Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Цагарейшвили, Коэффициенты Фурье–Хаара и некоторые свойства непрерывных функций, *Матем. заметки*, 2010, том 87, выпуск 3, 443–452

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm6593>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 11:02:41

Коэффициенты Фурье–Хаара и некоторые свойства непрерывных функций

В. Цагарейшвили

Хорошо известно, что если коэффициенты Фурье–Хаара имеют определенный порядок или сходится некоторый ряд, составленный из коэффициентов Фурье–Хаара функции $f(x) \in C(0, 1)$, то функция имеет определенный вид. В настоящей статье доказывается, что вышеупомянутые свойства имеют не только коэффициенты Фурье–Хаара, а также разность этих коэффициентов.

Библиография: 4 названия.

1. Вспомогательные теоремы и определения. Через $C(0, 1)$ обозначаем класс непрерывных на $[0, 1]$ функций. Ортонормированная система Хаара (см., например, [1; с. 54]) определяется на $[0, 1]$ следующим образом:

$$\chi_1(x) = \chi_0^{(0)}(x) = 1 \quad \text{при } x \in [0, 1].$$

При $m = 2^n + k$, где $k = 1, 2, \dots, 2^n$, $n = 0, 1, 2, \dots$,

$$\chi_m(x) = \chi_n^{(k)}(x) = \begin{cases} 2^{n/2}, & x \in \left(\frac{2k-2}{2^{n+1}}, \frac{2k-1}{2^{n+1}} \right), \\ 2^{-n/2}, & x \in \left(\frac{2k-1}{2^{n+1}}, \frac{2k}{2^{n+1}} \right), \\ 0, & x \notin \left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n} \right]. \end{cases}$$

В точках разрыва функции Хаара равняются полусумме пределов справа и слева. В точках 0 и 1 значения функции Хаара равняются значениям соответственно на $(0, 2^{-n-1})$ и $(1 - 2^{-n-1}, 1)$.

Коэффициенты Фурье–Хаара функции $f(x) \in L(0, 1)$ определяются так:

$$c_0^{(0)}(f) = \int_0^1 f(x) dx, \quad c_m(f) = c_n^{(k)}(f) = \int_0^1 f(x) \chi_n^{(k)}(x) dx,$$

где $m = 2^n + k$, $k = 1, 2, \dots, 2^n$, $n = 0, 1, \dots$.

Ряд Фурье–Хаара функции $f(x)$ имеет вид

$$c_0^{(0)}(f) + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^n} c_n^{(k)}(f) \chi_n^{(k)}(x) \quad \text{или} \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n(f) \chi_n(x).$$

Как известно, если $f(x) \in C(0, 1)$, то равномерно на $[0, 1]$ имеет место равенство (см. [1; с. 55])

$$f(x) = c_0^{(0)}(f) + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^n} c_n^{(k)}(f) \chi_n^{(k)}(x). \quad (1)$$

Введем обозначение

$$\Delta_h^2 f(x) = f(x-h) - 2f(x) + f(x+h),$$

где $x-h, x+h \in [0, 1]$. Так же

$$\omega^{(2)}(\delta, f) = \sup_{|h| \leq \delta} \|\Delta_h^2(f)\|_C.$$

Мы скажем, что $f \in Z_\alpha$ при $\alpha \in (0, 2]$, если $\omega^{(2)}(\delta, f) = O(\delta^\alpha)$.

Справедливо равенство (см. [2])

$$\begin{aligned} \Delta c_n^{(k)}(f) &= c_n^{(k)}(f) - c_n^{(k+1)}(f) \\ &= 2^{n/2} \int_{(2k-1)/2^{n+1}}^{(2k+1)/2^{n+1}} (f(x-2^{-n-1}) - 2f(x) + f(x+2^{-n-1})) dx, \end{aligned} \quad (2)$$

где $k = 1, 2, \dots, 2^n - 1$.

Имеют место следующие теоремы (см. [3]).

ТЕОРЕМА А. Если $f(x) \in C(0, 1)$ и

$$\max_{1 \leq k \leq 2^n - 1} |\Delta c_n^{(k)}(f)| = o(2^{-5n/2}),$$

то

$$f(x) = ax + b,$$

где a и b – некоторые числа.

ТЕОРЕМА В. Если $f(x) \in C(0, 1)$ и выполнены условия

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad & \max_{1 \leq k \leq 2^n - 1} |\Delta c_n^{(k)}(f)| = o(2^{-5n/2}), \\ \text{б)} \quad & c_n^{(2^n)}(f) = o(2^{-3n/2}), \end{aligned}$$

то $f(x) = \text{const.}$

2. Постановка основного вопроса. Как известно (см. [4]), если $f(x) \in C(0, 1)$ и выполнено

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n(f)| \sqrt{n} < +\infty,$$

то $f(x) = \text{const.}$

Далее (см. [4]), если $f(x) \in \text{Lip } \alpha$, $\alpha \in (0, 1]$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n(f)|^\beta < +\infty,$$

где $\beta = 2\alpha/(1+2\alpha)$, то $f(x) = \text{const.}$

В настоящей статье мы нашли коэффициентные условия, в случае которых функции из класса $C(0, 1)$ или Z_α имеют вид $ax + b$ или const. Здесь же получены некоторые оценки коэффициентов Фурье–Хаара.

3. Основные результаты. Введем обозначения

$$f_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^n-1} \Delta c_n^{(k)}(f) \sum_{m=1}^k \chi_n^{(m)}(x), \quad f_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(2^n)}(f) \sum_{k=1}^{2^n} \chi_n^{(k)}(x).$$

ЛЕММА. Если $f(x) \in C(0, 1)$ и

$$\sum_{k=1}^{2^n-1} |\Delta c_n^{(k)}(f)| = 2^{-n/2} a_n,$$

где $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$, то функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ непрерывны в каждой двоично-иррациональной точке из $[0, 1]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя преобразование Абеля, получаем

$$\sum_{k=1}^{2^n} c_n^{(k)}(f) \chi_n^{(k)}(x) = \sum_{k=1}^{2^n-1} \Delta c_n^{(k)}(f) \sum_{m=1}^k \chi_n^{(m)}(x) + \sum_{k=1}^{2^n} c_n^{(2^n)}(f) \chi_n^{(k)}(x). \quad (3)$$

Так как $f(x) \in C(0, 1)$, то, как было сказано выше, ряд Фурье-Хаара сходится равномерно на $[0, 1]$. Таким образом, из (1) и (3) получаем

$$f(x) = c_0^{(0)}(f) + f_1(x) + f_2(x). \quad (4)$$

Из условия леммы следует, что ряд, который представляет функцию $f_1(x)$, сходится равномерно. Следовательно, равномерно будет сходиться ряд, представляющий функцию $f_2(x)$ (см. (3)).

Теперь покажем, что $f_1(x)$ непрерывна в любой двоично-иррациональной точке.

Пусть $x_0 \in (0, 1)$ – двоично-иррациональная точка и $\varepsilon > 0$ – любое число. Положим, что

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Введем обозначение

$$\Delta_n^{(k)} = \left(\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n} \right), \quad k = 1, 2, \dots, 2^n.$$

Для любого N существует интервал $\Delta_{N+1}^{(k_0)}$ такой, что $x_0 \in \Delta_{N+1}^{(k_0)}$. В этом случае для каждого $x \in \Delta_{N+1}^{(k_0)}$ будем иметь

$$\chi_n^{(k)}(x_0) - \chi_n^{(k)}(x) = 0 \quad \text{при } n \leq N, \quad k = 1, 2, \dots, 2^n, \quad (5)$$

$$|\chi_n^{(k)}(x_0) - \chi_n^{(k)}(x)| \leq 2^{n/2+1} \quad \text{при } n > N, \quad k = 1, 2, \dots, 2^n. \quad (6)$$

Используя условие леммы, (5) и (6), получим

$$\begin{aligned} |f_1(x_0) - f_1(x)| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^n-1} \Delta c_n^{(k)}(f) \sum_{m=1}^k (\chi_n^{(m)}(x_0) - \chi_n^{(m)}(x)) \right| \\ &\leq \sum_{n=N}^{\infty} 2^{-n/2} a_n 2^{n/2+1} = 2 \sum_{n=N}^{\infty} a_n < \varepsilon. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что функция $f_1(x)$ непрерывна в точке x_0 . Следовательно, $f_2(x)$ тоже является непрерывной в любой двоично-иррациональной точке. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 1. *Если выполнены условия леммы, то $f_1(x)$ и $f_2(x)$ – непрерывные на $[0, 1]$ функции (см. (4)).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как было показано, функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ непрерывны в любой двоично-иррациональной точке из $[0, 1]$.

Теперь покажем, что $f_2(x)$ непрерывна в любой двоично-рациональной точке из $[0, 1]$.

Рассмотрим функцию

$$\Phi_n(x) = \sum_{k=1}^{2^n} \chi_n^{(k)}(x).$$

Эта функция является периодической на $[0, 1]$ с периодом 2^{-n} . Таким образом, если $p \leq n$, то 2^{-p} есть кратное периода 2^{-n} . Поэтому

$$\Phi_n(x_0 + 2^{-p}) - \Phi_n(x_0) = 0 \quad \text{при } p \leq n.$$

Пусть $\varepsilon > 0$ – любое число и p выбрано так, чтобы в силу равномерной сходимости имели место неравенства

$$\left| \sum_{n=s}^{\infty} c_n^{(2^n)}(f) \sum_{k=1}^{2^n} \chi_n^{(k)}(x_0 + 2^{-s}) \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \left| \sum_{n=s}^{\infty} c_n^{(2^n)}(f) \sum_{k=1}^{2^n} \chi_n^{(k)}(x_0) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

при $s > p$ и $x_0 + 2^{-s} \in [0, 1]$. Отсюда

$$\begin{aligned} & |f_2(x_0 + 2^{-s}) - f_2(x_0)| \\ &= \left| \sum_{n=s}^{\infty} c_n^{(2^n)}(f) \sum_{k=1}^{2^n} (\chi_n^{(k)}(x_0 + 2^{-s}) - \chi_n^{(k)}(x_0)) \right| \\ &< \left| \sum_{n=s}^{\infty} c_n^{(2^n)}(f) \sum_{k=1}^{2^n} \chi_n^{(k)}(x_0 + 2^{-s}) \right| + \left| \sum_{n=s}^{\infty} c_n^{(2^n)}(f) \sum_{k=1}^{2^n} \chi_n^{(k)}(x_0) \right| < \varepsilon, \end{aligned} \quad (7)$$

где $x_0 \in [0, 1]$ – любое двоично-рациональное число. Таким образом,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} |f_2(x_0 + 2^{-s}) - f_2(x_0)| = 0.$$

Теперь рассмотрим разность

$$f_2(x_0 + k \cdot 2^{-s}) - f_2(x_0), \quad 1 \leq k < 2^s, \quad x_0 + k \cdot 2^{-s} \in [0, 1].$$

Поскольку $k \cdot 2^{-s}$ есть кратное периода функции $\Phi_n(x)$ при $s \leq n$, то, как и выше (см. (7)), получим

$$|f_2(x_0 + k \cdot 2^{-s}) - f_2(x_0)| < \varepsilon \quad \text{при } k < 2^s, \quad s \geq p.$$

Таким образом, если (r_n) есть последовательность двоично-рациональных чисел такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0,$$

то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_2(x_0 + r_n) = f_2(x_0).$$

Пусть теперь (γ_n) есть последовательность двоично-иррациональных чисел,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = 0, \quad \gamma_n > 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Так как x_0 – двоично-рациональное число, мы можем его рассмотреть как левый конец интервала $\Delta_N^{(k_0)}$ для достаточно большого N и некоторого k_0 . Таким образом, можем считать, что $x_0 + \gamma_n \in \Delta_N^{(k_0)}$ при $n > N_1$.

Пусть теперь (r_n) – последовательность двоично-рациональных чисел таких, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0, \quad r_n > 0, \quad n = 1, 2, \dots, \quad x_0 + \gamma_n \in \Delta_N^{(k_0)}, \quad n > N_1.$$

В этом случае, так как $x_0 + \gamma_n$ – двоично-иррациональные числа и $f_1(x)$ непрерывна в этих точках, для достаточно больших N_1 имеем (см. лемму)

$$|f_1(x_0 + \gamma_n) - f_1(x_0 + r_{n_0})| < \frac{\varepsilon}{4},$$

где $n_0 > N_1$ – фиксированное число и $n > N_1$.

Таким образом, поскольку функция $f(x)$ равномерно непрерывна на $[0, 1]$ и

$$f_2(x) = f(x) - f_1(x),$$

то можно подобрать число N_1 такое, что при $n, n_0 > N_1$

$$\begin{aligned} & |f_2(x_0 + \gamma_n) - f_2(x_0 + r_{n_0})| \\ & \leq |f(x_0 + \gamma_n) - f(x_0 + r_{n_0})| + |f_1(x_0 + \gamma_n) - f_1(x_0 + r_{n_0})| < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$|f_2(x_0 + \gamma_n) - f_2(x_0)| \leq |f_2(x_0 + \gamma_n) - f_2(x_0 + r_{n_0})| + |f_2(x_0 + r_{n_0}) - f_2(x_0)| < \varepsilon,$$

т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_2(x_0 + \gamma_n) = f_2(x_0).$$

(Аналогично можно рассмотреть случай, когда $\gamma_n < 0$, $n = 1, 2, \dots$.)

Следовательно, для любого r

$$\lim_{r \rightarrow 0} f_2(x_0 + r) = f_2(x_0).$$

Таким образом, функция $f_2(x)$ непрерывна в каждой двоично-рациональной точке интервала $[0, 1]$. Поэтому в силу леммы $f_2(x)$ непрерывна в каждой точке $[0, 1]$.

Наконец из (4) следует, что функция $f_1(x)$ тоже непрерывна на $[0, 1]$.

ТЕОРЕМА 2. Если выполнены условия леммы, то

$$f_2(x) = ax + b,$$

где a и b – некоторые числа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если выполнены условия леммы, то в силу теоремы 1 функция $f_2(x)$ непрерывна на $[0, 1]$ и равномерно на $[0, 1]$ справедливо

$$f_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(2^n)}(f) \sum_{k=1}^{2^n} \chi_n^{(k)}(x).$$

Отсюда

$$a_n^{(k)}(f_2) = \int_0^1 f_2(x) \chi_n^{(k)}(x) dx = c_n^{(2^n)}(f)$$

при $k = 1, 2, \dots, 2^n$. Поэтому

$$a_n^{(k)}(f_2) - a_n^{(k+1)}(f_2) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, 2^n - 1.$$

Теперь, используя утверждение теоремы A, получаем, что

$$f_2(x) = ax + b.$$

Теорема 2 доказана.

ТЕОРЕМА 3. Если $f(x) \in C(0, 1)$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^n-1} |\Delta c_n^{(k)}(f)| 2^{3n/2} < +\infty,$$

то $f(x) = ax + b$, где a и b – некоторые числа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу условия теоремы 3 имеем

$$\sum_{k=1}^{2^n-1} |\Delta c_n^{(k)}(f)| = 2^{-3n/2} \cdot a_n, \quad \text{где} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty.$$

Отсюда и из теоремы 2 следует, что $f_2(x) = ax + b$, где a и b – некоторые числа. Пусть $x, y \in \Delta_{N+1}^{(k)}$ и $\sum_{n=N}^{\infty} a_n < \varepsilon/4$. Применяя условия теоремы 3, (5) и (6), получим

$$\begin{aligned} |f_1(x) - f_1(y)| &< 2 \sum_{n=N}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^n-1} |\Delta c_n^{(k)}(f)| 2^{n/2} \\ &= 2 \sum_{n=N}^{\infty} 2^{-3n/2} a_n \cdot 2^{n/2} < 2^{-N+1} \sum_{n=N}^{\infty} a_n < 2^{-N} \cdot \varepsilon. \end{aligned}$$

Так как $f(x)$ непрерывна на $[0, 1]$, из последнего неравенства следует, что

$$|f_1(x) - f_1(y)| < \varepsilon \cdot 2^{-N} \quad \text{при} \quad x, y \in \left[\frac{k-1}{2^{N+1}}, \frac{k}{2^{N+1}} \right].$$

Наконец, если $x, y \in [0, 1]$ – любые две точки, то из последнего неравенства имеем

$$|f_1(x) - f_1(y)| < \varepsilon.$$

Следовательно, $f_1(x) = \text{const}$ и из (4) получаем

$$f(x) = c_0^{(0)}(f) + \text{const} + ax + b.$$

Теорема 3 доказана.

ТЕОРЕМА 4. Если $f(x) \in C(0, 1)$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n(f) - c_{n+1}(f)| n^{3/2} < +\infty,$$

то $f(x) = \text{const.}$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия теоремы 4 следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^n-1} |\Delta c_n^{(k)}(f)| 2^{3n/2} < +\infty,$$

отсюда, используя утверждение теоремы 3, имеем

$$f(x) = ax + b.$$

Поэтому (см. (2))

$$c_n^{(k)}(f) - c_n^{(k+1)}(f) = 0 \quad \text{при} \quad k = 1, 2, \dots, 2^n - 1. \quad (8)$$

С другой стороны, для любого n

$$c_n^{(2^n)}(f) = c_n^{(2^n)}(f) - c_{n+1}^{(1)}(f) + c_{n+1}^{(1)}(f) - c_{n+1}^{(2)}(f) + \dots.$$

Из условия теоремы 4 получим

$$|c_n(f) - c_{n+1}(f)| = n^{-3/2} \cdot a_n, \quad \text{где} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty.$$

Отсюда

$$\sum_{n=m}^{\infty} |c_n(f) - c_{n+1}(f)| = o(m^{-3/2}).$$

Поэтому при $m = 2^n$

$$c_n^{(2^n)}(f) = o(2^{-3n/2}). \quad (9)$$

Из (8) и (9), применяя теорему В, получаем, что

$$f(x) = \text{const.}$$

Теорема 4 доказана.

ТЕОРЕМА 5. Если $f \in Z_\alpha$, $\alpha \in (1, 2]$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^n-1} |\Delta c_n^{(k)}(f)|^\beta < +\infty,$$

где $\beta = 2(\alpha - 1)/(1 + 2\alpha)$, то

$$f(x) = ax + b,$$

где a и b — некоторые числа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (2) следует, что

$$|\Delta c_n^{(k)}(f)| \leq 2^{-n/2} \omega^{(2)}(2^{-n}, f), \quad k = 1, 2, \dots, 2^n - 1.$$

Если $f \in Z_\alpha$, то

$$|\Delta c_n^{(k)}(f)| < C \cdot 2^{-n/2} \cdot 2^{-n\alpha} = C \cdot 2^{-n(1+2\alpha)/2}.$$

Следовательно, так как $\beta - 1 = -3/(1 + 2\alpha)$, то

$$\begin{aligned} |\Delta c_n^{(k)}(f)|^\beta &= |\Delta c_n^{(k)}(f)| |\Delta c_n^{(k)}(f)|^{\beta-1} \\ &> |\Delta c_n^{(k)}(f)| \cdot C^{\beta-1} (2^{-n(1+2\alpha)/2})^{\beta-1} = C^{\beta-1} |\Delta c_n^{(k)}(f)| \cdot 2^{3n/2}, \end{aligned}$$

где C не зависит от n . Отсюда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^n-1} |\Delta c_n^{(k)}(f)| \cdot 2^{3n/2} < C^{1-\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^n-1} |\Delta c_n^{(k)}(f)|^\beta < +\infty.$$

Используя теперь теорему 3, заключаем, что

$$f(x) = ax + b.$$

Теорема 5 доказана.

ТЕОРЕМА 6. Если $f(x) \in C(0, 1)$ и выполнено условие леммы, то

$$|c_n^{(k)}(f)| \leq 2^{n/2} \omega^{(2)}(2^{-n}, f) + |a| \cdot 2^{-3n/2}, \quad k = 1, 2, \dots, 2^n, \quad (10)$$

и a – некоторое число.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если выполнены условия леммы, то из теоремы 2 следует, что

$$f(x) = f_1(x) + ax + b. \quad (11)$$

Однако

$$\begin{aligned} c_n^{(k)}(f_1) &= \int_0^1 f_1(x) \chi_n^{(k)}(x) dx \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{2^m-1} \Delta c_m^{(s)}(f) \sum_{l=1}^s \int_0^1 \chi_m^{(l)}(x) \chi_n^{(k)}(x) dx = \sum_{s=k}^{2^n-1} \Delta c_n^{(s)}(f). \end{aligned} \quad (12)$$

Теперь, так как

$$\int_0^1 (ax + b) \chi_n^{(k)}(x) dx = -a \cdot 2^{-n/2-1} \cdot 2^{-n-1} = -a \cdot 2^{-3n/2-2},$$

из (11) получаем

$$c_n^{(k)}(f) = c_n^{(k)}(f_1) + \int_0^1 (ax + b) \chi_n^{(k)}(x) dx = c_n^{(k)}(f_1) - \frac{a}{4} 2^{-3n/2}.$$

Поскольку (см. (12))

$$|c_n^{(k)}(f_1)| \leq \sum_{s=k}^{2^n-1} |\Delta c_n^{(s)}(f)| < 2^n \cdot 2^{-n/2} \cdot \omega^{(2)}(2^{-n}, f) = 2^{n/2} \omega^{(2)}(2^{-n}, f),$$

из предыдущего равенства вытекает справедливость неравенства (10).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если $f(x) = x^2$, имеем, что (см. (2))

$$|\Delta c_n^{(k)}(f)| \leq 2^{-5n/2}, \quad k = 1, 2, \dots, 2^n - 1.$$

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^n-1} |\Delta c_n^{(k)}(f)| \cdot 2^{(3/2-\varepsilon)n} < \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot 2^{-5n/2} \cdot 2^{3n/2} \cdot 2^{-\varepsilon n} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-\varepsilon n} < +\infty.$$

Отсюда следует, что, так как $f(x) \neq ax + b$, теорема 3 неусилияема.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Пусть $f(x) = -x$. Тогда $\Delta c_n^{(k)}(f) = 0$ при $k = 1, 2, \dots, 2^n - 1$. Однако

$$c_n^{(k)}(f) = \frac{1}{2} \cdot 2^{-3n/2}, \quad k = 1, 2, \dots, 2^n.$$

Поэтому для любого $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} |c_n(f) - c_{n+1}(f)| n^{3/2-\varepsilon} \\ & < |c_0^{(0)}(f)| + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^n-1} |\Delta c_n^{(k)}(f)| 2^{(3/2-\varepsilon)n} + \sum_{n=0}^{\infty} |c_n^{(2^n)}(f) - c_{n+1}^{(1)}(f)| \cdot 2^{(3/2-\varepsilon)n} \\ & < |c_0^{(0)}(f)| + 2 \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-3n/2} \cdot 2^{(3/2-\varepsilon)n} \\ & = |c_0^{(0)}(f)| + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-\varepsilon n} < +\infty. \end{aligned}$$

Следовательно, так как $f(x) \neq \text{const}$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n(f) - c_{n+1}(f)| n^{3/2-\varepsilon} < +\infty,$$

теореме 4 нельзя усилить.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Положим, что $f(x) = x^2$. Тогда $f(x) \in Z_2$. Как было показано выше,

$$|\Delta c_n^{(k)}(f)| < 2^{-5n/2}, \quad k = 1, 2, \dots, 2^n - 1.$$

Таким образом, если $\beta = 2(\alpha - 1)/(1 + 2\alpha) = 2/5$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n |\Delta c_n^{(k)}(f)|^{\beta+\varepsilon} < \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot (2^{-5n/2})^{2/5+\varepsilon} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-5n/2\varepsilon} < +\infty.$$

Отсюда, так как $f(x) \neq ax + b$, очевидно, что теорема 5 неусилияема для $\alpha = 2$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Г. Алексич, *Проблемы сходимости ортогональных рядов*, ИЛ, М., 1963.
- [2] В. Ш. Цагарейшвили, “О вариации коэффициентов Фурье–Хаара”, *Матем. сб.*, **195**:3 (2004), 143–160.
- [3] В. Ш. Цагарейшвили, “О коэффициентах Фурье непрерывной функции по системе Хаара”, *Сообщ. АН ГССР*, **63**:1 (1971), 37–39.
- [4] С. В. Бочкарев, “О коэффициентах рядов Фурье по системе Хаара”, *Матем. сб.*, **80**:1 (1969), 97–116.

В. Цагарейшвили

Тбилисский государственный университет

им. Ив. Джавахишвили, Грузия

E-mail: tava73@mail.ru

Поступило

24.10.2008

Исправленный вариант

07.07.2009