,$$

где w_i – функции, принадлежащие классам W_i .

Выполнив формальное дифференцирование этого ряда, получим соотношения

$$w' = \frac{w'_1 - \lambda w_1}{e^{\lambda t}} + \frac{w'_2 - 2\lambda w_2}{e^{2\lambda t}} + \frac{w'_3 - 3\lambda w_3}{e^{3\lambda t}} + \dots,$$

$$w'' = \frac{w''_1 - 2\lambda w'_1 + \lambda^2 w_1}{e^{\lambda t}} + \frac{w''_2 - 4\lambda w'_2 + 4\lambda^2 w_2}{e^{2\lambda t}} + \dots.$$

Приравняем функции при одинаковых показателях экспоненты:

$$e^0: \quad 2i(w'_1 - \lambda w_1) + \psi_0(t) = 0,$$

$$w'_1 = \lambda w_1 + \frac{i}{2} \psi_0(t), \quad w'_1 = \lambda w_1, \quad w_{1\text{одн.}} = ce^{\lambda t}, \quad w_1 = c(t)e^{\lambda t},$$

$$c'(t)e^{\lambda t} = \frac{i}{2} \psi_0(t), \quad c(t) = \frac{i}{2} \int_{\alpha}^t \psi_0 e^{-\lambda \tau} d\tau + C,$$

$$w_1(t) = \left(\frac{i}{2} \int_{\alpha}^t \psi_0 e^{-\lambda \tau} d\tau + C \right) e^{\lambda t}.$$

Для того чтобы ряд имел смысл, функция w_1 должна расти медленнее знаменателя или, что практически то же самое, принадлежать классу W_1 . Если функция ψ_0 больше некоторой положительной константы, начиная с некоторого t , но принадлежит классу W_1 , то единственным способом сохранения корректности ряда является положить $C = 0$ и $\alpha = +\infty$. В этом случае функция w_1 будет принадлежать классу W_1 . Получаем

$$e^{-\lambda t}: \quad w''_1 - 2\lambda w'_1 + \lambda^2 w_1 + 2i(w'_2 - 2\lambda w_2) + (w'_1 - \lambda w_1)\varphi_0 + \psi_1 + w_1\psi_0 = 0,$$

$$w'_2 = 2\lambda w_2 + \frac{i}{2}(w''_1 - 2\lambda w'_1 + \lambda^2 w_1 + (w'_1 - \lambda w_1)\varphi_0 + \psi_1 + w_1\psi_0) = 2\lambda w_2 + \chi_2(t),$$

где

$$\begin{aligned}\chi_2(t) &= \frac{i}{2}(w_1'' - 2\lambda w_1' + \lambda^2 w_1 + (w_1' - \lambda w_1)\varphi_0 + \psi_1 + w_1\psi_0), \quad w_2 = c(t)e^{2\lambda t}, \\ c(t) &= \int_{+\infty}^t \chi_2 e^{-2\lambda\tau} d\tau + C, \quad w_2(t) = \left(\frac{i}{2} \int_{+\infty}^t \chi_2 e^{-2\lambda\tau} d\tau + C \right) e^{2\lambda t}, \quad C = 0.\end{aligned}$$

Все функции, составляющие χ_2 , принадлежат классу W_1 . Легко показать, что любая производная χ_2 растет медленнее экспоненты $e^{2\mu t}$, а значит, χ_2 и w_2 принадлежат классу W_2 .

Рассмотрим произвольный показатель $-k\lambda$, где k – натуральное число:

$$\begin{aligned}e^{-k\lambda t}: \quad & w_k'' - 2k\lambda w_k' + k^2\lambda^2 w_k + 2i(w_{k+1}' - k\lambda w_k) \\ & + \sum_{j=1}^k (w_j' - j\lambda w_j)\varphi_{k-j} + \psi_k + \sum_{j=1}^k w_j\psi_{k-j} = 0, \\ w_{k+1}' &= k\lambda w_k + \frac{i}{2} \left(w_k'' - 2k\lambda w_k' + k^2\lambda^2 w_k + \sum_{j=1}^k (w_j' - j\lambda w_j)\varphi_{k-j} + \psi_k + \sum_{j=1}^k w_j\psi_{k-j} \right) \\ &= k\lambda w_k + \chi_{k+1}(t), \\ w_{k+1} &= c(t)e^{k\lambda t}, \quad c(t) = \int_{+\infty}^t \chi_{k+1} e^{-k\lambda\tau} d\tau + C, \\ w_{k+1}(t) &= \frac{i}{2} e^{k\lambda t} \int_{+\infty}^t \chi_{k+1} e^{-k\lambda\tau} d\tau, \quad C = 0.\end{aligned}$$

Следовательно, в данном случае также построен бесконечный асимптотический ряд. Также можно доказать, что существует решение, разлагающееся в этот ряд.

Автор выражает глубокую благодарность А. М. Ильину за постановку задачи и внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] М. В. Федорюк, *Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений*, Справочная математическая библиотека, Наука, М., 1983.

А. А. Ершов

Челябинский государственный университет

E-mail: ale10919@yandex.ru

Поступило

06.06.2008