Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ш. Кучкаров, Задача простого преследования-убегания в шаре риманового многообразия, *Матем. заметки*, 2009, том 85, выпуск 2, 204–213

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm6589>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 13:57:25

УДК 517.9

Задача простого преследования-убегания в шаре риманового многообразия

А. Ш. Кучкаров

Исследуется дифференциальная игра преследования-убегания с простыми движениями, когда точки (игроки) движутся в шаре риманового многообразия. При этом все игроки имеют одинаковые динамические возможности, преследователи движутся по всему шару, а убегающий – в первом варианте игры по сфере этого шара, во втором варианте – по всему шару. Найдены достаточные условия для разрешимости задач. Приведен пример.

Библиография: 15 названий.

1. Введение. В моделях конфликтных ситуаций нередко возникают фазовые ограничения [1]–[10]. Один из видов таких ограничений представляет собой случай, когда фазовое пространство представляется многообразием. Например, в работах [6], [7] метод Айзекса применялся к изучению игр сближения на многообразиях, а в [8] решена дифференциальная игра оптимального сближения, когда точки движутся на локально-евклидовых пространствах. Работы [9]–[13] посвящены изучению дифференциальных игр преследования-убегания с фазовыми ограничениями в евклидовом пространстве.

В настоящей работе изучаются дифференциальные игры простого преследования и убегания со многими преследующими. Точки имеют одинаковые динамические возможности. Рассматриваются два варианта игры: в первом варианте игры преследователи движутся в некотором шаре риманового многообразия, а убегающий по сфере этого шара; во втором варианте все игроки движутся в данном шаре. Найдены достаточные условия разрешимости рассматриваемых задач и построена стратегия игроков, разрешающая эти задачи.

2. Постановка задачи. Пусть M – n -мерное ($n \geq 2$) полное риманово многообразие с положительно определенной симметрической билинейной формой $\langle \cdot, \cdot \rangle_x$ на касательном пространстве M_x , $x \in M$, а $|\cdot|_x$ – соответствующая норма.

Напомним, что *кратчайшей, соединяющей точки x и y* , называется абсолютно-непрерывная кривая $\gamma: [0; \tau] \rightarrow M$, $\tau > 0$, $x = \gamma(0)$ и $y = \gamma(\tau)$, имеющая наименьшую длину среди всех кривых, расположенных на M . Если существует кратчайшая $\gamma: [0; \tau] \rightarrow M$, $\tau > 0$, соединяющая точки x и y , то ее длина называется *расстоянием* между точками x , y и обозначается $d(x, y)$. Множества

$$B(p, r) = \{x \in M \mid d(p, x) \leq r\} \quad \text{и} \quad S(p, r) = \{x \in M \mid d(p, x) = r\}$$

называются соответственно *шаром* и *сферой* с центром в точке p и радиуса r . Множество G называется *выпуклым*, если для любых двух точек $p, q \in G$ существует геодезическая с концами p, q длины $d(p, q)$, целиком лежащая в G . Шар $B(p, r)$ называется *сильно выпуклым*, если $B(p, r)$ выпукло и, кроме того, все шары $B(q, r) \subset B(p, r)$ выпуклы. Шар $B(p, r_0)$ называется *сильно локально выпуклым*, если каждая сфера $S(p, r)$ радиуса $r \leq r_0$ удовлетворяет условию: если геодезическая $\gamma: [-\varepsilon; \varepsilon] \rightarrow M$ касается $S(p, r)$ в некоторой точке $q = \gamma(0)$, то $d(p, \gamma(s)) \geq r$ при достаточно малых s .

Движения преследователей (игроков) $P_i, i = 1, 2, \dots, m$, и убегающего (игрока) E в полном римановом многообразии M описываются уравнениями

$$P_i: \dot{x}_i = u_i, \quad x_i(0) = x_{i0}; \quad (1)$$

$$E: \dot{y} = v, \quad y(0) = y_0, \quad y_0 \neq x_{i0}, \quad (2)$$

где $x_i, y \in M, u_i \in M_{x_i}, v \in M_y; u_i, v$ – параметры управления.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Измеримая по Борелю функция $v(t), t \geq 0$ (соответственно $u_i(t), t \geq 0$), называется *управлением убегающего E* (соответственно *преследователя $P_i, i = 1, 2, \dots, m$*), если для решения $y(t)$ (соответственно $x_i(t)$) задачи Коши

$$\dot{y} = v(t), \quad y(0) = y_0 \quad (\text{соответственно} \quad \dot{x}_i = u_i(t), \quad x_i(0) = x_{i0}),$$

почти для всех $t, t \geq t_0$ выполняются неравенство

$$|v(t)|_{y(t)} \leq 1 \quad (\text{соответственно} \quad |u_i(t)|_{x_i(t)} \leq 1), \quad (3)$$

включение

$$v(t) \in M_{y(t)} \quad (\text{соответственно} \quad u_i(t) \in M_{x_i(t)}) \quad (4)$$

и одно из включений

$$y(t) \in S(p, r_0), \quad t \geq 0 \quad (\text{соответственно} \quad x_i(t) \in B(p, r_0), \quad t \geq 0), \quad (5)$$

$$y(t) \in B(p, r_0), \quad t \geq 0 \quad (\text{соответственно} \quad x_i(t) \in B(p, r_0), \quad t \geq 0). \quad (6)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Функцию $U_i, i = 1, 2, \dots, m$,

$$U_i: (x_i, y, v) \rightarrow B_*(x_i), \quad (x_i, y) \in B^2(p, r_0), \quad v \in B_*(y),$$

называем *стратегией преследователя P_i* , если для произвольного допустимого управления убегающего $v(\cdot)$ задача Коши

$$\begin{cases} \dot{y} = v(t), & y(0) = y_0, \\ \dot{x}_i = U_i(x_i, y, v(t)), & x_i(0) = x_{i0}, \end{cases}$$

имеет единственное абсолютно непрерывное решение $(x(\cdot), y(\cdot))$, где $B_*(z), z \in B(p, r_0)$, – единичный шар в касательном пространстве M_z . При этом функцию $x_i(\cdot)$ называем *траекторией преследователя P_i , порожденной стратегией U_i , начальным состоянием $\{x_{i0}, y_0\}$ и управлением $v(\cdot)$* . Стратегию U_i называем *допустимой*, если $u_i(t) = \dot{x}_i(t), t \geq 0$, – допустимое управление преследователя P_i .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Если существуют число T и допустимые стратегии $U_1, U_2, \dots, U_m$ преследователей $P_1, P_2, \dots, P_m$ соответственно такие, что при любом управлении $v(\cdot)$ убегающего E для траекторий $x_1(\cdot), x_2(\cdot), \dots, x_m(\cdot), y(\cdot)$, порожденных этими стратегиями, начальной позицией $\{x_{10}, x_{20}, \dots, x_{m0}, y_0\}$ и функцией $v(\cdot)$ выполнено условие $x_i(t) = y(t)$ при некоторых $t, t \in (0, T]$, и $i, i \in \{1, 2, \dots, m\}$, то будем говорить, что в игре (1)–(5) (или (1)–(4), (6)) *можно завершить преследование за время T* .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Функцию V ,

$$V: (x_1, x_2, \dots, x_m, y) \rightarrow S_*(y), \quad (x_1, x_2, \dots, x_m, y) \in B^{m+1}(p, r_0),$$

называем *стратегией убегающего E* , где $S_*(y)$ – единичная сфера в M_y .

Пусть $\Delta = \{t_0 = 0, t_1, t_2, \dots\}$ – некоторое разбиение полуинтервала $[0; \infty)$. Траектория $y(\cdot)$ убегающего игрока, порождаемая допустимыми управлениями преследователей $u_1(\cdot), u_2(\cdot), \dots, u_m(\cdot)$, стратегией V и начальной позицией $\{x_{10}, x_{20}, \dots, x_{m0}, y_0\}$, определяется следующим образом:

1) в момент t_i определяется вектор

$$v_i = V(x_1(t_i), x_2(t_i), \dots, x_m(t_i), y(t_i)), \quad v_i \in B_*(y(t_i)),$$

и строится геодезическая $\gamma_{yi}: [0; t_i - t_{i+1}] \rightarrow M$ такая, что

$$\gamma'_{yi}(0) = v_i, \quad \gamma_{yi}(0) = y(t_i), \quad |\gamma'_{yi}(s)| = 1, \quad s \in [0; t_{i+1} - t_i];$$

2) $y(\cdot)$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{y} = \gamma'_{yi}(t - t_i), \quad t \in [t_i; t_{i+1}), \quad i = 1, 2, \dots, \quad y(0) = y_0.$$

Стратегию V называем *допустимой*, если $v(t) = \dot{y}(t), t \geq 0$, – допустимое управление убегающего.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Если для произвольной начальной позиции

$$\{x_{10}, x_{20}, \dots, x_{m0}, y_0\}, \quad x_{i0} \neq y_0,$$

и произвольных управлений $u_1(\cdot), u_2(\cdot), \dots, u_m(\cdot)$ преследователей существуют разбиение Δ полуинтервала $[0; \infty)$ и стратегия V убегающего E такие, что для соответствующих траекторий выполнено неравенство $x_i(t) \neq y(t)$ при всех $t \geq 0$ и $i, i \in \{1, 2, \dots, m\}$, то будем говорить, что в игре (1)–(5) (или (1)–(4), (6)) *возможно убегание*.

ЗАДАЧА 1. Найти условия для возможности завершения преследования в игре (1)–(5) (или (1)–(4), (6)).

ЗАДАЧА 2. Найти условия для возможности убегания в игре (1)–(5) (или (1)–(4), (6)).

ЗАДАЧА 3. Если разрешимы задачи 1 или 2, то найти соответствующие стратегии игроков, разрешающие эти задачи.

3. Случай, когда убегающий движется по сфере. В этом пункте рассмотрим игру (1)–(5), т.е. игру, когда убегающий E движется по сфере $S(p, r_0)$, а преследователи – по всему шару $B(p, r_0)$.

Пусть K – пространство p -якобиевых полей X вдоль геодезической $\varphi: [0; a] \rightarrow M$, выходящей из точки p и параметризованной длиной дуги, b_r – квадратичная форма на K вида $b_r(X) = \langle X'(r), X(r) \rangle$. Здесь $X(r)$ – значение векторного поля X в точке $\varphi(r)$. Положим

$$K_0 = \{X \in K \mid |X(r_0)| = 1\}, \quad \min_{0 \leq r \leq r_0} \min_{X \in K_0} \frac{d|X(r)|}{dr} = \varepsilon. \quad (7)$$

Тогда, если $X \in K_0$, то

$$1 = \int_0^{r_0} \frac{d|X(r)|}{dr} dr \geq \varepsilon r_0. \quad (8)$$

Известно [14], что $\varepsilon > 0$ при достаточно малых r_0 .

ТЕОРЕМА 1. Пусть $b_r(X) > 0$ для всех $X \in K$, $0 < r \leq r_0$, тогда при любом $m \geq 1$ в игре (1)–(5) можно завершить преследование за время $T = r_0 + \pi/(2\varepsilon)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем, что при выполнении условия теоремы можно завершить преследования даже при $m = 1$. Для удобства вместо записи x_1 , u_1 и U_1 будем писать просто x , u и U .

Для каждой пары $(y, v) \in S(p, r_0) \times B_*(y)$ определим p -якобиево поле X_{yv} вдоль луча $[p, y)$ такое, что

$$X_{yv}(0) = 0, \quad X_{yv}(r_0) = v.$$

При выполнении условия теоремы шар $B(p, r_0)$ сильно локально выпуклый и поэтому такое поле существует и единственно [14]. Стратегию $U(x, y, v)$ преследователя P определим равенством

$$U(x, y, v) = \begin{cases} \dot{\gamma}_x(0), & \text{если } x \notin \phi(y), \\ X_{yv}(r_x) + \bar{u}_x, & \text{если } x \in \phi(y), \end{cases} \quad (9)$$

где $\phi(y)$ – отрезок с концами p и y (точнее, радиус шара $B(p, r_0)$); $\gamma_x: [0; r_x] \rightarrow M$ – такая геодезическая, что

$$\gamma_x(0) = x, \quad \gamma_x(r_x) = 0, \quad |\gamma'_x(s)| = 1;$$

$r_x = d(p, x)$, $\bar{u}_x$ – касательная к лучу $[p, y)$ в точке x , имеющая одинаковое направление с этим лучом;

$$\bar{u}_x = \sqrt{1 - (X_{yv}(r_x))^2}. \quad (10)$$

Отметим, что векторное поле X_{yv} ортогонально лучу (p, y) : $\langle \bar{u}_x, X_{yv}(r_x) \rangle_x = 0$; функция $(X_{yv}(r))^2$, $r \in [0; r_0]$, строго возрастает и поэтому

$$|X_{yv}(r_x)| \leq |X_{yv}(r_0)| = |v| \leq 1.$$

Пусть $x(\cdot)$, $y(\cdot)$ – соответственно траектории преследователя и убегающего, порожденные произвольным управлением $v(\cdot)$, стратегий (9) и начальным положением x_0 , y_0 . Докажем, что при некотором t , $t \in (0; T]$, имеет место равенство $x(t) = y(t)$.

Из (9) вытекает, что либо $x(r_{x_0}) = p$, т.е. $x(r_{x_0}) \in \phi(y(r_{x_0}))$, либо существует число t_0 , $t_0 \in [0; r_{x_0}]$, такое, что $x(t_0) \in \phi(y(t_0))$. Поэтому, не ограничивая общности, будем считать, что $x_0 = p$.

Покажем, что $x(t) \in [p, y(t))$ при всех $t \geq 0$. В случае, когда M – евклидово пространство, это очевидно. Пусть $B_p(0, r_0)$ – шар в касательном пространстве M_p . Тогда экспоненциальное отображение $\exp_p: B_p(0, r_0) \rightarrow M$ в точке p определено в шаре $B_p(0, r_0)$. Через $\psi(z)$ обозначим прообраз точки z , $z \in B(p, r_0)$: $z = \exp_p \psi(z)$. Тогда [14] существует единственное линейное векторное поле Y_{yv} вдоль луча $[0, \psi(y))$ такое, что $X_{yv} = d \exp_p Y_{yv}$. Так как векторное поле X_{yv} ортогонально к лучу $\varphi(y)$, то векторное поле Y_{yv} является ортогональным к лучу $\exp_p \varphi(y)$. Положим

$$\bar{v}(t) = d \exp_p v(t) = Y_{yv}(r_0), \quad \bar{u}_1(t) = Y_{yv}(r_{x(t)}), \quad \bar{u}_2(t) = d \exp_p \bar{u}_{x(t)}.$$

Тогда, если $x(t) \in \varphi(y(t))$, то $\langle \bar{u}_1(t), \bar{u}_2(t) \rangle_p = 0$, $|\bar{u}_2(t)| = |\bar{u}_{x(t)}|$, вектор $\bar{u}_2(t)$ имеет одинаковые направления с вектором $\psi(x(t))$ и

$$\frac{d\psi(x(t))}{dt} = \bar{u}_1(t) + \bar{u}_2(t), \quad \frac{d\psi(y(t))}{dt} = \bar{v}(t).$$

Кроме того, в силу линейности векторного поля Y_{yv} , $\bar{u}_1(t) = r_{x(t)} \bar{v}(t)/r_0$ (напомним, что $Y_{yv}(0) = 0$). Отсюда вытекает, что точка $\psi(x(t))$ все время лежит на луче $[0, \psi(y(t)))$. Следовательно, $x(t) \in [p, y(t))$ при всех $t \geq 0$. Поэтому равенство $x(t) = y(t)$ равносильно равенству $r_{x(t)} = r_{y(t)} = r_0$.

Используя теоремы о среднем значении, при $X \in K_0$ получим (см. (7))

$$|X(r_0)| - |X(r)| = (r_0 - r) \frac{d|X(r_*)|}{dr} \geq (r_0 - r)\varepsilon,$$

где r_* – некоторое число из отрезка $[0; r_0]$. Ясно, что $\varepsilon > 0$. Отсюда и из (8) вытекает, что для всех $X \in K_0$ имеет место неравенство

$$|X(r)| \leq |X(r_0)| - (r_0 - r)\varepsilon = 1 - (r_0 - r)\varepsilon \leq r\varepsilon, \quad 0 \leq r \leq r_0. \quad (11)$$

Так как поле Якоби образует линейное подпространство, то $X_{yv}/|v| \in K_0$, при $v \neq 0$. Отсюда и в силу (11) при $v \neq 0$ имеем

$$\frac{|X_{yv}(r)|}{|v|} \leq r\varepsilon, \quad |X_{yv}(r)| \leq |v|r\varepsilon \leq r\varepsilon, \quad 0 \leq r \leq r_0. \quad (12)$$

Если же $v = 0$, то выполнение неравенства (12) очевидно. Тогда, используя (10), имеем

$$\frac{d(r_{x(t)})}{dt} = \bar{u}_{x(t)} = \sqrt{1 - (X_{yv}(r_{x(t)}))^2} \geq \sqrt{1 - \varepsilon^2 r_{x(t)}^2}. \quad (13)$$

Интегрируя неравенство (13) от нуля до t , получим неравенство $\arcsin \varepsilon r_{x(t)} \geq \varepsilon t$, которое показывает, что из начального положения $\{x_0, y_0\}$, $y_0 = p$, можно завершить преследование до момента времени $T_1 = \pi/(2\varepsilon)$. Тогда в игре (1)–(5) из произвольной начальной позиции (x_0, y_0) можно завершить преследование за время $T = r_0 + \pi/(2\varepsilon)$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Пусть μ – положительная верхняя грань плоских кривизн многообразия M и $r_0 < \pi/(2\sqrt{\mu})$. Тогда [14] $b_r(X) > 0$ для всех $X \in K$, $0 < r \leq r_0$ и $p \in M$. Кроме того, если все плоские кривизны многообразия M не положительные, то $b_r(X) > 0$ для всех $X \in K$ и $r > 0$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $m < n$, $b_{r_0}(x) < 0$ для всех $X \in K$ и экспоненциальное отображение $\exp_p$ взаимно-однозначно отображает шар $B_p(0, r_0)$ в шар $B(p, r_0)$. Тогда в игре (1)–(5) возможно убегание.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу непрерывности вытекает существование положительного числа ε_0 такого, что $b_r(X) < 0$ для всех r , $r_0 - \varepsilon_0 \leq r \leq r_0$, и $X, X \in K$. Известно [15], что существует положительное число ε^0 такое, что все шары

$$B_S(q, \varepsilon^0) = \{z \in S(p, r_0) \mid d_S(q, z) \leq \varepsilon^0\}, \quad q \in S(p, r_0)$$

являются сильно выпуклыми. Здесь $d_S(q, z)$ – наименьшее значение длин кривых, соединяющих точки q и z и целиком лежащих на сфере $S(p, r_0)$. Положим $\varepsilon = \min\{\varepsilon^0, \varepsilon_0\}$.

Пусть $(x_1, x_2, \dots, x_m, y) \in M$, $\bar{x}_i$ – точка пересечения луча $[p, x_i]$ и сферы $S(p, r_0)$, а $\gamma_i: [0; \varepsilon_i] \rightarrow S(p, r_0)$ – такая параметризованная длиной дуги геодезическая на сфере $S(p, r_0)$, что

$$d_S(\bar{x}_i, y) = \varepsilon_i, \quad \gamma_i(0) = y, \quad \gamma_i(\varepsilon_i) = \bar{x}_i.$$

Стратегию убегающего игрока E определим формулой

$$V = \begin{cases} v^0, & \text{если } d_S(y, \bar{x}_i) \geq \frac{\varepsilon}{2}, i = 1, 2, \dots, m, \\ v_0, & \text{если } d_S(y, \bar{x}_i) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ при некоторых } i, 1 \leq i \leq m, \end{cases}$$

где $(x_1, x_2, \dots, x_m, y) \in B^{m+1}(p, r_0)$; $v_0 \in M_y$ – единичный вектор, касательный к сфере $S(p, r_0)$ и дающий минимальное значение выражения

$$\min_{i \in I} \langle v, \gamma'_i(0) \rangle_y, \quad \text{где } I = \left\{ i \mid d_S(y, \bar{x}_i) < \frac{\varepsilon}{2}, 1 \leq i \leq m \right\},$$

а $v^0 \in M_y$ – произвольный единичный вектор (см. определение 5). Напомним, что из сильной выпуклости всех шаров $B_S(q, r)$, принадлежащих сфере $S(p, r_0)$, вытекает существование единственного геодезического $\gamma_i: [0; \varepsilon_i] \rightarrow S(p, r_0)$, если $\varepsilon_i < \varepsilon/2$.

Рассмотрим траектории $x_1(\cdot), x_2(\cdot), \dots, x_m(\cdot), y(\cdot)$, порожденные произвольными допустимыми управлениями преследователей $u_1(\cdot), u_2(\cdot), \dots, u_m(\cdot)$, стратегией V , начальной позицией $\{x_{10}, x_{20}, \dots, x_{m0}, y_0\}$, $x_{i0} \neq y_0$, и разбиением Δ : $t_0 = 0$, $t_{i+1} = t_i + \varepsilon/4$, $i = 0, 1, \dots$.

Покажем, что если $x_i(t) \neq y(t)$ при всех i , $i = 1, 2, \dots, m$, и t , $t \in [0; t_k]$, то и на отрезке времени $[t_k, t_{k+1}]$ имеет место неравенство $x_i(t) \neq y(t)$.

Очевидно, что $\dim S(p, r_0) = n - 1$. Тогда

$$\dim\{v \in M_y \mid v \text{ касается на } S(p, r_0)\} = n - 1 \geq m.$$

Отсюда следует, что

$$\min_{i \in I(k)} \langle v_k, \gamma'_i(0) \rangle_{y(t_k)} \leq 0, \quad (14)$$

где $I(k) = \{i \mid d_S(\bar{x}_i(t_k), y(t_k)) < \varepsilon/2\}$ и

$$v_k = V(x_1(t_k), x_2(t_k), \dots, x_m(t_k), y(t_k)).$$

Построим такую геодезическую $\gamma_{yk}: [0; \varepsilon/4] \rightarrow S$, что $\gamma_{yk}(0) = y(t_k)$, $\gamma'_{yk}(0) = v_k$ и $|\gamma'_{yk}(s)| = 1$, $0 \leq s \leq \varepsilon/4$. Тогда по определению

$$v(t) = \gamma'_{yk}(t - t_k), \quad y(t) = y(t_k) + \gamma_i(t - t_k) - \gamma_{yk}(0) = \gamma_{yk}(t - t_k). \quad (15)$$

Используя неравенство треугольника, получим, что

$$\begin{aligned} d(x_i(t), y(t)) &\geq d(x_i(t_k), y(t_k)) - d(x_i(t_k), x_i(t)) - d(y(t), y(t_k)) \\ &\geq d_S(\bar{x}_i(t_k), y(t_k)) - \int_{t_k}^t |u_i(\tau)| d\tau - \int_{t_k}^t |v(\tau)| d\tau \\ &\geq \frac{\varepsilon}{2} - 2(t - t_k) > \frac{\varepsilon}{2} - 2\frac{\varepsilon}{4} = 0 \end{aligned}$$

для всех i , $i \notin I(k)$, и t , $t \in [t_k; t_{k+1}]$.

Теперь предположим, что $i \in I(k)$. Тогда по определению множества $I(k)$ и сильной выпуклости шара $B_S(\gamma_{yk}(t), t - t_k)$, $t \in [t_k; t_{k+1}]$ из (14) вытекает, что

$$\{\gamma_i(s) \mid 0 < s \leq \varepsilon_i\} \cap B_S(\gamma_{yk}(t - t_k), t - t_k) = \emptyset.$$

Следовательно,

$$\bar{x}_i(t_k) = \gamma_i(\varepsilon_i) \notin B_S(\gamma_{yk}(t - t_k), t - t_k), \quad t_k \leq t \leq t_{k+1},$$

т.е. (см. (15))

$$d_S(\bar{x}_i(t_k), y(t)) = d_S(\bar{x}_i(t_k), \gamma_{yk}(t - t_k)) > t - t_k, \quad t_k \leq t \leq t_{k+1}.$$

Отсюда

$$d_S(\bar{x}_i(t), y(t)) \geq d_S(\bar{x}_i(t_k), y(t)) - d_S(\bar{x}_i(t_k), \bar{x}_i(t)) > (t - t_k) - d_S(\bar{x}_i(t_k), \bar{x}_i(t)). \quad (16)$$

Учитывая включение $i \in I(k)$, получим

$$\begin{aligned} d(p, x_i(t)) &\geq d(p, x_i(t_k)) - d(x_i(t_k), x_i(t)) \\ &\geq r_0 - \frac{\varepsilon}{2} - \int_{t_k}^t |u_i(s)| ds \geq r_0 - \frac{\varepsilon}{2} - (t - t_k) \geq r_0 - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{4} > r_0 - \varepsilon, \end{aligned}$$

т.е. $r_0 - \varepsilon < d(p, x_i(t)) \leq r_0$, $t_k \leq t \leq t_{k+1}$. Тогда, как в доказательстве теоремы 1, можно показать, что $|\dot{\bar{x}}_i(t)| \leq |\dot{x}_i(t)| = |u_i(t)| \leq 1$. Отсюда и из (16) вытекает

$$d_S(\bar{x}_i(t), y(t)) > (t - t_k) - \int_{t_k}^t |\dot{\bar{x}}_i(s)| ds \geq 0.$$

Последнее неравенство равносильно неравенству $x_i(t) \neq y(t)$ при всех t , $t \in [t_k; t_{k+1}]$.

Таким образом, $x_i(t) \neq y(t)$ при всех i , $i = 1, 2, \dots, m$, и t , $t \in [t_k; t_{k+1}]$. Отсюда, в силу индукции, $x_i(t) \neq y(t)$ при всех i , $i = 1, 2, \dots, m$, и $t \geq 0$. Теорема доказана.

ПРИМЕР. Пусть M — n -мерная единичная сфера в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$.

1) Если $r_0 < \pi/2$, то $b_r(X) > 0$ для всех $X \in K$ и $0 < r \leq r_0$. В силу теоремы 1, если $r_0 < \pi/2$, то при любом $m \geq 1$ в игре (1)–(6) можно завершить преследование за время $T = T(r_0)$.

2) Если же $\pi/2 < r_0 < \pi$, то $b_r(X) < 0$ для всех $X \in K$, $\pi/2 < r \leq r_0$ и экспоненциальное отображение $\exp_r$ взаимно-однозначно отображает шар $B_p(0, r_0)$ в шар $B(p, r_0)$. В силу теоремы 2, если $m < n$, то в игре (1)–(5) возможно убежание. Утверждение теоремы 2 верно и при $r_0 = \pi/2$ [12]. Сфера $S(p, r_0)$ является $(n-1)$ -мерным шаром некоторого n -мерного евклидова пространства. Поэтому из основного результата работы [12] вытекает, что при $m \geq n$ в игре (1)–(5) можно завершить преследование за время $T = T(r_0)$.

4. Случай, когда все игроки движутся в шаре. В этом пункте рассмотрим игру (1)–(4), (6), т.е. игру, когда все игроки движутся по всему шару $B(p, r_0)$. Не ограничивая общности, будем считать, что $y_0 \in \text{int } B(p, r_0)$. В противном случае, убегающий E на достаточно малом отрезке времени $[0; \varepsilon]$, двигаясь по лучу $[y_0; p)$ при $t \in [0; \varepsilon]$, сохраняя неравенство $y(t) \neq x_i(t)$, в момент $t = \varepsilon$ обеспечит включение $y(\varepsilon) \in \text{int } B(p, r_0)$.

ТЕОРЕМА 3. Если $m < n$, то в игре (1)–(4), (6) возможно убежание.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть K_Σ – риманова кривизна по отношению к касательной к M двумерной плоскости Σ и $K_\Sigma \geq \beta$ для всех касательных двумерных плоскостей в точках, лежащих в $B(p, r_0)$; $\alpha = -|\beta|$ и N – n -мерное риманово многообразие постоянной кривизны $-\alpha$, т.е. $K_\Pi = -\alpha$ для всех касательных к N двумерных плоскостей Π .

Выбираем такое число h , что шар $B(y_0, 2h)$ сильно выпуклый и содержится в шаре $B(p, r_0)$. Определим разбиение Δ : $t_0 = 0$, $t_1 = h/2$,

$$t_{i+1} = t_i + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \ln \left(1 + \frac{1 + \sqrt{2(k+i)(k+i+2)+1}}{(k+i)(k+i+2)} \right), \quad i = 1, 2, \dots, \quad (17)$$

где

$$k = \left\lceil \frac{1}{\text{ch}(h\sqrt{\alpha})} \right\rceil + 1, \quad (18)$$

$[\tau]$ – целая часть числа τ , $\text{ch } \tau = (e^\tau + e^{-\tau})/2$. Тогда

$$t_{i+1} > t_i + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \ln \left(1 + \frac{1}{k+i+2} \right) \geq \frac{h}{2} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \ln \frac{i+k+3}{k+3}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Отсюда видно, что $t_i \rightarrow \infty$ при $i \rightarrow \infty$.

Стратегию убегающего игрока E определим формулой

$$V = \begin{cases} v^0, & \text{если } d(y, x_i) > h \text{ для всех } i = 1, 2, \dots, m, \\ v_0, & \text{если } d(y, x_i) \leq h \text{ при некоторых } i, 1 \leq i \leq m, \end{cases}$$

где $(x_1, x_2, \dots, x_m, y) \in B^{m+1}(p, r_0)$; $v_0 \in M_y$ – единичный вектор, ортогональный к лучу $[0, y)$ и дающий минимальное значение выражения $\min_{i \in I} \langle v, \gamma'_i(0) \rangle$, $v^0 \in M_y$ – произвольный единичный вектор; $\gamma_i: [0; \varepsilon_i] \rightarrow M$ – такая параметризованная длиной дуги геодезическая, что

$$d(\bar{x}_i, y) = \varepsilon_i, \quad \gamma_i(0) = y, \quad \gamma_i(\varepsilon_i) = \bar{x}_i.$$

Здесь $I = \{i \mid d(y, x_i) < h, 1 \leq i \leq m\}$. Ясно, что

$$d(y(t_i), y(t_{i+1})) = t_{i+1} - t_i. \quad (19)$$

Из неравенства $m < n$ следует $\min_{i \in I} \langle v_0, \gamma'_i(0) \rangle \leq 0$. Тогда, как в доказательстве теоремы 2, можно доказать, что если $x_i(t) \neq y(t)$ при всех i , $i = 1, 2, \dots, m$, и t , $t \in [0; t_k]$, то и на отрезке времени $[t_k; t_{k+1}]$ имеет место неравенство $x_i(t) \neq y(t)$ при любом управлении преследователей.

Осталось показать, что при всех $t \geq 0$ имеет место включение $y(t) \in B(p, r_0)$. С этой целью рассмотрим треугольник в многообразии N , со сторонами

$$a_1 = d(y(t_i), y_0), \quad a_2 = d(y(t_i), y(t)) = t - t_i$$

и углом между ними $\pi/2$, $t \in (t_i, t_{i+1}]$. Тогда в силу теоремы Топоногова о сравнении углов [15] длина третьей стороны a_3 этого треугольника не меньше, чем $d(y_0, y(t))$:

$$d(y_0, y(t)) \leq a_3; \quad (20)$$

кроме того, из теоремы косинусов гиперболической геометрии следует, что

$$\text{ch}(a_3 \sqrt{\alpha}) = \text{ch}(a_1 \sqrt{\alpha}) \cdot \text{ch}(a_2 \sqrt{\alpha}).$$

Отсюда с учетом (17)–(20) имеем

$$\begin{aligned} \text{ch}(d(y_0, y(t)) \sqrt{\alpha}) &\leq \text{ch}(d(y(t_i), y_0) \sqrt{\alpha}) \text{ch}(d(y(t_i), y(t)) \sqrt{\alpha}) \\ &\leq \text{ch}(d(y(t_{i-1}), y_0) \sqrt{\alpha}) \text{ch}(d(y(t_{i-1}), y(t_i)) \sqrt{\alpha}) \text{ch}(d(y(t_i), y(t)) \sqrt{\alpha}) \cdots \\ &\leq \text{ch}(d(y(t_2), y_1) \sqrt{\alpha}) \text{ch}(d(y(t_3), y(t_2)) \sqrt{\alpha}) \cdots \text{ch}(d(y(t_i), y(t)) \sqrt{\alpha}) \\ &\leq \text{ch}((t_2 - t_1) \sqrt{\alpha}) \text{ch}((t_3 - t_2) \sqrt{\alpha}) \cdots \text{ch}((t_{i+1} - t_i) \sqrt{\alpha}) \\ &= \frac{(k+1)^2}{k(k+2)} \cdot \frac{(k+2)^2}{(k+1)(k+3)} \cdots \frac{(k+i+1)^2}{(k+i)(k+i+2)} = \frac{(k+1)(k+i+1)}{k(k+i+2)} \\ &< \text{ch}(h \sqrt{\alpha}). \end{aligned}$$

Следовательно, $d(y(t), y_0) < h$ или $y(t) \in B(p, r_0)$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В случае, когда M – евклидово пространство, в [9] доказано, что если $m < n$, то в игре (1)–(4), (6) возможно убегание; если же $m \geq n$, то в игре (1)–(4), (6) можно завершить преследование.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Р. Айзекс, *Дифференциальные игры*, Мир, М., 1967.
- [2] Н. Н. Красовский, *Управления динамической системой: Задача о минимуме гарантированного результата*, Наука, М., 1985.
- [3] А. И. Субботин, А. Г. Ченцов, *Оптимизация гарантии в задачах управления*, Наука, М., 1981.
- [4] Н. Н. Красовский, А. И. Субботин, *Позиционные дифференциальные игры*, Наука, М., 1974.
- [5] Ф. Л. Черноусько, А. А. Меликян, *Игровые задачи управления и поиска*, Наука, М., 1978.
- [6] А. А. Меликян, Н. В. Овакимян, “Дифференциальная игра простого сближения на многообразиях”, *ПММ*, **57**:1 (1993), 41–51.

- [7] А. А. Меликян, Н. В. Овакимян, “Особые траектории в игровых задачах простого сближения на многообразиях”, *ПММ*, **55**:1 (1991), 54–62.
- [8] А. Ш. Кучкаров, “Задача оптимального сближения в локально-евклидовых пространствах”, *Автоматика и телемеханика*, 2007, № 6, 45–50.
- [9] А. А. Азамов, “О задаче убегания по заданной кривой”, *ПММ*, **46**:4 (1982), 694–696.
- [10] Р. П. Иванов, “Простое преследование-убегание на компакте”, *Докл. АН СССР*, **254**:6 (1980), 1318–1321.
- [11] Н. Ю. Сатимов, А. Ш. Кучкаров, “Уклонение от встречи со многими преследователями на поверхности”, *Узбекск. матем. журн.*, 2001, № 1, 51–55.
- [12] А. Ш. Кучкаров, “О задаче преследования-убегания на сфере”, *Докл. Адыгской (Черкесской) междунар. АН*, **6**:2 (2003), 104–108.
- [13] А. Ш. Кучкаров, Б. Б. Рихсиев, “О решении одной задачи преследования с фазовыми ограничениями”, *Автоматика и телемеханика*, 2001, № 8, 41–45.
- [14] Р. Л. Бишоп, Р. Дж. Криттенден, *Геометрия многообразий*, Мир, М., 1967.
- [15] Д. Громоу, В. Клингенберг, В. Мейер, *Риманова геометрия в целом*, Мир, М., 1971.

А. Ш. Кучкаров

Институт математики и информационных технологий АН

Республики Узбекистан

E-mail: Kuchkarov1@yandex.ru

Поступило

15.11.2007