Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Кучеренко, А. В. Кривко, О теореме существования для гиперболических систем с точкой смены кратности порядка большего или равного трем, *Матем. заметки*, 2009, том 85, выпуск 1, 139–143

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm6588>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 13:24:20

О теореме существования для гиперболических систем с точкой смены кратности порядка большего или равного трем

В. В. Кучеренко, А. В. Кривко

В данной работе мы рассматриваем строго гиперболические системы, т.е. системы, для которых задача Коши корректна при любых младших членах [1]. В работе [2] было показано, что из строгой гиперболичности следует, что в точках смены кратности главный символ строго гиперболической системы может иметь жорданову клетку не более второго порядка. В работе [3] рассматривается теорема существования для строго гиперболических систем с неинволютивными характеристиками и точками смены кратности порядка большего или равного трем, у которых главные символы имеют жордановы клетки второго порядка. В данной работе мы доказываем, что при изменении условий, приведенных в работе [3], задача Коши становится некорректной.

Предположим, что главный символ вещественной гиперболической системы первого порядка имеет вид

$$A(x', \eta, \xi) = \eta I + T(x', \xi) \|b_{ij}^0(x', \xi)\| T^{-1}(x', \xi),$$

где I – это единичная $((r+2) \times (r+2))$ -матрица, $x' = (t, x)$, символы $T, T^{-1} \in S^0(\mathbb{R}_{x', \xi}^{2n+1})$, $b_{ij}^0 \in S^1(\mathbb{R}_{x', \xi}^{2n+1})$ и

$$\|b_{ij}^0(x', \xi)\| = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_r & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & d \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix},$$

где I_r – это единичная $(r \times r)$ -матрица и

$$\inf_{x' \in \mathbb{R}_{x'}^{n+1}, |\xi|=1} d > 0.$$

Обозначим через $A_c(x', \eta, \xi)$ полный символ этой системы первого порядка. В этом случае из анализа псевдодифференциальных операторов (ПДО) следует, что сумма ПДО операторов вида

$$T^{-1}\left(x', -i\frac{\partial}{\partial x}\right) A_c\left(x', -i\frac{\partial}{\partial t}, -i\frac{\partial}{\partial x}\right) T\left(x', -i\frac{\partial}{\partial x}\right) + (-i)T^{-1}\left(x', -i\frac{\partial}{\partial x}\right) \frac{\partial T}{\partial t}\left(x', -i\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

имеет полный символ A_T вида

$$A_T := \eta I + \|b_{ij}^0(x', \xi)\| + \sum_{k=1}^{\infty} b^k(x', \xi), \quad (1)$$

где $b^k(x', \xi) = \|b_{ij}^k(x', \xi)\|$, и $b^k(x', \xi) \in S^{1-k}(\mathbb{R}_{x, \xi}^{2n} \times [0, T])$, $k \in \mathbb{N}$. В дальнейшем элемент $b_{r+2, r+1}^1$ матричного символа $b^1(x', \xi)$ играет важную роль. В работе [3] предполагалось, что в $\mathbb{R}_{x, \xi}^{2n} \times [0, T] \setminus \{\xi = 0\}$ существует $C^\infty(\mathbb{R}_{x, \xi}^{2n} \times [0, T] \setminus \{\xi = 0\})$ – многообразие Σ размерности $2n$ такое, что

$$\lambda_1|_\Sigma = \lambda_2|_\Sigma = \lambda_3|_\Sigma, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2, \lambda_3 \neq \lambda_2, \lambda_1 \neq \lambda_3$$

в $\mathbb{R}_{x, \xi}^{2n} \times [0, T] \setminus (\Sigma \cup \{\xi = 0\})$.

Также предполагалось, что функции $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ неинволютивны в точках смены кратности Σ , т.е. скобки Пуассона удовлетворяют условиям

$$\{\eta + \lambda_1, \eta + \lambda_2\}|_\Sigma \neq 0, \quad \{\eta + \lambda_1, \eta + \lambda_3\}|_\Sigma \neq 0, \quad \{\eta + \lambda_2, \eta + \lambda_3\}|_\Sigma \neq 0, \quad (2)$$

Работа выполнена при поддержке гранта CONACYT Мексика No. 4297F и гранта SIP-IPN.

и что

$$\inf_i \inf_{x' \in \mathbb{R}_{x', \xi}^{n+1}, |\xi|=1} \{|\lambda_i(x, \xi)| \geq \alpha\} > 0, \\ \sup_i \sup_{x' \in \mathbb{R}_{x', \xi}^{n+1}, |\xi|=1} \{|\lambda_i(x, \xi)| \leq \beta\} < +\infty. \quad (3)$$

Фактически из условий (2) следует, что

$$\Sigma = \{x', \xi : t = f(x, \xi)\},$$

где

$$f \in S^0(\mathbb{R}_{x', \xi}^{2n+1}),$$

$$\lambda_j = a(x', \xi) + (t - f(x', \xi))\gamma_j, \quad \{\eta + \lambda_i, \eta + \lambda_j\}|_{\Sigma} = -(\gamma_i - \gamma_j)[1 + \{a, f\}]|_{\Sigma} \neq 0.$$

То есть мы имеем $\gamma_i|_{\Sigma} \neq \gamma_j|_{\Sigma}$ и $\{a, f\}|_{\Sigma} \neq -1$.

В силу условий (2) многообразие Σ не содержит траекторий гамильтоновых систем с гамильтонианами $\lambda_j(x', \xi)$, $j = 1, 2, 3$.

Сейчас мы рассматриваем обобщение выше приведенных условий. Предположим, что

$$\Sigma_{123} := \{x', \xi : \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3\},$$

это гладкое C^∞ -многообразие размерности $(2n - 1)$ в $\mathbb{R}_{x', \xi}^{2n+1} \setminus \{\xi = 0\}$; множества

$$\Sigma_{ij} := \{x', \xi : \lambda_i = \lambda_j, 1 \leq i, j \leq 3, i \neq j\},$$

являются C^∞ -многообразиями размерности $2n$ в $\mathbb{R}_{x, \xi}^{2n} \times [0, T] \setminus \{\xi = 0\}$, и что

$$\{\eta + \lambda_i, \eta + \lambda_j\}|_{\Sigma_{ij} \cap \{|\xi|=1\}} \neq 0, \quad (4)$$

для $1 \leq i, j \leq 3$, $i \neq j$ (т.е. $\Sigma_{123} \subset \Sigma_{ij}$, в то время как в [3] предполагалось, что $\Sigma_{ij} = \Sigma_{123} = \Sigma$).

Чтобы упростить формулировки ниже приведенных теорем мы предполагаем, что многообразия $\Sigma_{ij} \cap \{|\xi| = 1\}$ компактны в $\mathbb{R}_{x, \xi}^{2n} \times [0, T]$.

Предположим, что волновой фронт начальных данных задачи Коши сконцентрирован на лагранжевом многообразии Λ таком, что $\rho(\Lambda|_{|\xi|=1}, \Sigma_{ij}|_{|\xi|=1}) > 0$ для $i, j = 1, 2, 3$, $i \neq j$. В этом случае [4]–[8] волновой фронт распространяется вдоль траекторий $g_{\lambda_j}^{(t, 0)}(x, \xi)$, $(x, \xi) \in \Lambda$, $j = 1, 2, 3$, гамильтоновых векторных полей $\text{Id } \lambda_j$ и их ветвлений. Под ветвлением мы подразумеваем то, что траектория $g_{\lambda_j}^{(t, 0)}(x, \xi)$, проходя через точку пересечения $(\bar{t}, \bar{x}, \bar{\xi})$ с многообразиями Σ_{jk} , $j \neq k$, генерирует новые ветви-траектории $g_{\lambda_k}^{(t, \bar{\xi})}(\bar{x}, \bar{\xi})$, $t \geq \bar{t}$. Кроме того, эти ветви $g_{\lambda_k}^{(t, \bar{\xi})}(\bar{x}, \bar{\xi})$, $t \geq \bar{t}$, в свою очередь, генерируют новые ветви $g_{\lambda_m}^{(t, \bar{\xi}_k)}(\bar{x}_k, \bar{\xi}_k)$, $t \geq t_k$, $k \neq m$, в точках их пересечения $(\bar{t}_k, \bar{x}_k, \bar{\xi}_k)$ с многообразиями Σ_{km} , $k \neq m$, и так далее.

Из условий (3), (4) следует, что за конечный отрезок времени генерируется конечное число ветвей.

Мы определяем полное ветвление траектории $g_{\lambda_j}^{(t, 0)}(x, \xi)$ за время $[0, T]$, как объединение начальной траектории со всеми последовательностями ветвей, сгенерированными ею за время $[0, T]$. Заметим, что из условий (4) следует, что для каждого времени $t_0(j, k)$ такого, что $g_{\lambda_j}^{(t_0(j, k), 0)}(x, \xi) \in \Sigma_{jk}$, существует $\delta > 0$, зависящее от $t_0(j, k)$, для которого за время $(t_0(j, k), t_0(j, k) + \delta)$, $(t_0(j, k) - \delta, t_0(j, k))$ траектория $g_{\lambda_j}^{(t, 0)}(x, \xi)$ не пересекает многообразие Σ_{jk} .

Объединение волновых фронтов решения задачи Коши $u(t)$ для всех $t \in [0, T]$ содержит полное ветвление траекторий $g_{\lambda_j}^{(t, 0)}(x, \xi)$, $(x, \xi) \in \Lambda$, $j = 1, 2, 3$, за время T .

Когда существуют три характеристических корня, совпадающих на Σ_{123} , то полное ветвление траекторий, сосредоточенных в некоторой области Σ_{123} , может содержать периодические циклы или стабильные и нестабильные траектории типа обобщенной логарифмической спирали. Этот эффект не наблюдается в случае, когда совпадают лишь два характеристических корня λ_i, λ_j , т.е. когда $\Sigma_{123} = \emptyset$.

На рисунке рассмотрен случай размерности $n = 1$; символ $\{i, j\}$ обозначает скобку Пуассона $\{\lambda_i, \lambda_j\}$ по ξ, x . Предполагается, что $\partial \lambda_j / \partial t \equiv 0, j = 1, 2, 3$. Определим множества $\Delta_{ij;km}^{\pm\pm}$, как

$$\Delta_{ij;km}^{\pm\pm} := \{x', \xi : \lambda_i - \lambda_j <(>) 0, \lambda_k - \lambda_m <(>) 0\};$$

здесь знак “—” соответствует случаю “<”, а знак “+” соответствует случаю “>”.

Предположим, что траектория $g_{\lambda_2}^{(t,0)}(x, \xi)$ начинается в точке $(x, \xi) \in \Delta_{12;31}^{-} = \{x', \xi : \lambda_1 - \lambda_2 < 0, \lambda_3 - \lambda_1 < 0\}$ и выполнены условия

$$\{1, 2\}|_{\Sigma_{12}} > 0, \quad \{3, 2\}|_{\Sigma_{32}} < 0, \quad \{3, 1\}|_{\Sigma_{31}} > 0.$$

На рисунке показано, что полное ветвление траектории $g_{\lambda_2}^{(t,0)}(x, \xi)$ содержит кусочно гладкую траекторию типа логарифмической спирали (на рисунке пунктиром обозначены дополнительные ветви полного ветвления, которые не включены в выделенную траекторию типа логарифмической спирали).

Рис.

ТЕОРЕМА 1. *Предположим, что $\dim \Sigma_{123} = 2n - 1$, $\dim \Sigma_{ij} = 2n$, выполнены условия (3), (4). Положим*

$$\Sigma_{123}^c := \Sigma_{123} \cap \{\mathbb{R}_x^n \times [C_1 \leq |\xi| \leq C_2]\}.$$

1. *Предположим, что в некоторой окрестности $(\Sigma_{123}^c)^\varepsilon$ выполнены условия*

$$\{\eta + \lambda_1, \eta + \lambda_2\} < 0, \quad \{\eta + \lambda_1, \eta + \lambda_3\} < 0, \quad \{\eta + \lambda_2, \eta + \lambda_3\} < 0;$$

тогда существует достаточно малое число $\varepsilon_0 < \varepsilon$ и время $T(\varepsilon_0) > 0$ такие, что траектории $g_{\lambda_j}^{(t,0)}(x, \xi)$, $j = 1, 2, 3$, с начальными данными $(x, \xi) \in (\Sigma_{123}^c)^{\varepsilon_0}$, и все сгенерированные ими ветви не принадлежат окрестности $(\Sigma_{123}^c)^{\varepsilon_0}$ в момент времени $t = T(\varepsilon_0)$.

Траектория $g_{\lambda_j}^{(t,0)}(x, \xi)$ генерирует конечное число ветвей за время $[0, T(\varepsilon_0)]$.

2. Предположим, что $n = 1$ и в окрестности $(\Sigma_{123}^c)^\varepsilon$ выполняются условия

$$\{\lambda_1, \lambda_2\} > 0, \quad \{\lambda_3, \lambda_2\} < 0, \quad \{\lambda_3, \lambda_1\} > 0, \quad \frac{\partial \lambda_j}{\partial t} \equiv 0, \quad j = 1, 2, 3. \quad (5)$$

Тогда существует $\varepsilon_0 < \varepsilon$ такое, что для всех $\varepsilon_1, \varepsilon_2$: $0 < \varepsilon_2 < \varepsilon_1 < \varepsilon_0$, существуют начальные данные $(x_0, \xi_0) \in \Delta_{12;31}^{--} \cap \{(\Sigma_{123}^c)^{\varepsilon_1} \setminus (\Sigma_{123}^c)^{\varepsilon_2}\}$ такие, что полное ветвление траектории $g_{\lambda_2}^{(t,0)}(x, \xi)$ содержит кусочно гладкую траекторию, состоящую из N элементов вида

$$\begin{aligned} g_{\lambda_2}^{(t,0)}(x_0, \xi_0) &\in \Delta_{12;31}^{--}|_t, & 0 \leq t \leq t_1, \\ (x_1, \xi_1) &:= g_{\lambda_2}^{(t_1,0)}(x, \xi) \in \Sigma_{12}|_{t=t_1}, \\ g_{\lambda_1}^{(t,t_1)}(x_1, \xi_1) &\in \Delta_{12;31}^{+-}|_t, & t_1 \leq t \leq t_2, \\ (x_2, \xi_2) &:= g_{\lambda_1}^{(t_2,t_1)}(x_1, \xi_1) \in \Sigma_{31}|_{t=t_2}, \\ g_{\lambda_3}^{(t,t_2)}(x_2, \xi_2) &\in \Delta_{31;32}^{++}|_t, & t_2 \leq t \leq t_3, \\ (x_3, \xi_3) &:= g_{\lambda_3}^{(t_3,t_2)}(x_2, \xi_2) \in \Sigma_{32}|_{t=t_3}, \end{aligned}$$

и т.д.

В каждом элементе $g_{\lambda_j}^{(t_{k+1},t_k)}(x_k, \xi_k)$ этой кусочно гладкой траектории имеем $t_{k+1} - t_k \geq \text{Const}(\varepsilon_2, \varepsilon_1)\varepsilon_2$, где константа $\text{Const}(\varepsilon_2, \varepsilon_1)$ не зависит от индекса k .

Число элементов N кусочно гладкой траектории удовлетворяет оценке

$$N \geq q \left| \ln \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \right) \right|,$$

где константа $q > 0$ зависит только от ε_0 .

Из анализа формально асимптотических решений задачи Коши для гиперболических систем с символом (1) и высокочастотными начальными данными вида $\phi(x) \exp((i/h) \times S_0(x))$ следует, что при распространении вдоль траекторий, определенных в пункте 2 теоремы 1, амплитуда высокочастотного решения становится порядка $h^{-\sigma N}$, где σ зависит от символа младшего порядка $b^1(x, \xi)$ [7], [8]. Пусть $\varepsilon_1 = h^\delta$, $\varepsilon_2 = h^{\delta/2}$ для $\delta < 1/2$ и $\sigma > 0$; тогда имеем, что

$$h^{-\sigma N} = h^{-\sigma q \delta |\ln h|/2}.$$

Вышеизложенные рассуждения позволяют доказать, что при некоторых условиях на младшие члены b_{ij}^1 задача Коши для гиперболической системы с символом (1) является некорректной, т.е. система не строго гиперболична.

Определим σ_{ij} , как

$$\sigma_{ij} := - \frac{ib_{r+2,r+1}^1 d}{\{\eta + \lambda_j, \eta + \lambda_i\}} \Big|_{\Sigma_{123}}.$$

ТЕОРЕМА 2. Предположим, что символ (1) гиперболической системы удовлетворяет условиям (3)–(5), размерность $n = 1$, $\dim \Sigma_{123} = 1$, $\dim \Sigma_{ij} = 2$ и $\partial \lambda_j / \partial t \equiv 0$, $j = 1, 2, 3$. Пусть существуют j : $1 \leq j \leq r$, такие, что члены нулевого порядка

$$b_{j,r+1}^1(x', \xi)|_{\Sigma_{123} \cap \{|\xi|=1\}} \neq 0, \quad b_{r+1,j}^1(x', \xi)|_{\Sigma_{123} \cap \{|\xi|=1\}} \neq 0,$$

$$\text{Re}(\sigma_{32} + 3/2)|_{\Sigma_{123} \cap \{|\xi|=1\}} < 0.$$

В этом случае в пространствах H^s задача Коши для гиперболических систем с символом (1) является некорректной, т.е. для всех натуральных k, l, m таких, что $k \geq m$,

$l > 0$ и для любой константы $C > 0$ существует $T > 0$ и функция $u_T(t)$ со значениями в $C_0^\infty(\mathbb{R}_x^n)$, $u_T(t) \in C^\infty([0, T]; C_0^\infty(\mathbb{R}_x^n))$, такие, что

$$\max_{0 \leq t \leq T} \{\|u_T(t)\|_{H^{k-m}(\mathbb{R}_x^n)}\} > C \max_{0 \leq t \leq T} \{\|Lu_T(t)\|_{H^l(\mathbb{R}_x^n)} + \|u_T(0)\|_{H^k(\mathbb{R}_x^n)}\}.$$

Значение T может быть выбрано произвольно малым.

Из условий теоремы 2 следует существование точки $(\bar{x}, \bar{\xi})$ такой, что $\Sigma_{123} = (\bar{x}, \bar{\xi}) \times [0, T]$, и что полные ветвления траекторий содержат периодические траектории или траектории типа логарифмической спирали.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] E. Bernardi, A. Bove, *Ark. Mat.*, **43**:1 (2005), 113–131. [2] T. Nishitani, *J. Anal. Math.*, **61** (1993), 181–229. [3] А. В. Кривко, В. В. Кучеренко, *Докл. РАН*, **412**:4 (2007), 451–455. [4] В. В. Кучеренко, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **38**:3 (1974), 625–662. [5] В. Я. Иврий, В. М. Петков, *УМН*, **29**:5 (1974), 3–70. [6] R. B. Melrose, G. A. Uhlmann, *Comm. Pure Appl. Math.*, **32**:4 (1979), 483–519. [7] V. V. Kucherenko, A. Kryvko, *Stability of Stationary Solutions of Nonlinear Hyperbolic Systems with Multiple Characteristics*, Proc. 5th International ISAAC Congress (25–30 July, 2005, University of Catania, Italy). [8] A. Kryvko, *Métodos asintóticos para sistemas con características de multiplicidad variable*, Thesis, Instituto Politecnico Nacional, Mexico, 2007.

В. В. Кучеренко

Национальный политехнический институт, Мехико, Мексика

E-mail: valeri@esfm.ipn.mx

Поступило

18.02.2008

Исправленный вариант

15.05.2008

А. В. Кривко

Национальный политехнический институт