Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Е. Тараканов, Р. А. Заторский, О связи детерминантов с перманентами, *Матем. заметки*, 2009, том 85, выпуск 2, 292–299

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm6590>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 05:13:53

О связи детерминантов с перманентами

В. Е. Тараканов, Р. А. Заторский

В работе выделяется класс матриц, для которых существует преобразование Поля замены их перманента соответствующим детерминантом.

Библиография: 9 названий.

1. Перманенты являются одним из важнейших понятий линейной алгебры и комбинаторного анализа и находят свои применения в различных областях математики, а также в других отраслях знания [1]. Несмотря на кажущуюся простоту перманентов, для них до сих пор не найдено естественного алгоритма упрощения матрицы, подобного алгоритму Гаусса для подсчета детерминантов. В связи с этим Поля в 1913 г. [2] поставил задачу о нахождении преобразования, обращающего перманенты в детерминанты, и сам доказал, что не существует способа приписать одновременно элементам матрицы порядка n , $3 \leq n$, знаки “+” и “–” так, чтобы ее перманент превратился в детерминант. После существенного обобщения Маркусом и Минком [3] результата Поля надежда найти даже линейные преобразования, которые превращали бы перманент матрицы n -го ($3 \leq n$) порядка в детерминант, разрушилась. В связи с этим в [4; с. 22–23] по существу ставится следующая

Задача. Из всех матриц n -го порядка, выделить класс матриц, для которых существует такое линейное преобразование на множестве их элементов, что перманент исходной матрицы совпадает с детерминантом преобразованной матрицы.

Целью настоящего сообщения является решение этой задачи.

При этом авторы используют аппарат теории парадетерминантов треугольных матриц, основы которого изложены в работах [5], [6].

2. Рассмотрим основные понятия теории парадетерминантов треугольных матриц. Пусть задано некоторое числовое поле K .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Треугольную таблицу чисел, принадлежащих полю K ,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}_n \quad (1)$$

назовем *треугольной матрицей*, а число n – ее *порядком*.

Обратим внимание на тот факт, что треугольная матрица в нашем понимании не является матрицей в обычном понимании этого термина, поскольку она является треугольной, но не прямоугольной таблицей чисел.

Каждому элементу a_{ij} матрицы (1) поставим в соответствие $i-j+1$ элементов a_{ik} , $k = j, \dots, i$, которые назовем *производными элементами* матрицы, порожденными *ключевым элементом* a_{ij} .

Произведение всех производных элементов, порожденных элементом a_{ij} , обозначим через $\{a_{ij}\}$ и назовем *факториальным произведением ключевого элемента* a_{ij} , т.е.

$$\{a_{ij}\} = \prod_{k=j}^i a_{ik}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Набор ключевых элементов матрицы (1) назовем *нормальным набором* этой матрицы, если они порождают монотрансверсаль, т.е. множество производных элементов мощности n , каждые два из которых не лежат в одном столбце этой матрицы.

Пусть $\mathbb{P}(n)$ – множество всех упорядоченных разбиений (композиций) (см. [7; с. 67]) натурального числа n на натуральные слагаемые. Известно, что

$$|\mathbb{P}(n)| = \sum_{r=1}^n \binom{n-1}{r-1} = 2^{n-1}. \quad (2)$$

Между нормальными наборами ключевых элементов матрицы (1) и упорядоченными разбиениями натурального числа n существует взаимно однозначное соответствие:

$$(n_1, n_2, \dots, n_r) \in \mathbb{P}(n) \quad \Leftrightarrow \quad (a_{N_1, N_0+1}, a_{N_2, N_1+1}, \dots, a_{N_r, N_{r-1}}),$$

где $N_0 = 0$, $N_s = \sum_{i=1}^s n_i$, $s = 1, 2, \dots, r$.

Каждому нормальному набору a ключевых элементов поставим в соответствие знак $(-1)^{\varepsilon(a)}$, где $\varepsilon(a)$ – сумма всех индексов ключевых элементов этого набора.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Парадетерминантом* треугольной матрицы (1) назовем число

$$\text{ddet}(A) = \left\langle \begin{array}{cccc} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{array} \right\rangle = \sum_{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r) \in \mathbb{P}(n)} (-1)^{\varepsilon(a)} \prod_{s=1}^r \{a_{i(s), j(s)}\},$$

где $a_{i(s), j(s)}$ – ключевой элемент, соответствующий s -й компоненте разбиения $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r)$, а символ $\varepsilon(a)$ – знак нормального набора a ключевых элементов.

По аналогии с понятием парадетерминанта матрицы (1) введем понятие параперианента этой матрицы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. *Параперманентом* треугольной матрицы (1) назовем число

$$\text{pper}(A) = \left[\begin{array}{cccc} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{array} \right] = \sum_{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r) \in \mathbb{P}(n)} \prod_{s=1}^r \{a_{i(s), j(s)}\},$$

где $a_{i(s),j(s)}$ – ключевой элемент соответствующий s -й компоненте разбиения $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r)$.

ПРИМЕЧАНИЕ 1. В силу (2) парадетерминант и параперманент n -го порядка состоит из 2^{n-1} слагаемых.

ПРИМЕР 1. Парадетерминант матрицы третьего порядка равен:

$$\left\langle \begin{array}{ccc} a_{11} & & \\ a_{21} & a_{22} & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right\rangle = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{21}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{33} + a_{31}a_{32}a_{33}.$$

Каждому элементу a_{ij} треугольной матрицы (1) поставим в соответствие треугольную таблицу элементов этой матрицы с этим элементом в левом нижнем углу, которую назовем *углом этой матрицы* и обозначим через R_{ij} . Очевидно, что угол R_{ij} является треугольной матрицей $(i - j + 1)$ -го порядка, причем ему принадлежат только те элементы a_{rs} матрицы (1), индексы которых удовлетворяют соотношениям $j \leq s \leq r \leq i$.

В дальнейшем будем считать, что

$$\text{ddet}(R_{01}) = \text{pper}(R_{01}) = \text{ddet}(R_{n,n+1}) = \text{pper}(R_{n,n+1}) = 1.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Прямоугольную таблицу элементов треугольной матрицы (1) назовем *вписанной* в эту матрицу, если одна ее вершина совпадает с элементом a_{n1} , а противоположная к ней – с элементом a_{ii} , $i = 1, 2, \dots, n$. Обозначим эту таблицу через $T(i)$.

ПРИМЕЧАНИЕ 2. Если в определении 5 положить $i = 1$ или $i = n$, то прямоугольная таблица вырождается соответственно в первый столбец или последнюю строчку.

При вычислении парадетерминанта и параперманента удобно пользоваться алгебраическими дополнениями.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. *Алгебраическими дополнениями* D_{ij} , P_{ij} к факториальному произведению $\{a_{ij}\}$ ключевого элемента a_{ij} треугольной матрицы (1), назовем соответственно числа

$$D_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \text{ddet}(R_{j-1,1}) \cdot \text{ddet}(R_{n,i+1}), \quad P_{ij} = \text{pper}(R_{j-1,1}) \cdot \text{pper}(R_{n,i+1}),$$

где $R_{j-1,1}$ и $R_{n,i+1}$ – углы этой матрицы.

В исчислении треугольных матриц важную роль играет следующая

ТЕОРЕМА 1 [5]. Пусть A – треугольная матрица (1), а $T(i)$ – некоторая вписанная в нее прямоугольная таблица элементов. Тогда справедливы равенства

$$\text{ddet}(A) = \sum_{s=1}^i \sum_{r=i}^n \{a_{rs}\} D_{rs}, \quad (3)$$

$$\text{pper}(A) = \sum_{s=1}^i \sum_{r=i}^n \{a_{rs}\} P_{rs}, \quad (4)$$

где D_{rs} и P_{rs} – соответствующие алгебраические дополнения к факториальному произведению ключевого элемента a_{rs} , который принадлежит таблице $T(i)$.

Если $i = 1$, то теорема 1 дает разложение парафункций по элементам первого столбца треугольной матрицы и равенства (3), (4) примут вид

$$\begin{aligned} \text{ddet}(A) &= \sum_{r=1}^n \{a_{r1}\} D_{r1} = \sum_{r=1}^n (-1)^{r+1} \{a_{r1}\} \cdot \text{ddet}(R_{n,r+1}), \\ \text{pper}(A) &= \sum_{r=1}^n \{a_{r1}\} P_{r1} = \sum_{r=1}^n \{a_{r1}\} \cdot \text{pper}(R_{n,r+1}). \end{aligned}$$

Если же $i = n$, то получим разложение парафункций по элементам последней строчки:

$$\begin{aligned} \text{ddet}(A) &= \sum_{s=1}^n \{a_{ns}\} D_{ns} = \sum_{s=1}^n (-1)^{n+s} \{a_{ns}\} \cdot \text{ddet}(R_{s-1,1}), \\ \text{pper}(A) &= \sum_{s=1}^n \{a_{ns}\} P_{ns} = \sum_{s=1}^n \{a_{ns}\} \cdot \text{pper}(R_{s-1,1}). \end{aligned}$$

Более подробную информацию о понятиях парадетерминанта и парAPERманента читатель найдет в [5].

3. Перейдем к основным результатам работы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Пусть задана квадратная матрица

$$A = (a_{ij})_{i,j=1,2,\dots,n}.$$

Преобразованием Поля этой матрицы назовем расстановку знаков “+”, “−” перед ее элементами, которое обращает перманент в детерминант. Такое преобразование обозначим через $P(A)$.

Целью этой части работы является выделение одного класса матриц, для которых существует преобразование Поля.

В [8] матрицу вида

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n-1,1} & b_{n-1,2} & b_{n-1,3} & \cdots & b_{n-1,n-1} & 1 \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \cdots & b_{n,n-1} & b_{nn} \end{pmatrix} \quad (5)$$

называют *нижней квазитреугольной матрицей*. В этой же работе установлена следующая связь парадетерминанта любой треугольной матрицы с детерминантом нижней квазитреугольной матрицы.

ТЕОРЕМА 2. Для любой треугольной матрицы (1) и нижней квазитреугольной матрицы (5) справедливо тождество

$$\text{ddet}(A) = \det(B),$$

где

$$b_{ij} = \{a_{ij}\} = \prod_{k=j}^i a_{ik}, \quad 1 \leq j \leq i \leq n.$$

Там же приводится такое следствие этой теоремы.

СЛЕДСТВИЕ 1. Для любой нижней квазитреугольной матрицы (5) справедливо равенство

$$\begin{vmatrix} b_{11} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n-1,1} & b_{n-1,2} & b_{n-1,3} & \dots & b_{n-1,n-1} & 1 \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \dots & b_{n,n-1} & b_{nn} \end{vmatrix} = \left\langle \begin{matrix} b_{11} \\ \frac{b_{21}}{b_{22}} & b_{22} \\ \frac{b_{31}}{b_{32}} & \frac{b_{32}}{b_{33}} & b_{33} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \frac{b_{n1}}{b_{n2}} & \frac{b_{n2}}{b_{n3}} & \frac{b_{n3}}{b_{n4}} & \dots & b_{nn} \end{matrix} \right\rangle. \quad (6)$$

ПРИМЕЧАНИЕ 3. Обратим внимание на то, что равенство (6) справедливо также тогда, когда некоторые элементы нижней квазитреугольной матрицы равны нулю, так как при нахождении значения соответственного парадетерминанта нули сокращаются и неопределенности уничтожаются.

Первая часть доказательства теоремы 2 состоит в установлении биекции между слагаемыми парадетерминанта треугольной матрицы A и слагаемыми детерминанта квазитреугольной матрицы B . Вторая часть теоремы посвящена соответствию знаков этих слагаемых. Поскольку перманенты квадратных матриц отличаются от детерминантов тех же матриц только знаками, то из следствия 1 этой теоремы вытекает справедливость равенства

$$\text{per}(B) = \text{pper}(A), \quad (7)$$

где B и A – соответственно нижняя квазитреугольная матрица (5) и треугольная матрица (1), причем

$$a_{ij} = \frac{b_{ij}}{b_{i,j+1}}.$$

В [5] установлена также связь между парадетерминантом треугольной матрицы (1) и параперманентом некоторой треугольной матрицы:

$$\text{ddet}(a_{ij})_{1 \leq j \leq i \leq n} = \text{pper}((-1)^{\delta_{ij}+1} \cdot a_{ij})_{1 \leq j \leq i \leq n}.$$

Из последнего равенства непосредственно вытекает равенство

$$\text{pper}(a_{ij})_{1 \leq j \leq i \leq n} = \text{ddet}((-1)^{\delta_{ij}+1} \cdot a_{ij})_{1 \leq j \leq i \leq n}. \quad (8)$$

Таким образом, учитывая равенства (7), (8), получим следующие соотношения:

$$\text{per}(b_{ij})_{i,j=1,2,\dots,n} = \text{pper}\left(\frac{b_{ij}}{b_{i,j+1}}\right)_{1 \leq j \leq i \leq n} = \text{ddet}\left((-1)^{\delta_{ij}+1} \frac{b_{ij}}{b_{i,j+1}}\right)_{1 \leq j \leq i \leq n}.$$

Но поскольку

$$\prod_{k=j}^i \frac{b_{ik}}{b_{i,k+1}} = b_{ij},$$

то справедливо тождество

$$\text{per}(b_{ij})_{i,j=1,2,\dots,n} = \det((-1)^{i-j}b_{ij})_{i,j=1,2,\dots,n},$$

а заодно и следующая

ТЕОРЕМА 3. *Для квазитреугольной матрицы (5) существует преобразование Поля*

$$P(B) = (-1)^{i-j}b_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n,$$

т.е. справедливо равенство

$$\text{per}(B) = \det(P(B)).$$

Интересным является тот факт, что если в квазитреугольной матрице (5) добавить хотя бы один ненулевой элемент b_{ij} , $i - j > -1$, то преобразования Поля для такой матрицы уже не существует.

Действительно, пусть B^* – квадратная матрица, полученная из квазитреугольной матрицы (5) прибавлением ненулевого элемента b_{ij} , $2 \leq j - i$. Тогда в силу того, что перманент любой матрицы не меняется от перестановки местами любых ее столбцов или строчек, перейдем к новой матрице, в которой i -й столбец меняется местами с j -м столбцом. При этом получим перманент матрицы, в которой на главной диагонали можно последовательно выделить блоки

$$\begin{aligned} &[b_{11}], \quad [b_{22}], \quad \dots, \quad [b_{i-1,i-1}], \quad [b_{ij}], \quad [b_{i+1,i+1}], \quad \dots, \quad [b_{j-2,j-2}], \\ &\begin{bmatrix} b_{j-1,j-2} & b_{j-1,j-1} & b_{j-1,i} \\ b_{j,j-2} & b_{j,j-1} & b_{ji} \\ b_{j+1,j-2} & b_{j+1,j-1} & b_{j+1,i} \end{bmatrix}, \\ &[b_{j+2,j+2}], \quad \dots, \quad [b_{nn}]. \end{aligned}$$

Таким образом, в исходном перманенте шесть трансверсалий будут строиться при помощи выделенных на главной диагонали элементов и шести трансверсалий блока

$$\begin{bmatrix} b_{j-1,j-2} & b_{j-1,j-1} & b_{j-1,i} \\ b_{j,j-2} & b_{j,j-1} & b_{ji} \\ b_{j+1,j-2} & b_{j+1,j-1} & b_{j+1,i} \end{bmatrix}.$$

Причем три из них, соответствующие четным перестановкам, должны быть положительными, а остальные три – отрицательными. Но Поля доказано [2], что так расставить знаки в матрице третьего порядка невозможно. Это и доказывает наше утверждение.

Таким образом, квазитреугольная матрица является максимальной, по количеству ненулевых элементов матрицей, для которой еще существует преобразование Поля. Так как квазитреугольная матрица состоит из $(n^2 + 3n - 2)/2$ элементов, то доказанная теорема согласуется с утверждением Гибсона [9], что если $(0, 1)$ -матрица A порядка n имеет положительный перманент и если перманент A можно обратить в детерминант, приписывая элементам A знаки $\pm$, то число единиц в A не превосходит $(n^2 + 3n - 2)/2$.

Докажем еще одно утверждение, позволяющее найти еще одно преобразование Поля для нижней квазитреугольной матрицы.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Справедливо равенство*

$$\begin{vmatrix}
 a_{11} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\
 -a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 & 0 \\
 a_{31} & -a_{32} & \cdots & 0 & 0 \\
 \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 (-1)^{n-3}a_{n-2,1} & (-1)^{n-4}a_{n-2,2} & \cdots & 1 & 0 \\
 (-1)^{n-2}a_{n-1,1} & (-1)^{n-3}a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & 1 \\
 (-1)^{n-1}a_{n,1} & (-1)^{n-2}a_{n,2} & \cdots & -a_{n,n-1} & a_{n,n}
 \end{vmatrix}
 =
 \begin{vmatrix}
 a_{11} & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
 a_{21} & a_{22} & -1 & \cdots & 0 & 0 \\
 a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 & 0 \\
 \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 a_{n-2,1} & a_{n-2,2} & a_{n-2,3} & \cdots & -1 & 0 \\
 a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \cdots & a_{n-1,n-1} & -1 \\
 a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n}
 \end{vmatrix}. \quad (9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $n = 1$ и $n = 2$ равенство, очевидно, справедливо.

Пусть равенство (9) справедливо при $n = 1, 2, \dots, k - 1$. Докажем его справедливость при $n = k$. С этой целью достаточно разложить детерминант левой части равенства (9) по элементам последнего столбца на два детерминанта $(k - 1)$ -го порядка, умножить второй детерминант и каждый элемент его последней строчки на (-1) , применить к обоим детерминантам $(k - 1)$ -го порядка утверждение (9) при $n = k - 1$ и обнаружить, что сумма двух слагаемых является результатом разложения правой части равенства (9) по элементам последнего столбца.

Таким образом, справедлива также

ТЕОРЕМА 4. *Для квазитреугольной матрицы (5) существует преобразование Поля*

$$P(B) = \begin{cases} b_{ij}, & 1 \leq j \leq i \leq n, \\ -1, & j - i = 1, \\ 0, & j - i \geq 2. \end{cases}$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. Е. Тараканов, *Комбинаторные задачи и $(0, 1)$ -матрицы*, Проблемы науки и технического прогресса, Наука, М., 1985.
- [2] G. Polya, "Aufgabe 424", *Arch. Math. Phys.* (3), **20** (1913), 271.
- [3] M. Marcus, H. Minc, "On the relation between the determinant and the permanent", *Illinois J. Math.*, **5** (1961), 376–381.
- [4] Х. Минк, *Перманенты*, Мир, М., 1982.
- [5] R. A. Zators'kii, "On paraderminants and parapermanents of triangular matrices", *Mat. Stud.*, **17**:1 (2002), 3–17.
- [6] Р. А. Заторский, "Определители треугольных матриц и траектории на диаграммах Ферре", *Матем. заметки*, **72**:6 (2002), 834–852.

- [7] Г. Эндрюс, *Теория разбиений*, Наука, М., 1982.
- [8] R. A. Zators'kiĭ, Ī. Ī. Lĭshchyns'kiĭ, "On a connection between determinants and parade-terminants", *Mat. Stud.*, **25**:1 (2006), 97–102.
- [9] P. M. Gibson, "Conversion of the permanent into the determinant", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **27**:3 (1971), 471–476.

В. Е. Тараканов

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

Поступило

09.03.2008

Р. А. Заторский

Прикарпатский национальный университет им. В. Стефаника

E-mail: romazz@rambler.ru