Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. К. Ахунжанов, Об аномальных числах, *Матем. заметки*, 2002, том 72, выпуск 1, 150–152

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm659>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 16:11:01

1. Введение. В работе [1] В. Шмидт показал, что каждое из множеств $\mathcal{R}_q$ чисел, не являющихся нормальными по натуральному основанию $q \geq 2$, является α -выигрышным и, следовательно, их пересечение $\bigcap_{q \geq 2} \mathcal{R}_q$ несчетно. В своей предыдущей работе [2] он доказал, что если натуральный ряд разбить на два множества $\mathbb{N} \setminus \{1\} = A \sqcup B$ таким образом, что для любых $a \in A, b \in B$ выполнено $\ln a / \ln b \notin \mathbb{Q}$, то найдется несчетное множество чисел x , которые будут нормальны по всем основаниям из A и не будут нормальны ни по одному основанию из B . С другой стороны, в последнее время вновь стал проявляться интерес к конструкциям аномальных чисел. Так, числа, не являющиеся нормальными ни по какому основанию, были построены в [3] в виде специальных рядов. В настоящей заметке мы даем количественный вариант теоремы Шмидта.

ТЕОРЕМА. *Найдется положительная абсолютная эффективная постоянная $\varkappa > 0$, обладающая следующим свойством: существует несчетное множество вещественных чисел x таких, что для любого целого $q \geq 2$ и для любого целого неотрицательного n выполняется*

$$\{q^n x\} \geq \exp\left(-\varkappa q \left(\frac{\ln \bar{q}}{\ln \ln \bar{q}}\right)^3\right).$$

(Здесь $\{\cdot\}$ означает дробную долю, а $\bar{q} = \max\{q, 3\}$.)

Отметим, что правая часть из неравенства нашей теоремы *не зависит* от n .

Доказательство теоремы проводится по общей схеме, предложенной в [1] (см. также [4, гл. 3]).

2. О выигрышных множествах. В этом пункте мы переформулируем нужным нам образом некоторые результаты Шмидта из [1], [4].

Пусть $0 < \alpha < 1, 0 < \beta < 1$ и $\rho > 0$. Пусть на вещественной оси отмечено некоторое множество точек $S \subseteq \mathbb{R}$.

Рассматривается игра, в которую играют черные и белые. Сначала черные выбирают на действительной оси замкнутый отрезок B_1 длины $l(B_1) = 2\rho$. Затем белые выбирают замкнутый отрезок $W_1 \subset B_1$ длины $l(W_1) = \alpha l(B_1)$. Потом черные выбирают замкнутый отрезок $B_2 \subset W_1$ длины $l(B_2) = \beta l(W_1)$ и т.д. Таким способом порождается последовательность вложенных замкнутых отрезков $B_1 \supset W_1 \supset B_2 \supset W_2 \supset \dots$ с длинами $l(B_i) = 2(\alpha\beta)^{i-1}\rho$ и $l(W_i) = 2\alpha(\alpha\beta)^{i-1}\rho$ ($i = 1, 2, \dots$). Очевидно, что множество $\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} W_i$ состоит из одной единственной точки. Если $\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i \in S$, то говорят, что белые выиграли игру.

Далее, множество S назовем (α, β, ρ) -выигрышным, если белые могут выиграть игру независимо от того, как играют черные.

ЛЕММА 1. Пусть $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$, $\gamma = 1 + \alpha\beta - 2\alpha > 0$, $\rho > 0$, и пусть $t \in \mathbb{N}$ такое, что $(\alpha\beta)^t < \gamma/2$. Пусть шар $B_k = (b_k, \rho_k)$ получается в (α, β, ρ) игре. Тогда белые могут играть так, что при любой игре черных шар B_{k+t} лежит в полупрямой $x > b_k + \rho_k\gamma/2$.

ЗАМЕЧАНИЕ. $\gamma < 1$.

Обозначим символом $N(g)$ множество чисел, которые в g -ичной системе счисления записываются без нулей после запятой.

ЛЕММА 2. Пусть $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$, $\gamma = 1 + \alpha\beta - 2\alpha > 0$, $\rho \geq \alpha\beta/2$, $g \geq 3/(\alpha\beta\gamma)$. Тогда множество $N(g)$ является (α, β, ρ) -выигрышным.

Леммы 1 и 2 являются модификациями аналогичных утверждений из [1]. Их доказательства проводятся по аналогии с проведенными в этой работе. Сначала надо доказать лемму 1, а затем с ее помощью получить лемму 2.

Пусть натуральный ряд $\mathbb{N}$ представлен в виде дизъюнктного объединения $\mathbb{N} = \sqcup_{j=1}^{\infty} P_j$ арифметических прогрессий P_j с первым членом m_j и разностью d_j . Пусть α и β удовлетворяют условиям

$$1 + \alpha\beta - 2\beta > 0, \quad 1 - 2\alpha \geq 0. \quad (0)$$

Определим последовательно для всех $j \in \mathbb{N}$ следующие величины:

$$\alpha_j = \alpha, \quad \beta_j = \beta(\alpha\beta)^{d_j-1}, \quad \gamma_j = 1 + \alpha_j\beta_j - 2\alpha_j, \quad \rho_j = (\alpha\beta)^{m_j-1}. \quad (1)$$

ЛЕММА 3. Пусть $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$, $1 + \alpha\beta - 2\beta > 0$, и пусть множество S является $(\alpha, \beta, 1)$ -выигрышным. Тогда множество S несчетно.

ЛЕММА 4. Пусть множества N_j $(\alpha_j, \beta_j, \rho_j)$ -выигрышны. Тогда $\bigcap_{j=1}^{\infty} N_j$ $(\alpha, \beta, 1)$ -выигрышно.

Лемма 4 фактически является уточнением результата Шмидта о том, что пересечение α -выигрышных множеств само является α -выигрышным [1], [4].

3. О разбиении натурального ряда на арифметические прогрессии.

ЛЕММА 5. Натуральный ряд $\mathbb{N}$ можно представить в виде дизъюнктного объединения $\mathbb{N} = \sqcup_{j=1}^{\infty} P_j$ арифметических прогрессий P_j с первым членом m_j и разностью d_j таких, что

$$m_j \leq d_j \leq \kappa_1 j \left(\frac{\ln \bar{j}}{\ln \ln \bar{j}} \right)^3$$

с некоторой положительной постоянной κ_1 . (Здесь $\bar{j} = \max\{j, 3\}$.)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для разбиения натурального ряда на прогрессии нам понадобится ввести факториальную систему счисления. Запись $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1}$ будет означать сумму $\sum_{k=1}^n a_k k!$; запись всякого числа в этой системе счисления будет единственной, если цифры a_k ограничить условием $0 \leq a_k \leq k$. Единственность разложения следует из равенства $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$. Положим $A_0 = 2\mathbb{N}$ – множество четных натуральных чисел. Пусть число $N = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1}$ в своей записи не имеет нулей. Сопоставим ему прогрессию $A_N = \{x \in \mathbb{N} \mid x = N \bmod (n+2)!\}$. Ее членами являются все числа, у которых первые n цифр совпадают с цифрами в N , а $(n+1)$ -я цифра – нуль. Отсюда следует, что все эти прогрессии не пересекаются. Очевидно также, что все так определенные прогрессии A_N , включая A_0 , покрывают весь натуральный ряд. (В самом деле, если x нечетно, сохраним все его цифры до первого нуля, остальное откинем. Полученная запись представляет некоторое число $N \in \mathbb{N}$. Согласно определению $x \in A_N$.)

Пусть $m_1, m_2, m_3, \dots$ – начальные члены этих прогрессий, упорядоченные по возрастанию, а $d_1, d_2, d_3, \dots$ – разности соответствующих прогрессий. Заметим, что всего n -значных чисел без нулей равно $n!$. Следовательно, количество чисел, меньших $k!$ и без нулей, будет равно $0! + 1! + 2! + \dots + (k-1)!$.

Пусть $0! + 1! + 2! + \dots + (k-1)! < j \leq 0! + 1! + 2! + \dots + (k-1)! + k!$. Тогда арифметическая последовательность с таким номером имеет k -значный начальный член и, значит, $m_j \leq (k+1)! < (k+2)! = d_j$. Так как $(k-1)! < j$, то $d_j = (k+2)! < \kappa_2 j k^3 < \kappa_1 j (\ln \bar{j} / \ln \ln \bar{j})^3$.

4. Доказательство теоремы. Пусть $\alpha = \beta = 1/2$, m_j, d_j – из леммы 5 и $\alpha_j, \beta_j, \rho_j$ выбраны согласно (1). Определим q_j, s_j, g_j из соотношений

$$q_j = j + 1, \quad \frac{3}{\alpha_j \beta_j \gamma_j} \leq q_j^{s_j} < \frac{3q_j}{\alpha_j \beta_j \gamma_j}, \quad g_j = q_j^{s_j}, \quad (2)$$

и покажем, что существует несчетное множество точек $x \in \mathbb{R}$, для которых выполняется

$$\forall n, j \in \mathbb{N} \quad \{q_j^n x\} \geq q_j^{-2s_j}. \quad (3)$$

Действительно, из соотношений (2) и леммы 5 следует, что выполняются условия леммы 2, а значит, $N(g_j)$ является $(\alpha_j, \beta_j, \rho_j)$ -выигрышным. Из соотношений (1) и леммы 4 следует, что пересечение всех множеств $N(g_j)$ является $(\alpha, \beta, 1)$ -выигрышным. А из соотношений (0) и леммы 3 следует, что это множество несчетно. Кроме того, оно состоит из тех $x \in \mathbb{R}$, g_j -ичная запись которых не содержит цифру 0 после запятой, т.е. для всех его точек x выполнено $\{g_j^n x\} \geq g_j^{-1}$. Выражая g_j через q_j , эту оценку можно записать так: $\{q_j^{s_j n} x\} \geq q_j^{-s_j}$. Отсюда легко видеть, что в q_j -ичной записи числа x не может стоять $2s_j$ нулей подряд, т.е. $\{q_j^n x\} \geq q_j^{-2s_j}$, и тем самым (3) доказано.

Подставляя в (3) оценку для $q_j^{s_j}$ из (2) и учитывая определения величин $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j$ (соотношения (1)) и неравенства леммы 5, получаем утверждение теоремы.

Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Schmidt W. M. // Trans. Amer. Math. Soc. 1966. V. 123. P. 178–199.
2. Schmidt W. M. // Acta. Arith. 1962. V. 7. P. 299–309.
3. Коробов А. Н. // Диофантовы приближения. Математические записки. Т. 2. М., 1996. С. 74–76.
4. Шмидт В. М. Диофантовы приближения. М.: Мир, 1983.