Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Юрко, Обратная задача для операторов Штурма–Лиувилля на графе-еже, *Матем. заметки*, 2011, том 89, выпуск 3, 459–471

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm6591>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 16:58:17

Обратная задача для операторов Штурма–Лиувилля на графе-еже

В. А. Юрко

Исследуется обратная задача спектрального анализа для дифференциальных операторов Штурма–Лиувилля на графе-еже с циклом и со стандартными условиями склейки во внутренних вершинах. Доказана теорема единственности и получено конструктивное решение для этого класса обратных задач.

Библиография: 31 названий.

1. Введение

1.1. В статье исследуется обратная спектральная задача для дифференциальных операторов Штурма–Лиувилля на графе-еже. Обратные спектральные задачи состоят в восстановлении операторов по их спектральным характеристикам. Основные результаты по обратным спектральным задачам на *интервале* представлены в монографиях [1]–[8]. Дифференциальные операторы на графах (пространственных сетях, деревьях) часто возникают в естествознании и технике (см. [9]–[11]). Большинство работ в этом направлении посвящено так называемым прямым задачам изучения свойств спектра и корневых функций операторов на графе. Обратные спектральные задачи, в силу их нелинейности, являются более трудными, и в настоящее время есть только несколько работ в этой области. В частности, обратные спектральные задачи восстановления *коэффициентов* дифференциальных операторов (потенциалов) на произвольного вида *деревьях* (т.е. на графах без циклов) по системе спектров, по функциям Вейля и по спектральным данным исследовались в [12]–[17] и других работах. Для графов с циклами отметим работы [18]–[20], где приведено решение обратных задач восстановления коэффициентов операторов Штурма–Лиувилля для частного случая графа с одним циклом и с произвольным числом ребер, примыкающих к циклу в одной точке.

В данной статье рассматривается более общий класс графов с циклом – так называемые графы-ежи (определение см. в п. 1.2), в которых граничные ребра могут примыкать к циклу произвольным образом и в любом числе точек. Этот класс порождает новые качественные трудности при исследовании обратной задачи. В работе дается постановка обратной задачи и получено ее решение для операторов Штурма–Лиувилля на графе-еже с циклом и со стандартными условиями склейки во

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Национального научного совета Тайваня (гранты 10-01-00099 и 10-01-92001-ННС).

Рис. 1

внутренних вершинах. Исследуются свойства спектров, характеристических функций и функций Вейля краевых задач на графе-еже. Доказана теорема единственности решения обратной задачи и получено конструктивное решение этого класса обратных задач.

Отметим, что результаты и методы теории обратных спектральных задач могут быть полезны и при исследовании обратных задач для уравнений с частными производными (см. [4]). По поводу обратных задач для уравнений с частными производными см. монографии [21]–[23] и литературу в них.

1.2. Рассмотрим компактный граф T в $\mathbb{R}^m$ с множеством ребер $\mathcal{E} = \{e_0, \dots, e_r\}$ и множеством вершин $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_r; u_1, \dots, u_N\}$, где $V = \{v_1, \dots, v_r\}$ – граничные вершины, $U = \{u_1, \dots, u_N\}$ – внутренние вершины, $E = \{e_1, \dots, e_r\}$ – граничные ребра, $e_0 = \bigcup_{i=1}^N e_i^0$ – цикл, $e_i^0 = [u_i, u_{i+1}]$, $i = 1, \dots, N$, $u_{N+1} := u_1$, $U = E \cap e_0$. Каждое граничное ребро e_j , $j = 1, \dots, r$, имеет начальную точку в вершине v_j , и конечную точку на множестве U . Множество E состоит из N групп ребер:

$$E = \bigcup_{i=1}^N E_i, \quad E_i \cap e_0 = u_i.$$

Пусть r_i – число ребер в E_i ; $r = r_1 + \dots + r_N$. Обозначим $s_0 = 1$, $s_i = r_1 + \dots + r_i$, $i = 1, \dots, N$. Тогда

$$E_i = \{e_j\}, \quad j = s_{i-1} + 1, \dots, s_i, \quad u_i = \bigcap_{j=s_{i-1}+1}^{s_i} e_j, \quad i = 1, \dots, N.$$

Таким образом, граничное ребро $e_j \in E_i$ можно рассматривать как отрезок $e_j = [v_j, u_i]$. Граф такой структуры будем называть *графом-ежом*. Пример графа T с $N = 3$, $r = 4$, $r_1 = 2$, $r_2 = r_3 = 1$ см. на рис. 1.

Пусть T_j – длина ребра e_j , $j = 0, \dots, r$, а T_i^0 – длина e_i^0 . Тогда $T_0 = T_1^0 + \dots + T_N^0$. Каждое ребро e_j , $j = 0, \dots, r$, параметризуется параметром $x_j \in [0, T_j]$. Для нас удобно выбрать следующую ориентацию: $x_j = 0$ соответствует вершине v_j при $j = 1, \dots, r$, а $x_0 = 0$ соответствует точке u_1 . Каждая часть e_i^0 , $i = 1, \dots, N$, цикла e_0 параметризуется параметром $\xi_i \in [0, T_i^0]$, причем $\xi_i = 0$ соответствует точке u_i , а $\xi_i = T_i^0$ точке u_{i+1} .

1.3. Интегрируемая функция Y на T может быть представлена в виде $Y = \{y_j\}_{j=0,\dots,r}$, где функция $y_j(x_j)$, $x_j \in [0, T_j]$, определена на ребре e_j . Функция y_0 имеет вид $y_0 = \{y_i^0\}_{i=1,\dots,N}$, где функция $y_i^0(\xi_i)$, $\xi_i \in [0, T_i^0]$, определена на e_i^0 .

Пусть $q = \{q_j\}_{j=0,\dots,r}$ – интегрируемая вещественная функция на T ; q называется *потенциалом*. Рассмотрим следующее дифференциальное уравнение на T :

$$-y_j''(x_j) + q_j(x_j)y_j(x_j) = \lambda y_j(x_j), \quad x_j \in [0, T_j], \quad (1)$$

где $j = 0, \dots, r$, λ – спектральный параметр, функции y_j , y_j' , $j = 0, \dots, r$, абсолютно непрерывны на $[0, T_j]$ и удовлетворяют следующим условиям склейки в каждой внутренней вершине u_i , $i = 1, \dots, N$:

$$\left. \begin{aligned} y_i^0(0) &= y_{i-1}^0(T_{i-1}^0) = y_j(T_j) \quad \text{для всех } e_j \in E_i \quad (\text{условие непрерывности}), \\ (y_i^0)'(0) &= (y_{i-1}^0)'(T_{i-1}^0) + \sum_{e_j \in E_i} y_j'(T_j) \quad (\text{условие Кирхгофа}), \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где $y_0^0 := y_N^0$, $T_0^0 := T_N^0$. Условия склейки (2) называются стандартными условиями. В электрических сетях (2) выражает закон Кирхгофа; при колебаниях упругих сетей (2) выражает баланс напряжений и т.д.

Рассмотрим краевую задачу $L_0(q)$ на T для уравнения (1) с условиями склейки (2) и с краевыми условиями Дирихле в граничных вершинах $v_1, \dots, v_r$:

$$y_j(0) = 0, \quad j = 1, \dots, r.$$

Через $\Lambda_0 = \{\lambda_{n0}\}_{n \geq 0}$ обозначим собственные значения (с учетом кратностей) краевой задачи $L_0(q)$. Рассмотрим также краевые задачи $L_{\nu_1, \dots, \nu_p}(q)$, $p = 1, \dots, r$, $1 \leq \nu_1 < \dots < \nu_p \leq r$, для уравнения (1) с условиями склейки (2) и с краевыми условиями

$$y_i'(0) = 0, \quad i = \nu_1, \dots, \nu_p, \quad y_j(0) = 0, \quad j = 1, \dots, r, \quad j \neq \nu_1, \dots, \nu_p.$$

Через $\Lambda_{\nu_1, \dots, \nu_p} := \{\lambda_{n, \nu_1, \dots, \nu_p}\}_{n \geq 0}$ обозначим собственные значения (с учетом кратностей) краевой задачи $L_{\nu_1, \dots, \nu_p}(q)$.

Пусть $S_j(x_j, \lambda)$, $C_j(x_j, \lambda)$, $j = 0, \dots, r$, $x_j \in [0, T_j]$, – решения уравнения (1) на ребре e_j при начальных условиях $S_j(0, \lambda) = C_j'(0, \lambda) = 0$, $S_j'(0, \lambda) = C_j(0, \lambda) = 1$. При каждом фиксированном $x_j \in [0, T_j]$ функции $S_j^{(\nu)}(x_j, \lambda)$, $C_j^{(\nu)}(x_j, \lambda)$, $j = 0, \dots, r$, $\nu = 0, 1$, являются целыми по λ порядка $1/2$. Кроме того, $\langle C_j^{(\nu)}(x_j, \lambda), S_j(x_j, \lambda) \rangle \equiv 1$, где $\langle y, z \rangle := yz' - y'z$ – вронскиан y и z . Обозначим

$$a_1(\lambda) := S_0(T_0, \lambda), \quad H(\lambda) := C_0(T_0, \lambda) - S_0'(T_0, \lambda).$$

Пусть $\{z_n\}_{n \geq 1}$ – нули целой функции $a_1(\lambda)$, и положим $\omega_n := \text{sign} H(z_n)$, $\Omega = \{\omega_n\}_{n \geq 1}$.

Выберем и зафиксируем по одному ребру $e_{\xi_i} \in E_i$ из каждого блока E_i , $i = 1, \dots, N$, т.е. $s_{i-1} + 1 \leq \xi_i \leq s_i$. Через $\xi := \{k : k = \xi_1, \dots, \xi_N\}$ обозначим множество индексов ξ_i , $i = 1, \dots, N$. Обратная задача ставится следующим образом.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА 1. Даны спектры Λ_j , $j = 0, \dots, r$, $\Lambda_{\nu_1, \dots, \nu_p}$, $p = 2, \dots, N$, $1 \leq \nu_1 < \dots < \nu_p \leq r$, $\nu_j \in \xi$ и Ω . Построить потенциал q на T .

В обратной задаче 1 задается $2^N + r - N$ спектров и последовательность знаков Ω . Данная постановка обратной задачи является естественным обобщением известных обратных задач, исследованных в [18], [19], [24], [25] и других работах. В [20] показано, что задание последовательности знаков может быть заменено заданием дополнительного спектра, однако это приводит к некоторому переопределению данных.

ПРИМЕР 1. Пусть $N = 1$. Тогда мы задаем $r + 1$ спектров Λ_j , $j = 0, \dots, r$, и Ω . Эта обратная задача решена в [18], [19].

ПРИМЕР 2. Пусть $N = r$, т.е. $r_i = 1$, $i = 1, \dots, N$. Тогда мы задаем все 2^N спектров $\Lambda_0, \Lambda_{\nu_1, \dots, \nu_p}$, $p = 1, \dots, N$, $1 \leq \nu_1 < \dots < \nu_p \leq N$, и Ω .

ПРИМЕР 3. Пусть $N = 3$, $r = 4$ (см. рис. 1).

Случай 1. Возьмем $\xi_1 = 2$, $\xi_2 = 3$, $\xi_3 = 4$. Тогда задаем Ω и следующие спектры: $\Lambda_0, \Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \Lambda_4, \Lambda_{23}, \Lambda_{24}, \Lambda_{34}, \Lambda_{234}$.

Случай 2. Возьмем $\xi_1 = 1$, $\xi_2 = 3$, $\xi_3 = 4$. Тогда задаем Ω и следующие спектры: $\Lambda_0, \Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \Lambda_4, \Lambda_{13}, \Lambda_{14}, \Lambda_{34}, \Lambda_{134}$.

Сформулируем теорему единственности решения обратной задачи 1. Для этого наряду с q рассмотрим потенциал $\tilde{q}$. Везде далее, если символ α обозначает объект, относящийся к q , то $\tilde{\alpha}$ будет обозначать аналогичный объект, относящийся к $\tilde{q}$.

ТЕОРЕМА 1. Если $\Lambda_j = \tilde{\Lambda}_j$, $j = 0, \dots, r$, $\Lambda_{\nu_1, \dots, \nu_p} = \tilde{\Lambda}_{\nu_1, \dots, \nu_p}$, $p = 2, \dots, N$, $1 \leq \nu_1 < \dots < \nu_p \leq r$, $\nu_j \in \xi$, и $\Omega = \tilde{\Omega}$, то $q = \tilde{q}$.

Эта теорема будет доказана в разделе 4. Кроме того, мы дадим конструктивную процедуру решения обратной задачи 1. В разделах 2 и 3 вводятся основные понятия и приводятся вспомогательные утверждения.

2. Функции Вейля

2.1. Рассмотрим потенциал $q_0 = \{q_i^0\}_{i=1, \dots, N}$ на e_0 , где q_i^0 определены на e_i^0 . Пусть $S_{i0}(\xi_i, \lambda)$ и $C_{i0}(\xi_i, \lambda)$, $i = 1, \dots, N$, $\xi_i \in [0, T_i^0]$ – решения уравнения

$$-\frac{d^2}{d\xi_i^2} y_i^0(\xi_i) + q_i^0(\xi_i) y_i^0(\xi_i) = \lambda y_i^0(\xi_i), \quad \xi_i \in [0, T_i^0],$$

на e_i^0 при начальных условиях

$$S_{i0}(0, \lambda) = C'_{i0}(0, \lambda) = 0, \quad S'_{i0}(0, \lambda) = C_{i0}(0, \lambda) = 1. \quad (3)$$

Обозначим $T_i^* := T_1^0 + \dots + T_i^0$, $i = 1, \dots, N$.

ЛЕММА 1. При $i = 1, \dots, N - 1$ справедливы следующие соотношения:

$$S_0^{(\nu)}(T_{i+1}^*, \lambda) = S_0(T_i^*, \lambda) C_{i+1,0}^{(\nu)}(T_{i+1}^0, \lambda) + S_0'(T_i^*, \lambda) S_{i+1,0}^{(\nu)}(T_{i+1}^0, \lambda), \quad (4)$$

$$C_0^{(\nu)}(T_{i+1}^*, \lambda) = C_0(T_i^*, \lambda) C_{i+1,0}^{(\nu)}(T_{i+1}^0, \lambda) + C_0'(T_i^*, \lambda) S_{i+1,0}^{(\nu)}(T_{i+1}^0, \lambda). \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем $i = 1, \dots, N - 1$. Пусть $x \in [T_i^*, T_{i+1}^*]$. Используя фундаментальную систему решений $S_{i0}(\xi_i, \lambda)$, $C_{i0}(\xi_i, \lambda)$, имеем

$$S_0(x, \lambda) = A(\lambda)C_{i+1,0}(x - T_i^*, \lambda) + B(\lambda)C_{i+1,0}(x - T_i^*, \lambda).$$

Учитывая (3), находим коэффициенты $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$:

$$A(\lambda) = S_0(T_i^*, \lambda), \quad B(\lambda) = S'_0(T_i^*, \lambda)$$

и, следовательно,

$$S_0(x, \lambda) = S_0(T_i^*, \lambda)C_{i+1,0}(x - T_i^*, \lambda) + S'_0(T_i^*, \lambda)C_{i+1,0}(x - T_i^*, \lambda).$$

Полагая здесь $x = T_{i+1}^*$, приходим к (4). Соотношение (5) доказывается аналогично.

2.2. Зафиксируем $k = 1, \dots, r$. Пусть $\Phi_k = \{\Phi_{kj}\}_{j=0, \dots, r}$ – решение уравнения (1), удовлетворяющее (2) и краевым условиям

$$\Phi_{kj}(0, \lambda) = \delta_{jk}, \quad j = 1, \dots, r, \quad (6)$$

где δ_{jk} – символ Кронекера. Положим $M_k(\lambda) := \Phi'_{kk}(0, \lambda)$, $k = 1, \dots, r$. Функция $M_k(\lambda)$ называется *функцией Вейля* относительно граничной вершины v_k . Ясно, что

$$\Phi_{kk}(x_k, \lambda) = C_k(x_k, \lambda) + M_k(\lambda)S_k(x_k, \lambda), \quad x_k \in [0, T_k], \quad k = 1, \dots, r, \quad (7)$$

и, следовательно,

$$\langle \Phi_{kk}(x_k, \lambda), S_k(x_k, \lambda) \rangle \equiv 1. \quad (8)$$

Обозначим $M_{kj}^1(\lambda) := \Phi_{kj}(0, \lambda)$, $M_{kj}^0(\lambda) := \Phi'_{kj}(0, \lambda)$. Тогда

$$\begin{aligned} \Phi_{kj}(x_j, \lambda) &= M_{kj}^1(\lambda)C_j(x_j, \lambda) + M_{kj}^0(\lambda)S_j(x_j, \lambda), \\ x_j &\in [0, T_j], \quad j = 0, \dots, r, \quad k = 1, \dots, r. \end{aligned} \quad (9)$$

В частности, $M_{kk}^1(\lambda) = 1$, $M_{kk}^0(\lambda) = M_k(\lambda)$. Подставляя (9) в (2) и (6), получаем линейную алгебраическую систему D_k относительно $M_{kj}^\nu(\lambda)$, $\nu = 0, 1$, $j = 0, \dots, r$. Определитель $\Delta_0(\lambda)$ системы D_k не зависит от k и имеет вид

$$\Delta_0(\lambda) = \sigma(\lambda) \left(a(\lambda) \sum_{k=1}^N \sum_{1 \leq \mu_1 < \dots < \mu_k \leq N} a_{\mu_1 \dots \mu_k}(\lambda) \omega_{\mu_1}(\lambda) \dots \omega_{\mu_k}(\lambda) \right), \quad (10)$$

где

$$\sigma(\lambda) = \prod_{j=1}^r S_j(T_j, \lambda), \quad \omega_i(\lambda) = \sum_{j=s_{i-1}+1}^{s_i} \frac{S'_j(T_j, \lambda)}{S_j(T_j, \lambda)}, \quad (11)$$

$$a(\lambda) = C_0(T_0, \lambda) + S'_0(T_0, \lambda) - 2, \quad a_1(\lambda) = S_0(T_0, \lambda). \quad (12)$$

Отметим, что коэффициенты $a(\lambda)$ и $a_{\mu_1 \dots \mu_k}(\lambda)$ в (10) зависят только от $S_{i0}^{(\nu)}(T_i^0, \lambda)$ и $C_{i0}^{(\nu)}(T_i^0, \lambda)$, и (12) следует из леммы 1. Нам не нужны конкретные формулы для других коэффициентов $a_{\mu_1 \dots \mu_k}(\lambda)$. Функция $\Delta_0(\lambda)$ является целой по λ порядка $1/2$, и ее нули совпадают с собственными значениями краевой задачи $L_0(q)$. Функция $\Delta_0(\lambda)$ называется *характеристической функцией краевой задачи $L_0(q)$* . Пусть

$\Delta_{\nu_1, \dots, \nu_p}(\lambda)$, $p = 1, \dots, r$, $1 \leq \nu_1 < \dots < \nu_p \leq r$, — функция, полученная из $\Delta_0(\lambda)$ заменой $S_j^{(\nu)}(T_j, \lambda)$ на $C_j^{(\nu)}(T_j, \lambda)$ при $j = \nu_1, \dots, \nu_p$, $\nu = 0, 1$. Функция $\Delta_{\nu_1, \dots, \nu_p}(\lambda)$ является целой по λ порядка $1/2$, и ее нули совпадают с собственными значениями краевой задачи $L_{\nu_1, \dots, \nu_p}(q)$. Функция $\Delta_{\nu_1, \dots, \nu_p}(\lambda)$ называется *характеристической функцией краевой задачи* $L_{\nu_1, \dots, \nu_p}(q)$.

Решая алгебраическую систему D_k , получаем по формулам Крамера: $M_{kj}^s(\lambda) = \Delta_{kj}^s(\lambda)/\Delta_0(\lambda)$, $s = 0, 1$, $j = 0, \dots, r$, где определитель $\Delta_{kj}^s(\lambda)$ получается из $\Delta_0(\lambda)$ заменой столбца, соответствующего $M_{kj}^s(\lambda)$, на столбец членов. В частности,

$$M_k(\lambda) = -\frac{\Delta_k(\lambda)}{\Delta_0(\lambda)}, \quad k = 1, \dots, r. \quad (13)$$

Из (13) следует, что функции Вейля $M_k(\lambda)$ являются мероморфными по λ с множеством полюсов Λ_0 и множеством нулей Λ_k .

3. Вспомогательные утверждения

3.1. В этом пункте исследуется асимптотическое поведение решений уравнения (1). Пусть $\lambda = \rho^2$, $\text{Im } \rho \geq 0$. Обозначим

$$\Lambda := \{\rho : \text{Im } \rho \geq 0\}, \quad \Lambda^\delta := \{\rho : \arg \rho \in [\delta, \pi - \delta]\}.$$

Известно (см. [24]), что при каждом фиксированном $j = 0, \dots, r$ на ребре e_j существует фундаментальная система решений уравнения (1)

$$\{e_{j1}(x_j, \rho), e_{j2}(x_j, \rho)\}, \quad x_j \in [0, T_j], \quad \rho \in \Lambda, \quad |\rho| \geq \rho^*,$$

со свойствами:

- 1) функции $e_{js}^{(\nu)}(x_j, \rho)$, $\nu = 0, 1$ непрерывны при $x_j \in [0, T_j]$, $\rho \in \Lambda$, $|\rho| \geq \rho^*$;
- 2) при каждом $x_j \in [0, T_j]$ функции $e_{js}^{(\nu)}(x_j, \rho)$, $\nu = 0, 1$ аналитичны при $\text{Im } \rho > 0$, $|\rho| > \rho^*$;
- 3) равномерно по $x_j \in [0, T_j]$ имеют место асимптотические формулы

$$e_{j1}^{(\nu)}(x_j, \rho) = (i\rho)^\nu \exp(i\rho x_j)[1], \quad e_{j2}^{(\nu)}(x_j, \rho) = (-i\rho)^\nu \exp(-i\rho x_j)[1], \quad (14)$$

$$\rho \in \Lambda, \quad |\rho| \rightarrow \infty,$$

где $[1] = 1 + O(\rho^{-1})$.

Зафиксируем $k = 1, \dots, r$. Имеем

$$\Phi_{kj}(x_j, \lambda) = A_{kj}^1(\rho)e_{j1}(x_j, \rho) + A_{kj}^0(\rho)e_{j2}(x_j, \rho), \quad x_j \in [0, T_j]. \quad (15)$$

Подставляя (15) в (2) и (6), получаем линейную алгебраическую систему D_k^0 относительно $A_{kj}^\nu(\lambda)$, $\nu = 0, 1$, $j = 0, \dots, r$. Решая систему D_k^0 по формулам Крамера, получаем, в частности,

$$A_{kk}^1(\rho) = [1], \quad A_{kk}^0(\rho) = \exp(2i\rho T_k)[A_k], \quad \rho \in \Lambda^\delta, \quad |\rho| \rightarrow \infty,$$

где A_k — константа. Вместе с (14) и (15) это дает при каждом фиксированном $x_k \in [0, T_k]$:

$$\Phi_{kk}^{(\nu)}(x_k, \lambda) = (i\rho)^\nu \exp(i\rho x_k)[1], \quad \rho \in \Lambda^\delta, \quad |\rho| \rightarrow \infty. \quad (16)$$

В частности, $M_k(\lambda) = (i\rho)[1]$, $\rho \in \Lambda^\delta$, $|\rho| \rightarrow \infty$. Кроме того, равномерно по $x_j \in [0, T_j]$ имеем

$$S_j^{(\nu)}(x_j, \lambda) = \frac{1}{2i\rho} ((i\rho)^\nu \exp(i\rho x_j)[1] - (-i\rho)^\nu \exp(-i\rho x_j)[1]), \quad \rho \in \Lambda, \quad |\rho| \rightarrow \infty, \quad (17)$$

$$C_j^{(\nu)}(x_j, \lambda) = \frac{1}{2} ((i\rho)^\nu \exp(i\rho x_j)[1] + (-i\rho)^\nu \exp(-i\rho x_j)[1]), \quad \rho \in \Lambda, \quad |\rho| \rightarrow \infty. \quad (18)$$

3.2. В этом пункте исследуются свойства спектров и характеристических функций. Пусть $\lambda_{n0}^0 = (\rho_{n0}^0)^2$, $n \geq 0$ – собственные значения краевой задачи $L_0(0)$ с нулевым потенциалом, и пусть $\Delta_0^0(\lambda)$ – характеристическая функция для $L_0(0)$. Тогда $\Delta_0^0(\lambda)$ имеет вид (10), но с $S_j(x, \lambda) \equiv \sin \rho x / \rho$, $C_j(x, \lambda) \equiv \cos \rho x$, $j = 0, \dots, r$.

Пусть $\tau := \operatorname{Im} \rho$. Из (10) и (17), (18) следует, что при $|\rho| \rightarrow \infty$ имеет место соотношение

$$\Delta_0(\lambda) = \Delta_0^0(\lambda) + O\left(\rho^{-r-1} \exp\left(|\tau| \sum_{j=0}^r T_j\right)\right). \quad (19)$$

Используя (10) и (17)–(19), известным методом (см., например [25]) можно получить следующие свойства характеристической функции $\Delta_0(\lambda)$ и собственных значений Λ_0 краевой задачи $L_0(q)$.

1) При $\rho \in \Lambda$, $|\rho| \rightarrow \infty$,

$$\Delta_0(\lambda) = O\left(|\rho|^{-r} \exp\left(|\tau| \sum_{j=0}^r T_j\right)\right).$$

2) Существуют $h > 0$, $C_h > 0$ такие, что

$$|\Delta_0(\lambda)| \geq C_h |\rho|^{-r} \exp\left(|\tau| \sum_{j=0}^r T_j\right)$$

при $|\tau| \geq h$. Собственные значения $\lambda_{n0} = \rho_{n0}^2$ лежат в области $|\operatorname{Im} \rho| < h$.

3) Число N_ξ нулей функции $\Delta_0(\lambda)$ в прямоугольнике

$$\Pi_\xi = \{\rho : |\operatorname{Im} \rho| \leq h, \operatorname{Re} \rho \in [\xi, \xi + 1]\}$$

ограничено по ξ .

4) При $n \rightarrow \infty$

$$\rho_{n0} = \rho_{n0}^0 + O\left(\frac{1}{\rho_{n0}^0}\right).$$

Характеристические функции $\Delta_{\nu_1, \dots, \nu_p}(\lambda)$ имеют аналогичные свойства. В частности, при $\rho \in \Lambda$, $|\rho| \rightarrow \infty$,

$$\Delta_{\nu_1, \dots, \nu_p}(\lambda) = O\left(|\rho|^{p-r} \exp\left(|\tau| \sum_{j=0}^r T_j\right)\right).$$

3.3. В этом пункте исследуется восстановление характеристических функций по их нулям. Обозначим

$$\lambda_{n0}^{01} = \begin{cases} \lambda_{n0}^0, & \text{если } \lambda_{n0}^0 \neq 0, \\ 1, & \text{если } \lambda_{n0}^0 = 0. \end{cases} \quad (20)$$

По теореме Адамара [26; р. 289] имеем

$$\Delta_0^0(\lambda) = A_0 \prod_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_{n0}^0 - \lambda}{\lambda_{n0}^{01}}, \quad (21)$$

где

$$A_0 = (-1)^\sigma \frac{1}{\sigma!} \left(\frac{\partial^\sigma}{\partial \lambda^\sigma} \Delta_0^0(\lambda) \right)_{|\lambda=0} \quad (22)$$

и $\sigma \geq 0$ – кратность нулевого собственного значения.

Покажем, что

$$\Delta_0(\lambda) = A_0 \prod_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_{n0} - \lambda}{\lambda_{n0}^{01}}. \quad (23)$$

В самом деле, по теореме Адамара

$$\Delta_0(\lambda) = A \prod_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_{n0} - \lambda}{\lambda_{n0}^1}, \quad (24)$$

где $A \neq 0$ – константа и

$$\lambda_{n0}^1 = \begin{cases} \lambda_{n0}, & \text{если } \lambda_{n0} \neq 0, \\ 1, & \text{если } \lambda_{n0} = 0. \end{cases}$$

Из (21) и (24) вытекает, что

$$\frac{\Delta_0(\lambda)}{\Delta_0^0(\lambda)} = \frac{A}{A_0} \prod_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_{n0}^{01}}{\lambda_{n0}^1} \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{\lambda_{n0} - \lambda_{n0}^0}{\lambda_{n0}^0 - \lambda} \right).$$

Используя свойства характеристических функций и собственных значений, получаем для отрицательных λ

$$\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \frac{\Delta_0(\lambda)}{\Delta_0^0(\lambda)} = 1, \quad \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{\lambda_{n0} - \lambda_{n0}^0}{\lambda_{n0}^0 - \lambda} \right) = 1$$

и, следовательно,

$$A = A_0 \prod_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_{n0}^1}{\lambda_{n0}^{01}}.$$

Подставляя это соотношение в (24), приходим к (23).

Таким образом, задание спектра $\Lambda_0 = \{\lambda_{n0}\}_{n \geq 0}$ однозначно определяет характеристическую функцию $\Delta_0(\lambda)$ согласно (23), где $\{\lambda_{n0}^{01}\}$ и A_0 определены по (20) и (22). Аналогично

$$\Delta_{\nu_1, \dots, \nu_p}(\lambda) = A_{\nu_1, \dots, \nu_p} \prod_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_{n, \nu_1, \dots, \nu_p} - \lambda}{\lambda_{n, \nu_1, \dots, \nu_p}^{01}}, \quad (25)$$

где $\{\lambda_{n,\nu_1,\dots,\nu_p}^0\}_{n \geq 0}$ – собственные значения краевой задачи $L_{\nu_1,\dots,\nu_p}(0)$ с нулевым потенциалом,

$$\lambda_{n,\nu_1,\dots,\nu_p}^{01} = \begin{cases} \lambda_{n,\nu_1,\dots,\nu_p}^0, & \text{если } \lambda_{n,\nu_1,\dots,\nu_p}^0 \neq 0, \\ 1, & \text{если } \lambda_{n,\nu_1,\dots,\nu_p}^0 = 0, \end{cases} \quad (26)$$

$$A_{\nu_1,\dots,\nu_p} = (-1)^{\sigma(\nu_1,\dots,\nu_p)} \frac{1}{\sigma(\nu_1,\dots,\nu_p)} \left(\frac{\partial^{\sigma(\nu_1,\dots,\nu_p)}}{\partial \lambda^{\sigma(\nu_1,\dots,\nu_p)}} \Delta_{\nu_1,\dots,\nu_p}^0(\lambda) \right)_{|\lambda=0}, \quad (27)$$

где $\sigma(\nu_1,\dots,\nu_p) \geq 0$ – кратность нулевого собственного значения $L_{\nu_1,\dots,\nu_p}(0)$, а $\Delta_{\nu_1,\dots,\nu_p}^0(\lambda)$ – характеристическая функция $L_{\nu_1,\dots,\nu_p}(0)$.

4. Решение обратной задачи 1

В этом разделе приводится процедура решения обратной задачи 1 и доказывается его единственность. Сначала рассмотрим вспомогательную обратную задачу.

4.1. Зафиксируем $k = 1, \dots, r$ и рассмотрим следующую вспомогательную обратную задачу на ребре e_k , которую назовем IP(k).

ЗАДАЧА IP(k). Дана функция Вейля $M_k(\lambda)$. Построить $q_k(x_k), x_k \in [0, T_k]$.

В обратной задаче IP(k) мы строим потенциал только на ребре e_k , но функция Вейля $M_k(\lambda)$ несет глобальную информацию со всего графа. Другими словами, IP(k) не является локальной обратной задачей, относящейся к ребру e_k . Докажем теорему единственности решения задачи IP(k).

ТЕОРЕМА 2. Если $M_k(\lambda) = \widetilde{M}_k(\lambda)$, то $q_k(x_k) = \widetilde{q}_k(x_k)$ п.в. на $[0, T_k]$. Таким образом, задание функции Вейля M_k однозначно определяет потенциал q_k на ребре e_k .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим матрицу $P^k(x_k, \lambda) = [P_{js}^k(x_k, \lambda)]_{j,s=1,2}$ по формуле

$$P^k(x_k, \lambda) \begin{bmatrix} \widetilde{\Phi}_{kk}(x_k, \lambda) & \widetilde{S}_k(x_k, \lambda) \\ \widetilde{\Phi}'_{kk}(x_k, \lambda) & \widetilde{S}'_k(x_k, \lambda) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{kk}(x_k, \lambda) & S_k(x_k, \lambda) \\ \Phi'_{kk}(x_k, \lambda) & S'_k(x_k, \lambda) \end{bmatrix}. \quad (28)$$

Тогда (28) дает

$$\begin{aligned} \Phi_{kk}(x_k, \lambda) &= P_{11}^k(x_k, \lambda) \widetilde{\Phi}_{kk}(x_k, \lambda) + P_{12}^k(x_k, \lambda) \widetilde{\Phi}'_{kk}(x_k, \lambda), \\ S_k(x_k, \lambda) &= P_{11}^k(x_k, \lambda) \widetilde{S}_k(x_k, \lambda) + P_{12}^k(x_k, \lambda) \widetilde{S}'_k(x_k, \lambda). \end{aligned} \quad (29)$$

В силу (8) справедливо соотношение

$$P_{1s}^k(x_k, \lambda) = (-1)^s (\Phi_{kk}(x_k, \lambda) \widetilde{S}_k^{(2-s)}(x_k, \lambda) - \widetilde{\Phi}_{kk}^{(2-s)}(x_k, \lambda) S_k(x_k, \lambda)). \quad (30)$$

Из (16), (17) и (30) следует, что

$$P_{1s}^k(x_k, \lambda) = \delta_{1s} + O(\rho^{-1}), \quad \rho \in \Lambda^\delta, \quad |\rho| \rightarrow \infty, \quad x_k \in (0, T_k]. \quad (31)$$

Согласно (7) и (30) имеем

$$\begin{aligned} P_{1s}^k(x_k, \lambda) &= (-1)^s ((C_k(x_k, \lambda) \widetilde{S}_k^{(2-s)}(x_k, \lambda) - \widetilde{C}_k^{(2-s)}(x_k, \lambda) S_k(x_k, \lambda)) \\ &\quad + (M_k(\lambda) - \widetilde{M}_k(\lambda)) S_k(x_k, \lambda) \widetilde{S}_k^{(2-s)}(x_k, \lambda)). \end{aligned}$$

Так как $M_k(\lambda) = \widetilde{M}_k(\lambda)$, при каждом фиксированном x_k , функции $P_{1s}^k(x_k, \lambda)$ являются целыми по λ порядка $1/2$. Вместе с (31) это дает $P_{11}^k(x_k, \lambda) \equiv 1$, $P_{12}^k(x_k, \lambda) \equiv 0$. Подставляя эти соотношения в (29), получаем $\Phi_{kk}(x_k, \lambda) \equiv \widetilde{\Phi}_{kk}(x_k, \lambda)$ и $S_k(x_k, \lambda) \equiv \widetilde{S}_k(x_k, \lambda)$ при всех x_k и λ и, следовательно, $q_k(x_k) = \widetilde{q}_k(x_k)$ п.в. на $[0, T_k]$.

Используя метод спектральных отображений [7] для оператора Штурма–Лиувилля на ребре e_k , можно построить конструктивную процедуру решения обратной задачи IP(k). Здесь мы дадим краткие пояснения; подробнее см. [7]. Возьмем $\widetilde{q} = 0$. Тогда $\widetilde{S}_k(x_k, \lambda) = \sin \rho x_k / \rho$. Зафиксируем $k = 1, \dots, r$. Положим $\lambda' = \min_{l \geq 0} (\lambda_{l0}, \widetilde{\lambda}_{l0})$ и возьмем фиксированное $\delta > 0$. В λ -плоскости рассмотрим контур γ (с обходом против часовой стрелки) вида $\gamma = \gamma^+ \cup \gamma^- \cup \gamma'$, где

$$\gamma^\pm = \{\lambda : \pm \operatorname{Im} \lambda = \delta, \operatorname{Re} \lambda \geq \lambda'\},$$

$$\gamma' = \left\{ \lambda : \lambda - \lambda' = \delta \exp(i\alpha), \alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right) \right\}.$$

При каждом фиксированном $x_k \in [0, T_k]$ функция $S_k(x_k, \lambda)$ является единственным решением линейного интегрального уравнения

$$S_k(x_k, \lambda) = \widetilde{S}_k(x_k, \lambda) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \widetilde{D}_k(x_k, \lambda, \mu) S_k(x_k, \mu) d\mu, \quad (32)$$

где

$$\widetilde{D}_k(x, \lambda, \mu) = \int_0^x \widetilde{S}_k(t, \lambda) \widetilde{S}_k(t, \mu) \widehat{M}_k(\mu) dt, \quad \widehat{M}_k(\mu) := M_k(\mu) - \widetilde{M}_k(\mu).$$

Потенциал q_k на ребре e_k может быть построен из решения интегрального уравнения (32) по формуле

$$q_k(x_k) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (S_k(x_k, \lambda) \widetilde{S}_k(x_k, \lambda))' \widehat{M}_k(\lambda) d\lambda$$

или по формуле $q_k(x_k) = \lambda + S_k''(x_k, \lambda) / S_k(x_k, \lambda)$. Также возможно построить потенциал по дискретным спектральным данным. Для этого надо вычислить контурный интеграл в (32) по теореме о вычетах и привести интегральное уравнение (32) к уравнению в пространстве последовательностей; подробнее см. [7].

4.2. Обозначим $d(\lambda) := a(\lambda) + 2$, т.е. $d(\lambda) = C_0(T_0, \lambda) + S'_0(T_0, \lambda)$. Рассмотрим следующую вспомогательную задачу на ребре e_0 , которую будем называть задачей IP(0).

Задача IP(0). Даны $d(\lambda)$, $a_1(\lambda)$, Ω . Построить $q_0(x_0)$, $x_0 \in [0, T_0]$.

Эта обратная задача исследовалась в [27], [28] и других работах. Для удобства читателей мы опишем решение задачи IP(0). Напомним, что $H(\lambda) = C_0(T_0, \lambda) - S'_0(T_0, \lambda)$, $\omega_n = \operatorname{sign} H(z_n)$, где $\{z_n\}_{n \geq 1}$ — нули $a_1(\lambda)$. Ясно, что

$$S'_0(T_0, z_n) = \frac{d(z_n) - H(z_n)}{2}. \quad (33)$$

Так как $\langle C_0(T_0, \lambda), S_0(T_0, \lambda) \rangle \equiv 1$, то $H^2(\lambda) - d^2(\lambda) = -4(1 + C'_0(T_0, \lambda)a_1(\lambda))$ и, следовательно,

$$H(z_n) = \omega_n \sqrt{d^2(z_n) - 4}. \quad (34)$$

Положим $\alpha_n := \int_0^{T_0} S_0^2(t, z_n) dt$. Тогда (см. [3], [4])

$$\alpha_n = \dot{a}_1(z_n) S'_0(T_0, z_n), \quad \dot{a}_1(\lambda) := \frac{da_1(\lambda)}{d\lambda}. \quad (35)$$

Множество $\{z_n, \alpha_n\}_{n \geq 1}$ называется *спектральными данными* для потенциала q_0 . Известно (см. [1]–[4]), что функция q_0 однозначно строится по заданным спектральным данным $\{z_n, \alpha_n\}_{n \geq 1}$. Таким образом, задача IP(0) решена, и верна следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3. *Задание $d(\lambda)$, $a_1(\lambda)$, Ω однозначно определяет потенциал $q_0(x_0)$ на $[0, T_0]$. Функция q_0 может быть построена по приведенному ниже алгоритму.*

АЛГОРИТМ 1. Даны $d(\lambda)$, $a_1(\lambda)$, Ω .

- 1) Находим $\{z_n\}_{n \geq 1}$ как нули функции $a_1(\lambda)$.
- 2) Вычисляем $H(z_n)$ согласно (34).
- 3) Находим $S'_0(T_0, z_n)$ по формуле (33).
- 4) Вычисляем $\{\alpha_n\}_{n \geq 1}$, используя (35).
- 5) Строим q_0 по спектральным данным $\{z_n, \alpha_n\}_{n \geq 1}$, решая классическую обратную задачу Штурма–Лиувилля.

4.3. Перейдем теперь к решению обратной задачи 1. Сначала дадим доказательство теоремы 1. Предположим, что

$$\Lambda_j = \tilde{\Lambda}_j, \quad j = 0, \dots, r, \\ \Lambda_{\nu_1, \dots, \nu_p} = \tilde{\Lambda}_{\nu_1, \dots, \nu_p}, \quad p = 2, \dots, N, \quad 1 \leq \nu_1 < \dots < \nu_p \leq r, \quad \nu_j \in \xi$$

и $\Omega = \tilde{\Omega}$. Тогда согласно результатам пункта 3.3 имеем

$$\Delta_k(\lambda) \equiv \tilde{\Delta}_k(\lambda), \quad k = 0, \dots, r.$$

В силу (13) это дает

$$M_k(\lambda) \equiv \tilde{M}_k(\lambda), \quad k = 1, \dots, r.$$

Применяя теорему 2 при каждом фиксированном $k = 1, \dots, r$, получаем

$$q_k(x_k) = \tilde{q}_k(x_k) \quad \text{п.в. на } [0, T_k], \quad k = 1, \dots, r,$$

и, следовательно,

$$C_k(x_k, \lambda) \equiv \tilde{C}_k(x_k, \lambda), \quad S_k(x_k, \lambda) \equiv \tilde{S}_k(x_k, \lambda), \quad k = 1, \dots, r, \quad x_k \in [0, T_k]. \quad (36)$$

В силу (11) и (36) имеем $\sigma(\lambda) \equiv \tilde{\sigma}(\lambda)$ и $\omega_i(\lambda) \equiv \tilde{\omega}_i(\lambda)$, $i = 1, \dots, N$. Напомним, что $\Delta_0(\lambda)$ имеет вид (10), а $\Delta_{\nu_1, \dots, \nu_p}$, $p = 1, \dots, r$, $1 \leq \nu_1 < \dots < \nu_p \leq r$, получена из $\Delta_0(\lambda)$ заменой $S_j^{(\nu)}(T_j, \lambda)$ на $C_j^{(\nu)}(T_j, \lambda)$ при $j = \nu_1, \dots, \nu_p$, $\nu = 0, 1$. Используя эти выражения и (36), получаем, в частности, что $a(\lambda) = \tilde{a}(\lambda)$, $a_1(\lambda) = \tilde{a}_1(\lambda)$, и, следовательно, $d(\lambda) = \tilde{d}(\lambda)$. Так как $\Omega = \tilde{\Omega}$, то из теоремы 3 вытекает, что $q_0(x_0) = \tilde{q}_0(x_0)$ п.в. на $[0, T_0]$, и теорема 1 доказана.

Решение обратной задачи 1 может быть построено по следующему алгоритму.

АЛГОРИТМ 2. Даны Λ_j , $j = 0, \dots, r$, $\Lambda_{\nu_1, \dots, \nu_p}$, $p = 2, \dots, N$, $1 \leq \nu_1 < \dots < \nu_p \leq r$, $\nu_j \in \xi$, и Ω .

- 1) Строим $\Delta_0(\lambda)$ и $\Delta_{\nu_1, \dots, \nu_p}(\lambda)$ согласно (21)–(23) и (25)–(27), соответственно.
- 2) Находим $M_k(\lambda)$, $k = 1, \dots, r$, по формуле (13).
- 3) При каждом фиксированном $k = 1, \dots, r$ решаем обратную задачу IP(k) и находим $q_k(x_k)$, $x_k \in [0, T_k]$, на ребре e_k .
- 4) При каждом фиксированном $k = 1, \dots, r$ строим $C_k(x_k, \lambda)$, $S_k(x_k, \lambda)$, $x_k \in [0, T_k]$.
- 5) Вычисляем $a(\lambda)$ и $a_1(\lambda)$, используя $\Delta_0(\lambda)$ и $\Delta_{\nu_1, \dots, \nu_p}$, $p = 2, \dots, N$, $1 \leq \nu_1 < \dots < \nu_p \leq r$, $\nu_j \in \xi$.
- 6) Находим $d(\lambda) = a(\lambda) + 2$.
- 7) Строим $q_0(x_0)$, $x_0 \in [0, T_0]$ по $d(\lambda)$, $a_1(\lambda)$, Ω , используя алгоритм 1.

Примечание. За время, прошедшее с поступления статьи, были опубликованы работы [29]–[31] и другие, в которых получены важные результаты по теории обратных задач на графах с циклами.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. А. Марченко, *Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения*, Наукова думка, Киев, 1977.
- [2] Б. М. Левитан, *Обратные задачи Штурма–Лиувилля*, Наука, М., 1984.
- [3] J. Pöschel, E. Trubowitz, *Inverse Spectral Theory*, Pure Appl. Math., **130**, Academic Press, Boston, MA, 1987.
- [4] G. Freiling, V. Yurko, *Inverse Sturm–Liouville Problems and their Applications*, Nova Sci. Publ., Huntington, NY, 2001.
- [5] R. Beals, P. Deift, C. Tomei, *Direct and Inverse Scattering on the Line*, Math. Surveys Monogr., **28**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1988.
- [6] V. A. Yurko, *Inverse Spectral Problems for Differential Operators and their Applications*, Gordon and Breach Sci. Publ., Amsterdam, 2000.
- [7] V. Yurko, *Method of Spectral Mappings in the Inverse Problem Theory*, Inverse Ill-posed Probl. Ser., VSP, Utrecht, 2002.
- [8] В. А. Юрко, *Введение в теорию обратных спектральных задач*, Физматлит, М., 2007.
- [9] Ю. В. Покорный, О. М. Пенкин, В. Л. Прядиев, А. В. Боровских, К. П. Лазарев, С. А. Шабров, *Дифференциальные уравнения на геометрических графах*, Физматлит, М., 2004.
- [10] А. В. Боровских, Ю. В. Покорный, *Дифференциальные уравнения на сетях (геометрических графах)*, Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз., **106**, ВИНТИ, М., 2002.
- [11] Ю. В. Покорный, В. Л. Прядиев, “Некоторые вопросы качественной теории Штурма–Лиувилля на пространственной сети”, *УМН*, **59:3** (2004), 115–150.
- [12] M. I. Belishev, “Boundary spectral inverse problem on a class of graphs (trees) by the BC method”, *Inverse Problems*, **20:3** (2004), 647–672.
- [13] V. Yurko, “Inverse spectral problems for Sturm–Liouville operators on graphs”, *Inverse Problems*, **21:3** (2005), 1075–1086.
- [14] B. M. Brown, R. Weikard, “A Borg–Levinson theorem for trees”, *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, **461:2062** (2005), 3231–3243.
- [15] G. Freiling, V. Yurko, “Inverse problems for Sturm–Liouville operators on noncompact trees”, *Results Math.*, **50:3-4** (2007), 195–212.

- [16] В. А. Юрко, “Обратные задачи для дифференциальных операторов произвольных порядков на деревьях”, *Матем. заметки*, **83**:1 (2008), 139–152.
- [17] В. А. Юрко, “Обратная спектральная задача для пучков дифференциальных операторов на некомпактных пространственных сетях”, *Дифференц. уравнения*, **44**:12 (2008), 1658–1666.
- [18] В. А. Юрко, “Восстановление дифференциальных операторов на графе с циклом и с обобщенными условиями склейки”, *Изв. Саратовск. ун-та (Нов. сер.). Сер. матем., мех., информ.*, **8**:3 (2008), 10–17.
- [19] V. A. Yurko, “Inverse problems for Sturm-Liouville operators on graphs with a cycle”, *Oper. Matrices*, **2**:4 (2008), 543–553.
- [20] В. А. Юрко, “Восстановление дифференциальных операторов по спектрам на графе с циклом”, *Современные методы теории функций и смежные вопросы*, ВГУ, Воронеж, 2009, 196–197.
- [21] A. M. Denisov, *Elements of the Theory of Inverse Problems*, Inverse Ill-posed Probl. Ser., VSP, Utrecht, 1999.
- [22] A. I. Prilepko, D. G. Orlovsky, I. A. Vasin, *Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics*, Monogr. Textbooks Pure Appl. Math., **231**, Marcel Dekker, New York, 2000.
- [23] В. Г. Романов, *Обратные задачи математической физики*, Наука, М., 1984.
- [24] М. А. Наймарк, *Линейные дифференциальные операторы*, Наука, М., 1969.
- [25] R. Bellmann, K. L. Cooke, *Differential-difference equations*, Math. Sci. Engrg., **6**, Academic Press, New York, 1963.
- [26] J. B. Conway, *Functions of one complex variable. II*, Grad. Texts in Math., **159**, Springer-Verlag, New York, 1995.
- [27] И. В. Станкевич, “Об одной обратной задаче спектрального анализа для уравнения Хилла”, *Докл. АН СССР*, **192**:1 (1970), 34–37.
- [28] В. А. Марченко, И. В. Островский, “Характеристика спектра оператора Хилла”, *Матем. сб.*, **97**:4 (1975), 540–606.
- [29] V. Yurko, “Inverse problems for Sturm-Liouville operators on bush-type graphs”, *Inverse Problems*, **25**:10 (2009), 105008.
- [30] V. Yurko, “An inverse problem for Sturm-Liouville operators on A-graphs”, *Appl. Math. Lett.*, **23**:8 (2010), 875–879.
- [31] V. A. Yurko, “Inverse spectral problems for differential operators on arbitrary compact graphs”, *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, **18**:3 (2010), 245–261.

В. А. Юрко
Саратовский государственный университет
им. Н. Г. Чернышевского
E-mail: yurkova@info.sgu.ru

Поступило
23.10.2008
Исправленный вариант
12.03.2009