Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Ю. Максимовский, О биполигонах и мультиполигонах над полугруппами, *Матем. заметки*, 2010, том 87, выпуск 6, 855–866

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm6592>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 10:22:49

О биполигонах и мультиполигонах над полугруппами

М. Ю. Максимовский

В работе исследуются биполигоны (полигоны над двумя полугруппами) и мультиполигоны (полигоны над несколькими полугруппами) над некоторыми классами полугрупп. Получено полное описание биполигонов над двумя произвольными группами. Строение унитарных мультиполигонов над семейством моноидов (т.е. мультиполигонов, на которые единицы моноидов действуют тождественно) сведено к унитарному полигону над дискретным прямым произведением этих моноидов. Также получено описание биполигонов над полугруппами левых и правых нулей.

Библиография: 4 названия.

Правым полигоном над полугруппой S (или *правым S -полигоном*) называется множество X , на котором действует полугруппа S , причем $(xs_1)s_2 = x(s_1s_2)$ при $x \in X$, $s_1, s_2 \in S$ (см. [1]). Аналогичным образом определяется *левый полигон*. Если на множестве X действует две или более полугрупп, то можно ввести понятие биполигона [1] и мультиполигона. *Биполигон SX_T* (или *(S, T) -биполигон*) – это множество, на котором действуют полугруппа S слева и полугруппа T справа, причем действие этих полугрупп перестановочно (т.е. $(sx)t = s(xt)$ при $x \in X$, $s \in S$, $t \in T$). *Мультиполигон* – это множество X , на котором действуют полугруппы S_i некоторого семейства полугрупп $\{S_i \mid i \in I\}$ и их действия также перестановочны (т.е. $(xs_i)s_j = (xs_j)s_i$ при $s_i \in S_i$, $s_j \in S_j$, $i \neq j$). Если обычный полигон является алгебраической интерпретацией автомата, то мультиполигоны можно интерпретировать как автоматы с несколькими входными алфавитами.

Приведем основные результаты работы. Получено описание биполигонов над произвольными группами. Описание строения унитарного мультиполигона над семейством моноидов сведено к полигонам над дискретным прямым произведением этих моноидов. С помощью результатов из [2] получено полное описание биполигонов ${}_L X_R$, ${}_R X_L$, ${}_{L_1} X_{L_2}$, ${}_{R_1} X_{R_2}$, где L , L_i и R , R_i – полугруппы левых и правых нулей соответственно.

Правый S -полигон называется *унитарным*, если в полугруппе S есть единица e и $xe = x$ для любого $x \in X$. Аналогично определяются *унитарные* левые полигоны. (S, T) -Биполигон называется *унитарным*, если он является унитарным левым S -полигоном и одновременно унитарным правым T -полигоном. Наконец, мультиполигон X будет называться *унитарным*, если $xe_i = x$ при всех $x \in X$, где e_i – единица полугруппы S_i , $i \in I$.

Для полигонов X_i , $i \in I$, над одной и той же полугруппой будем обозначать через $\prod_{i \in I} X_i$ их *копроизведение* (т.е. дизъюнктное объединение). Далее, пусть M_i , $i \in I$, –

моноиды, т.е. полугруппы с единицей. Обозначим через e_i единицу моноида M_i . Тогда $\prod_{i \in I}^{\sim} M_i$ будет обозначать *дискретное прямое произведение* моноидов M_i , т.е. подмоноид прямого произведения $\prod_{i \in I} M_i$, состоящий из таких наборов (a_i) , что $a_i = e_i$ для почти всех $i \in I$.

Пусть G – группа и H – ее подгруппа, не обязательно нормальная. Пусть $G/H = \{Hg \mid g \in G\}$ – множество всех правых смежных классов. Хотя G/H в общем случае не является группой, оно является правым полигоном над G относительно операции $(Hg)g' = H(gg')$. Нетрудно видеть, что G/H – это общий вид циклических (или моногенных) унитарных полигонов над группой G .

Строение унитарного полигона над группой можно легко получить из известных фактов о группах подстановок (см. [3]). Действительно, пусть X – унитарный правый G -полигон, где G – группа с единицей e . Тогда X является дизъюнктивным объединением орбит: $X = \bigcup_i x_i G$, а каждая орбита $x_i G$, рассматриваемая как G -полигон, изоморфна полигону G/H_i , где $H_i = \{g \in G \mid x_i g = x_i\}$. Таким образом, мы получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1. *Любой унитарный полигон X над группой G изоморфен копроизведению моногенных полигонов:*

$$X \cong \coprod_{i \in I} G/H_i,$$

где H_i – подгруппа группы G для любого $i \in I$.

Для полугруппы S пусть $S\text{-Act}$ обозначает категорию левых, а $\text{Act-}S$ – категорию правых S -полигонов. Категории унитарных полигонов будем обозначать $S\text{-UAct}$ и $\text{UAct-}S$. Аналогичным образом вводятся обозначения категории (S, T) -биполигонов: $S\text{-Act-}T$, и категории унитарных (S, T) -биполигонов: $S\text{-UAct-}T$.

Нетрудно проверить, что переход от полугруппы S к дуальной полугруппе S^{op} (умножение $\circ$ в S^{op} определяется соотношением $s \circ t = ts$) позволяет превратить любой левый S -полигон $(X, \cdot)$ в правый S^{op} -полигон $(X, \circ)$, полагая $s \circ x = x \cdot s$: действительно, если $s, t \in S$ и $x \in X$, то

$$(s \circ t) \circ x = x \cdot (ts) = (x \cdot t) \cdot s = s \circ (t \circ x).$$

Таким образом, мы имеем изоморфизм категорий

$$S\text{-Act} \cong \text{Act-}S^{\text{op}}.$$

ТЕОРЕМА 2. *Пусть M_1 – моноид такой, что $M_1 \cong M_1^{\text{op}}$, и $\varphi M_1 \rightarrow M_2$ – соответствующий изоморфизм, M_2 – произвольный моноид. Тогда имеет место следующий изоморфизм категорий:*

$$M_1\text{-UAct-}M_2 \cong \text{UAct-}(M_1 \times M_2).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через e_1, e_2 единицы моноидов M_1, M_2 соответственно. Пусть X – унитарный (M_1, M_2) -биполигон. Введем умножение X на элементы моноида $M_1 \times M_2$ следующим образом:

$$x \cdot (g_1, g_2) = \varphi(g_1)xg_2.$$

Проверим, что X – унитарный правый $(M_1 \times M_2)$ -полигон. Действительно,

$$\begin{aligned} (x \cdot (g_1, g_2)) \cdot (g'_1, g'_2) &= (\varphi(g_1)xg_2) \cdot (g'_1, g'_2) \\ &= \varphi(g'_1)(\varphi(g_1)xg_2)g'_2 = \varphi(g_1g'_1)x(g_2g'_2) = x \cdot (g_1g'_1, g_2g'_2). \end{aligned}$$

Унитарность полигона X проверяется непосредственно.

Наоборот, пусть X – произвольный унитарный правый $(M_1 \times M_2)$ -полигон. Преобразуем его в $(M_1 \times M_2)$ -биполигон. Положим

$$g_1 \cdot x = x \cdot (\varphi(g_1), e_2), \quad x \cdot g_2 = x \cdot (e_1, g_2).$$

Проверим, что относительно этих операций X будет являться унитарным (M_1, M_2) -биполигоном. Действительно,

$$\begin{aligned} (g_1 x) g_2 &= (x \cdot (\varphi(g_1), e_2)) \cdot (e_1, g_2) = x \cdot ((\varphi(g_1), e_2)(e_1, g_2)) = x \cdot (\varphi(g_1), g_2), \\ g_1 (x g_2) &= (x \cdot (e_1, g_2)) \cdot (\varphi(g_1), e_2) = x \cdot ((e_1, g_2)(\varphi(g_1), e_2)) = x \cdot (\varphi(g_1), g_2). \end{aligned}$$

Унитарность биполигона X очевидна. Таким образом, если поставить в соответствие (M_1, M_2) -биполигону X (M_1, M_2) -полигон X и гомоморфизму $f: X \rightarrow Y$ (M_1, M_2) -биполигонов – то же отображение, то мы получим изоморфизм категорий

$$M_1\text{-UAct-}M_2 \cong \text{UAct-}(M_1 \times M_2).$$

Теорема доказана.

Утверждение теоремы справедливо, в частности, для групп $(\varphi(x) = x^{-1})$ и для коммутативных моноидов $(\varphi(x) = x)$.

Рассмотрим теперь унитарные мультиполигоны над семейством моноидов $\{S_i \mid i \in I\}$.

ТЕОРЕМА 3. *Категория унитарных $\{S_i \mid i \in I\}$ -мультиполигонов изоморфна категории унитарных правых полигонов над дискретным прямым произведением $\prod_{i \in I}^{\sim} S_i$ моноидов S_i .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть X – унитарный мультиполигон над семейством моноидов $\{S_i \mid i \in I\}$, и пусть $S = \prod_{i \in I}^{\sim} S_i$ – дискретное прямое произведение моноидов S_i . Обозначим через e_i единицу моноида S_i . Преобразуем X в унитарный правый S -полигон, определив умножение его на элементы из S . Пусть $x \in X$ и $a = (a_i) \in S$. Тогда существует конечное подмножество $I' = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ такое, что $a_j = e_j$ при $j \notin I'$. Положим

$$x \cdot (a_i) = x \cdot a_{i_1} \cdot a_{i_2} \cdots a_{i_k}.$$

Так как $x e_i = x$ при всех $i \in I$, то это умножение корректно. Проверим, что X является S -полигоном. Действительно,

$$\begin{aligned} x \cdot ((a_i) \cdot (b_i)) &= x \cdot (a_i b_i) \\ &= x \cdot a_{i_1} b_{i_1} \cdots a_{i_m} b_{i_m} = (x \cdot a_{i_1} \cdots a_{i_m}) \cdot b_{i_1} \cdots b_{i_m} = (x \cdot (a_i)) \cdot (b_i). \end{aligned}$$

Унитарность этого полигона очевидна.

Наоборот, пусть X – унитарный S -полигон. Для элемента $s \in S_j$ рассмотрим набор (a_i) , где

$$a_i = \begin{cases} s & \text{при } i = j, \\ e_i & \text{при } i \neq j. \end{cases}$$

Полагая $x \cdot s = x \cdot (a_i)$, мы сделаем X правым S_i -полигоном. Легко проверить, что тогда X – унитарный $\{S_i \mid i \in I\}$ -мультиполигон. Теорема доказана.

Опишем теперь строение произвольных, не обязательно унитарных, биполигонов над группами. Пусть G – группа и X – произвольный правый G -полигон. Тогда $X = Xe \cup (X \setminus Xe)$. Понятно, что Xe – унитарный подполигон полигона X , а множество $X \setminus Xe$ при умножении на элементы из G переходит в Xe . Таким образом, произвольный G -полигон может быть получен “раздуванием” унитарного, или, другими словами, с помощью присоединения к унитарному полигону некоторого множества. Имеет место следующая теорема, все утверждения которой легко проверяются.

ТЕОРЕМА 4. Пусть M – моноид, Y – унитарный правый M -полигон, A – любое множество, удовлетворяющее условию $A \cap Y = \emptyset$, и $\varphi: A \rightarrow Y$ – произвольное отображение. Положим $X = Y \cup A$ и для $x \in X$, $t \in M$ определим умножение по правилу

$$x \cdot t = \begin{cases} xt & \text{при } x \in Y, \\ \varphi(x)t & \text{при } x \in A. \end{cases}$$

Тогда X – правый M -полигон. Наоборот, всякий правый полигон над моноидом M изоморфен полигону, полученному таким образом.

Приведем теперь теорему, сводящую описание биполигонов над группами к унитарным биполигонам.

ТЕОРЕМА 5. Пусть выполнены следующие условия:

- (a) $M_1 Y, Z M_2$ – унитарные полигоны над группами M_1, M_2 ;
- (b) $C = Y \cap Z$ – биполигон, являющийся подполигоном полигонов Y и Z ;
- (c) A – множество такое, что $A \cap (Y \cup Z) = \emptyset$;
- (d) $X = A \cup Y \cup Z$;
- (e) $\varphi: X \rightarrow Z$ и $\psi: X \rightarrow Y$ – такие отображения, что $\varphi|_Z$ и $\psi|_Y$ – тождественные отображения множеств Z и Y ;
- (f) $\varphi(t_1 \psi(x)) = t_1 \psi(\varphi(x))$ и $\psi(\varphi(x) t_2) = \varphi(\psi(x)) t_2$ при $x \in X$, $t_1 \in M_1$, $t_2 \in M_2$.

Доопределим действия $M_1 \times Y \rightarrow Y$ и $Z \times M_2 \rightarrow Z$ до умножения других элементов из X на элементы групп M_1 слева и элементы из M_2 справа, полагая

$$t_1 x = t_1 \psi(x) \quad (1)$$

при $t_1 \in M_1$, $x \in X \setminus Y$ и

$$x t_2 = \varphi(x) t_2 \quad (2)$$

при $t_2 \in M_2$, $x \in X \setminus Z$. Тогда X станет (M_1, M_2) -биполигоном. Наоборот, каждый биполигон над группами M_1, M_2 изоморфен биполигону, полученному таким образом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что выполнены условия (a)–(f), и докажем, что X – (M_1, M_2) -биполигон. Докажем вначале, что

$$\varphi\psi = \psi\varphi. \quad (3)$$

Действительно, пусть $x \in X$. Тогда $\psi(x) \in Y$, а значит, $e_1 \psi(x) = \psi(x)$. Взяв в первом из равенств (f) $t_1 = e_1$, получим $\varphi(e_1 \psi(x)) = e_1 \psi(\varphi(x))$, откуда $\varphi(\psi(x)) = \psi(\varphi(x))$, т.е. выполнено (3).

Теперь докажем, что

$$\varphi(Y) = \psi(Z) = C. \quad (4)$$

Ввиду симметрии достаточно доказать равенство $\varphi(Y) = C$. Так как $\varphi(C) = C$, то остается доказать включение $\varphi(Y) \subseteq C$. Пусть $y \in Y$. Ввиду (е) $\varphi(y) \in Z$. С другой стороны, из (е) и (3) можно получить, что

$$\varphi(y) = \varphi(\psi(y)) = \psi(\varphi(y)) \in \psi(X) = Y.$$

Следовательно, $\varphi(y) \in Z \cap Y = C$.

Проверим теперь, что

$$m_1x = m_1\psi(x), \quad xm_2 = \varphi(x)m_2 \quad (5)$$

при всех $x \in X$. Действительно, ввиду (f) нам достаточно доказать равенство $m_1x = m_1\psi(x)$ для $x \in Y$, а равенство $xm_2 = x\varphi(m_2)$ – для $x \in Z$. Но это очевидно, так как $\psi(x) = x$ при $x \in Y$ и $\varphi(x) = x$ при $x \in Z$.

Проверим теперь для X аксиому биполигона. Пусть $x \in X$. Из (е) и (4) следует, что $\varphi(\psi(x)) \in C$. Используя тот факт, что C – биполигон, а также соотношения (f), (3) и (4), получим

$$\begin{aligned} (m_1x)m_2 &= (m_1\psi(x))m_2 = \varphi(m_1\psi(x))m_2 = (m_1\psi(\varphi(x)))m_2 = m_1(\psi(\varphi(x))m_2) \\ &= m_1(\varphi(\psi(x))m_2) = m_1(\psi(\varphi(x)m_2)) = m_1\psi(xm_2) = m_1(xm_2). \end{aligned}$$

Осталось показать, что любой биполигон над группами M_1, M_2 изоморфен какому-либо из только что построенных биполигонов. Пусть ${}_M X_M$ – биполигон. Положим

$$Y = e_1X, \quad Z = Xe_2, \quad C = Y \cap Z = e_1Xe_2, \quad A = X \setminus (Y \cup Z).$$

Функции φ и ψ определим следующим образом: $\varphi(x) = xe_2$, $\psi(x) = e_1x$. Условия (а)–(е), очевидно, выполняются. Осталось доказать выполнение условий (f). Имеем

$$\varphi(m_1\psi(x)) = \varphi(m_1e_1x) = m_1e_1xe_2 = m_1e_1\varphi(x) = m_1\psi(\varphi(x)).$$

Аналогичным образом доказывается второе из равенств (f). Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Из условий (f) мы вывели равенство (3) – перестановочность функций φ и ψ . Таким образом, условие (3) является необходимым для того, чтобы $X = A \cup Y \cup Z$ был биполигоном. Естественно спросить: не является ли перестановочность функций φ и ψ также достаточным условием? Следующий пример показывает, что это не так.

ПРИМЕР. Положим

$$A = \{a\}, \quad Y = \{y, c_1, c_2\}, \quad Z = \{z, c_1, c_2\}, \quad C = Y \cap Z = \{c_1, c_2\}.$$

Пусть M_1 – произвольная группа, $M_2 = \{e_2, m_2\}$ – двухэлементная группа,

$$\begin{aligned} M_1y &= y, & M_1c_1 &= c_1, & M_1c_2 &= c_2, & zM_2 &= z, \\ c_1e_2 &= c_2m_2 = c_1, & c_2e_2 &= c_1m_2 = c_2. \end{aligned}$$

Легко проверяется, что ${}_M Y$ и ${}_M Z$ – унитарные полигоны. Отображения $\varphi: X \rightarrow Z$ и $\psi: X \rightarrow Y$ определим следующим образом:

$$\varphi = \begin{pmatrix} a & y & z & c_1 & c_2 \\ z & c_1 & z & c_1 & c_2 \end{pmatrix}, \quad \psi = \begin{pmatrix} a & y & z & c_1 & c_2 \\ y & y & c_1 & c_1 & c_2 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что условия (а)–(е) выполнены. Кроме того, $\psi\varphi = \varphi\psi$, т.е. выполнено условие (3). Продолжим действия групп M_1 и M_2 на все множество X по формулам (1) и (2). На множестве X теперь действует группа M_1 слева и группа M_2 справа. Однако, X не является (M_1, M_2) -биполигоном, так как

$$(e_1a)m_2 = (e_1\psi(a))m_2 = (e_1y)m_2 = ym_2 = \psi(y)m_2 = c_1m_2 = c_2,$$

но

$$e_1(am_2) = e_1(\varphi(a)m_2) = e_1(zm_2) = e_1z = e_1\psi(z) = e_1c_1 = c_1,$$

т.е. $(e_1a)m_2 \neq e_1(am_2)$. Таким образом, условие (f) в теореме 5 не может быть заменено условием (3).

В работе [4] было определено понятие инфляции универсальной алгебры. Дадим определение инфляции для полигонов и биполигонов над полугруппами. Назовем S -полигон X *инфляцией* S -подполигона $Y \subseteq X$, если существует сюръективное отображение $\eta: X \rightarrow Y$ такое, что

$$(g) \quad \eta \cdot \eta = \eta;$$

$$(h) \quad (x\eta)s = xs \text{ для всех } x \in X, s \in S.$$

Аналогичным образом можно определить понятие инфляции для биполигонов. (S, T) -Биполигон X называется *инфляцией* (S, T) -подполигона $Y \subseteq X$, если существует сюръективное отображение $\theta: X \rightarrow Y$, удовлетворяющее условиям

$$(i) \quad \theta \cdot \theta = \theta;$$

$$(j) \quad x\theta \cdot t = xt, s \cdot x\theta = sx \text{ для всех } x \in X, s \in S, t \in T.$$

Из теоремы 4 легко получить следующее следствие.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Полигон X над моноидом G является инфляцией своего унитарного подполигона Xe , где e – единица моноида G .*

Аналогично из теоремы 5 мы получаем

СЛЕДСТВИЕ 2. *Биполигон X над моноидами M_1 и M_2 является инфляцией своего унитарного подбиполигона e_1Xe_2 , где e_1 и e_2 – единицы моноидов M_1 и M_2 соответственно.*

Напомним, что полугруппа L называется *полугруппой левых нулей*, если $l_1l_2 = l_1$ при всех $l_1, l_2 \in L$; полугруппа R – *полугруппа правых нулей*, если $r_1r_2 = r_2$ при всех $r_1, r_2 \in R$. В работе [2] было получено полное описание полигонов над этими полугруппами. Приведем формулировки результатов.

ТЕОРЕМА 6 [2; следствие 11]. *Пусть X, L – множества и для любого $l \in L$ определено отношение эквивалентности σ_l на множестве X ; пусть Y – подмножество множества X такое, что $|Y \cap x\sigma_l| = 1$ для любых $x \in X, l \in L$ (т.е. Y является множеством представителей σ_l -классов для каждого $l \in L$). Определим операцию на множестве L , полагая $l_1l_2 = l_1$ при всех $l_1, l_2 \in L$, и операцию $X \times L \rightarrow X$ умножения элементов из X на элементы из L , полагая $xl = x' \in Y \cap x\sigma_l$ для $x \in X, l \in L$. Тогда L окажется полугруппой левых нулей, а X – правым полигоном над L . Наоборот, всякий правый полигон над полугруппой левых нулей изоморфен полигону, полученному таким образом.*

ТЕОРЕМА 7 [2; следствие 10]. *Пусть X, R – множества и для любого $r \in R$ определено подмножество Y_r множества X ; пусть σ – отношение эквивалентности на множестве X такое, что $|Y_r \cap x\sigma| = 1$ для любых $x \in X, r \in R$ (т.е. Y_r для*

каждого $r \in R$ является множеством представителей классов отношения σ). Определим операцию на множестве R , полагая $r_1 r_2 = r_2$ при всех $r_1, r_2 \in R$, и операцию $X \times R \rightarrow X$ умножения элементов из X на элементы из R , полагая $xr = x' \in Y_r \cap x\sigma$ для $x \in X, r \in R$. Тогда R окажется полугруппой правых нулей, а X – правым полигоном над R . Наоборот, всякий правый полигон над полугруппой правых нулей изоморфен полигону, полученному таким образом.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Пусть X – (L, R) -биполигон, где L – полугруппа левых нулей, а R – полугруппа правых нулей. Представим его в виде системы двух правых полигонов $X_R, X_{L^{\text{op}}}$, т.е. X – правый R -полигон и одновременно правый L^{op} -полигон. Аксиому биполигона перепишем в виде $(xl)r = (xr)l$ при $x \in X, r \in R, l \in L$. Таким образом, “левое” действие полугруппы L на X можно заменить “правым” действием полугруппы L^{op} на X . Аналогичным образом можно поступить с (R, L) -, (L, L) - и (R, R) -биполигонами.

На основе теоремы 7 с учетом замечания 2 мы получаем следующую теорему, которая фактически представляет собой описание (L, R) -, (R, L) -, (L, L) - и (R, R) -биполигонов, где L – полугруппа левых нулей, а R – полугруппа правых нулей.

ТЕОРЕМА 8. Пусть X, Q, R – множества, σ_1, σ_2 – отношения эквивалентности на множестве X и $\tau = \sup(\sigma_1, \sigma_2)$. Для любых $q \in Q, r \in R$ пусть Y_q, Y_r – подмножества множества X , являющиеся множествами представителей классов отношений σ_1, σ_2 соответственно, т.е. для любых $q \in Q, r \in R, x \in X$

$$|Y_q \cap x\sigma_1| = 1, \quad |Y_r \cap x\sigma_2| = 1. \quad (6)$$

Пусть при этом для любого τ -класса K существует $a \in K$ такое, что при любых $r \in R, q \in Q$ выполняются условия

$$Y_r \cap K \subseteq a\sigma_1, \quad Y_q \cap K \subseteq a\sigma_2, \quad (7)$$

$$Y_r \cap a\sigma_2 = \{a\}, \quad Y_q \cap a\sigma_1 = \{a\}. \quad (8)$$

Определим на множествах Q и R операции, полагая $r_1 r_2 = r_2$ при $r_1, r_2 \in R$ и $q_1 q_2 = q_2$ при $q_1, q_2 \in Q$. Тогда Q и R будут являться полугруппами правых нулей. Определим действия этих полугрупп на множестве X , полагая

$$xr = x_1 \in Y_r \cap x\sigma_2, \quad x \in X, \quad r \in R, \quad (9)$$

$$xq = x_2 \in Y_q \cap x\sigma_1, \quad x \in X, \quad q \in Q. \quad (10)$$

Тогда X будет являться (L, R) -биполигоном (где $Q^{\text{op}} = L$). Наоборот, любой (L, R) -биполигон, где L – полугруппа левых нулей, а R – полугруппа правых нулей, изоморфен биполигону, построенному таким способом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Справедливость тождеств

$$(xq_1)q_2 = x(q_1q_2) = xq_2, \quad (xr_1)r_2 = x(r_1r_2) = xr_2,$$

$x \in X, q_1, q_2 \in Q, r_1, r_2 \in R$, следует из теоремы 7. Докажем равенство

$$(xq)r = (xr)q \quad (11)$$

при $x \in X$, $q \in Q$, $r \in R$ (характеристическое свойство биполигона). Зафиксируем элемент $x \in X$. Ввиду (10) и (9) имеем

$$(xq, x) \in \sigma_1, \quad ((xq)r, xq) \in \sigma_2.$$

Следовательно, $((xq)r, x) \in \tau$. Пусть a – элемент из τ -класса $K = x\tau$, удовлетворяющий условиям (7) и (8). Из (7) следует, что $(xq, a) \in \sigma_2$, а из (9) – что $((xq)r, xq) \in \sigma_2$. Ввиду транзитивности отношения σ_2 имеем $((xq)r, a) \in \sigma_2$. Кроме того, $(xq)r \in Y_r$. Из (8) мы теперь получаем, что $(xq)r = a$. Совершенно аналогичным образом доказывается равенство $(xr)q = a$. Следовательно, $(xq)r = (xr)q$, т.е. выполнено (11), а значит, X – биполигон.

Докажем теперь обратное утверждение теоремы. Пусть X – (L, R) -биполигон, где L – полугруппа левых нулей, а R – полугруппа правых нулей. Будем считать X правым Q -полигоном, где $Q = L^{\text{op}}$, в котором выполнено (11). Пусть

$$\sigma_1 = \{(x, y) \mid xq = yq\}, \quad q \in Q, \quad \sigma_2 = \{(x, y) \mid xr = yr\}, \quad r \in R.$$

Так как Q и R – полугруппы правых нулей, то σ_1 не зависит от выбора элемента $q \in Q$, а σ_2 не зависит от выбора $r \in R$. Для $q \in Q$ положим $Y_q = Xq$, а для $r \in R$ – $Y_r = Xr$. При доказательстве теоремы 7 в работе [2] было установлено, что $|Y_r \cap x\sigma_2| = 1$ при всех $x \in X$, $r \in R$ и аналогично $|Y_q \cap x\sigma_1| = 1$ при $x \in X$, $q \in Q$. Таким образом, выполнены соотношения (6).

Пусть $x \in X$, $q \in Q$, $r \in R$. Положим $a = (xq)r$. Так как X – биполигон, то также $a = (xr)q$. Имеем $x\sigma_1 xq\sigma_2 (xq)r = a$, поэтому $x\tau a$. Положим $K = x\tau$. Тогда $a \in K$.

Покажем, что если $x', x'' \in X$ и $(x', x'') \in \sigma_1$, то $x'rq = x''rq$. Действительно, $x'q = x''q$ по определению отношения σ_1 , а после умножения этого равенства на r получим $x'qr = x''qr$, а значит, $x'rq = x''rq$. Аналогичными рассуждениями можно получить, что $x'rq = x''rq$ при $(x', x'') \in \sigma_2$. Так как $\tau = \sigma_1 \vee \sigma_2$, то вышеприведенные рассуждения показывают, что

$$x_1\tau x_2 \Rightarrow x_1rq = x_2rq \quad \text{для любых } x_1, x_2 \in X. \quad (12)$$

Пусть $y \in Y_r \cap K$. Тогда $y = zr$ при некотором $z \in X$. Из (12) получаем

$$yq = zrq = arq = xr^2q^2 = xrq = a = aq,$$

поэтому $(y, a) \in \sigma_1$. Мы доказали первое из соотношений (7). Аналогично доказывается второе соотношение. Осталось доказать соотношения (8). Пусть $y \in Y_r \cap a\sigma_2$. Тогда $y = zr$ при некотором $z \in X$ и $yr = ar$. Отсюда получаем

$$y = zr = zr^2 = ar^2 = xqrr^2 = xqr = a.$$

Следовательно, выполнено первое из соотношений (8). Второе соотношение доказывается аналогичным образом. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 9. Пусть X, L, M – произвольные непустые множества, для любых $l \in L, m \in M$ заданы разбиения σ_l, σ_m множества X . Положим $\tau_{lm} = \sup(\sigma_l, \sigma_m)$, и пусть $Y_1, Y_2 \subseteq X$ – множества представителей классов отношений σ_l и σ_m соответственно, т.е. для любых $l \in L, m \in M, x \in X$

$$|Y_1 \cap x\sigma_l| = |Y_2 \cap x\sigma_m| = 1. \quad (13)$$

Далее, пусть для любого τ_{lm} -класса существует $a \in K$ такое, что при любых $l \in L$, $m \in M$ выполняются условия

$$Y_2 \cap K \subseteq a\sigma_l, \quad Y_1 \cap K \subseteq a\sigma_m, \quad (14)$$

$$Y_1 \cap a\sigma_l = Y_2 \cap a\sigma_m = \{a\}. \quad (15)$$

Определим на множествах L и M операции, полагая $l_1 l_2 = l_1$ для любых $l_1, l_2 \in L$ и $m_1 m_2 = m_1$ для любых $m_1, m_2 \in M$. Тогда L и M будут являться полугруппами левых нулей. Определим действие этих полугрупп на множестве X , полагая для $x \in X$, $l \in L$, $m \in M$

$$xl = x_1 \in Y_1 \cap x\sigma_l, \quad (16)$$

$$xm = x_2 \in Y_2 \cap x\sigma_m. \quad (17)$$

Тогда X будет являться (R, L) -биполигоном (где $R^{\text{op}} = M$). Наоборот, любой (R, L) -биполигон, где L – полугруппа левых нулей, R – полугруппа правых нулей, изоморфен полигону, построенному таким образом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Справедливость тождеств

$$(xl_1)l_2 = x(l_1 l_2) = xl_1, \quad (xm_1)m_2 = x(m_1 m_2) = xm_1,$$

$x \in X$, $l_1, l_2 \in L$, $m_1, m_2 \in M$, следует из теоремы 6. Докажем равенство

$$(xl)t = (xm)l \quad (18)$$

при $x \in X$, $l \in L$, $m \in M$ (характеристическое свойство биполигона). Зафиксируем элемент $x \in X$. Ввиду (16) и (17) имеем

$$(xl, x) \in \sigma_l, \quad ((xl)t, xl) \in \sigma_m.$$

Следовательно, $((xl)t, x) \in \tau_{lm}$. Пусть a – элемент из τ_{lm} -класса $K = x\tau_{lm}$, удовлетворяющий условиям (14) и (15). Из (14) следует, что $(xl, a) \in \sigma_m$, а из (16) – что $((xl)t, xl) \in \sigma_m$. Ввиду транзитивности отношения σ_m имеем $((xl)t, a) \in \sigma_m$. Кроме того, $(xl)t \in Y_2$. Из (15) мы теперь получаем, что $(xl)t = a$. Совершенно аналогичным образом доказывается равенство $(xm)l = a$. Следовательно, $(xl)t = (xm)l$, т.е. выполнено (18), а значит, X – биполигон.

Докажем теперь обратное утверждение теоремы. Пусть X – (R, L) -биполигон, где R – полугруппа правых нулей, а L – полугруппа левых нулей. Будем считать X правым M -полигоном, где $M = R^{\text{op}}$, в котором выполнено (18). Пусть

$$\sigma_l = \{(x, y) \mid xl = yl\}, \quad l \in L, \quad \sigma_m = \{(x, y) \mid xm = ym\}, \quad m \in M.$$

Для $l \in L$ положим $Y_1 = Xl$ и для $m \in M$ – $Y_2 = Xm$. Так как L и M – полугруппы правых нулей, то Y_1 не зависит от выбора элемента $l \in L$, а Y_2 не зависит от выбора $m \in M$. При доказательстве теоремы 7 в работе [2] было установлено, что $|Y_1 \cap x\sigma_l| = 1$ при всех $x \in X$, $l \in L$ и аналогично $|Y_2 \cap x\sigma_m| = 1$ при $x \in X$, $m \in M$. Таким образом, выполнены соотношения (13).

Пусть $x \in X$, $l \in L$, $m \in M$. Положим $a = (xl)t$. Так как X – биполигон, то также $a = (xm)l$. Имеем $x\sigma_l x\sigma_m (xl)t = a$, поэтому $x\tau_{lm}a$. Положим $K = x\tau_{lm}$. Тогда $a \in K$.

Покажем, что если $x', x'' \in X$ и $(x', x'') \in \sigma_l$, то $x'ml = x''ml$. Действительно, $x'l = x''l$ по определению отношения σ_l , а после умножения этого равенства на m получим $x'lm = x''lm$, а значит, $x'ml = x''ml$. Аналогичными рассуждениями можно получить, что $x'lm = x''lm$ при $(x', x'') \in \sigma_m$. Так как $\tau_{lm} = \sup(\sigma_l, \sigma_m)$, то вышеприведенные рассуждения показывают, что

$$x' \tau x'' \Rightarrow x'ml = x''ml \quad \text{для любых } x', x'' \in X. \quad (19)$$

Пусть $y \in Y_2 \cap K$. Тогда $y = zm$ при некотором $z \in X$. Из (19) получаем

$$yl = zml = aml = zm^2l^2 = zml = a = al,$$

поэтому $(y, a) \in \sigma_l$. Мы доказали первое из соотношений (14). Аналогично доказывается второе соотношение. Осталось доказать соотношения (15). Пусть $y \in Y_2 \cap a\sigma_m$. Тогда $y = zm$ при некотором $z \in X$ и $ym = am$. Отсюда получаем

$$y = zm = zm^2 = am^2 = xlm m^2 = xlm = a.$$

Следовательно, выполнено второе из соотношений (15). Первое соотношение доказывается аналогичным образом. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 10. Пусть X, L, R – произвольные непустые множества, для любого $l \in L$ задано разбиение σ_l множества X . Пусть δ – еще одно разбиение множества X и $\tau_l = \sup(\sigma_l, \delta)$. Кроме того, пусть для любого $r \in R$ подмножество $Y_r \subseteq X$ есть множество представителей δ -классов, а $Z \subseteq X$ – множество представителей σ_l -классов, т.е. для любых $l \in L, r \in R, x \in X$

$$|Z \cap x\sigma_l| = |Y_r \cap x\delta| = 1. \quad (20)$$

Пусть для любого τ_l -класса существует $a \in K$ такое, что при любых $l \in L, r \in R, x \in X$ выполняются условия

$$Z \cap K \subseteq a\delta, \quad Y_r \cap K \subseteq a\sigma_l, \quad (21)$$

$$Z \cap a\sigma_l = Y_r \cap a\delta = \{a\}. \quad (22)$$

Определим на множествах L и R операции, полагая $l_1 l_2 = l_1$ для любых $l_1, l_2 \in L$ и $r_1 r_2 = r_2$ для любых $r_1, r_2 \in R$. Тогда L и R будут являться полугруппами левых и правых нулей соответственно. Определим действия этих полугрупп на множестве X , полагая для $x \in X, l \in L, r \in R$

$$xl = x_l \in Z \cap x\sigma_l, \quad (23)$$

$$xr = x_r \in Y_r \cap x\delta. \quad (24)$$

Тогда X будет являться (L_1, L_2) -биполигоном, где $L = L_1, R = L_2^{\text{op}}$. Наоборот, любой (L_1, L_2) -биполигон, где L_1, L_2 – полугруппы левых нулей, изоморфен полигону, построенному таким образом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Справедливость тождеств

$$(xl_1)l_2 = x(l_1 l_2) = xl_1, \quad (xr_1)r_2 = x(r_1 r_2) = xr_2$$

$x \in X$, $l_1, l_2 \in L$, $r_1, r_2 \in M$, следует из теорем 6, 7. Докажем равенство

$$(xl)r = (xr)l \quad (25)$$

при $x \in X$, $l \in L$, $r \in R$ (характеристическое свойство биполигона). Зафиксируем элемент $x \in X$. Ввиду (23) и (24) имеем

$$(xl, x) \in \sigma_l, \quad ((xl)r, xl) \in \delta.$$

Следовательно, $((xl)r, x) \in \tau_l$. Пусть a – элемент из τ_l -класса $K = x\tau_l$, удовлетворяющий условиям (21) и (22). Из (21) и (23) следует, что $(xl, a) \in \delta$, а из (21) и (24) – что $((xl)r, xl) \in \delta$. Ввиду транзитивности отношения δ имеем $((xl)r, a) \in \delta$. Кроме того, $(xl)r \in Y_r$. Из (22) мы теперь получаем, что $(xl)r = a$. Совершенно аналогичным образом доказывается равенство $(xr)l = a$. Следовательно, $(xl)r = (xr)l$, т.е. выполнено (18), а значит, X – биполигон.

Докажем теперь обратное утверждение теоремы. Пусть X – (L_1, L_2) -биполигон, где L_1 и L_2 – полугруппы левых нулей. Будем считать X правым L -полигоном, где $L = L_1$, и правым R -полигоном, где $R = L_2^{\text{op}}$, в котором выполнено (25). Пусть

$$\sigma_l = \{(x, y) \mid xl = yl\}, \quad l \in L, \quad \delta = \{(x, y) \mid xr = yr\}, \quad r \in R.$$

Для $l \in L$ положим $Z = Xl$, и для $r \in R$ пусть $Y_r = Xr$. Так как L – полугруппа левых нулей, то Z не зависит от выбора элемента $l \in L$. Аналогично, так как R – полугруппа правых нулей, то δ не зависит от выбора $r \in R$. При доказательстве теоремы 7 в работе [2] было установлено, что $|Z \cap x\sigma_l| = 1$ при всех $x \in X$, $l \in L$, а при доказательстве теоремы 6 – что $|Y_r \cap x\delta| = 1$ при $x \in X$, $r \in R$. Таким образом, выполнены соотношения (20).

Пусть $x \in X$, $l \in L$, $r \in R$. Положим $a = (xl)r$. Так как X – биполигон, то также $a = (xr)l$. Имеем $x\delta xr\sigma_l xlr = a$, поэтому $x\tau_l a$. Положим $K = x\tau_l$. Тогда $a \in K$.

Покажем, что если $x', x'' \in X$ и $(x', x'') \in \sigma_l$, то $x'rl = x''rl$. Действительно, $x'l = x''l$ по определению отношения σ_l , а после умножения этого равенства на r получим $x'lr = x''lr$, а значит, $x'rl = x''rl$. Аналогичными рассуждениями можно получить, что $x'lr = x''lr$ при $(x', x'') \in \delta$. Так как $\tau_l = \sup(\sigma_l, \delta)$, то вышеприведенные рассуждения показывают, что

$$x'\tau_l x'' \Rightarrow x'rl = x''rl \quad \text{для любых } x', x'' \in X. \quad (26)$$

Пусть $y \in Y_r \cap K$. Тогда $y = xr$ при некотором $x \in X$. Из (26) получаем

$$yl = xrl = arl = xr^2l^2 = xrl = a = al,$$

поэтому $(y, a) \in \sigma_l$. Мы доказали первое из соотношений (21). Аналогично доказывается второе соотношение. Осталось доказать соотношения (22). Пусть $y \in Y_r \cap a\delta$. Тогда $y = xr$ при некотором $x \in X$ и $yr = ar$. Отсюда получаем

$$y = xr = xr^2 = ar^2 = xlr^2 = xlr = a.$$

Следовательно, выполнено второе из соотношений (22). Первое соотношение доказывается аналогичным образом. Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] M. Kilp, U. Knauer, A. V. Mikhalev, *Monoids, Acts and Categories*, de Gruyter Exp. Math., **29**, Walter de Gruyter, Berlin, 2000.
- [2] A. Yu. Avdeyev, I. B. Kozhukhov, “Acts over completely 0-simple semigroups”, *Acta Cybernet.*, **14**:4 (2000), 523–531.
- [3] А. Г. Курош, *Теория групп*, Наука, М., 1967.
- [4] Q. Wang, S. L. Wismath, “Generalized inflations and null extensions”, *Discuss. Math. Gen. Algebra Appl.*, **24**:2 (2004), 225–249.

М. Ю. Максимовский

Московский государственный институт электронной техники
(технический университет)

E-mail: maksimovskiy@gmail.com

Поступило

23.10.2008

Исправленный вариант

27.01.2010