Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Р. Мансурова, Об однозначной разрешимости аналога задачи Трикоми с нелокальным интегральным условием сопряжения, *Матем. заметки*, 2010, том 87, выпуск 6, 867–876

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm6596>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 16:36:22

Об однозначной разрешимости аналога задачи Трикоми с нелокальным интегральным условием сопряжения

Е. Р. Мансурова

Для эллиптико-гиперболического уравнения альтернирующим методом типа Шварца доказана однозначная разрешимость в классе обобщенных решений аналога задачи Трикоми с нелокальным интегральным условием сопряжения при произвольном подходе эллиптической границы области к линии изменения типа за исключением случая касания.

Библиография: 9 названий.

1. Постановка задачи. Для уравнения

$$Lu \equiv \begin{cases} \Delta u + c(x, y)u = 0, & y > 0, \\ u_{xy} + b(x, y)u = 0, & y < 0, \end{cases} \quad (1)$$

в области D , ограниченной в полуплоскости $y > 0$ простой кривой Жордана с концами $A(0, 0)$, $B(1, 0)$ и отрезками AC : $y = -x$, BC : $x = 1$ при $y < 0$, рассмотрим аналог задачи Трикоми (задача V) в постановке Волкодавова [1].

Пусть $D_+ = D \cap \{y > 0\}$, $D_- = D \cap \{y < 0\}$.

ЗАДАЧА V. Найти в области D функцию $u(x, y)$ со свойствами

$$u(x, y) \in C(\overline{D}) \cap C^2(D_+), \quad u_{xy} \in C(D_-), \quad (2)$$

$$Lu(x, y) \equiv 0, \quad (x, y) \in D_+ \cup D_-, \quad (3)$$

$$u(x, y)|_\Gamma = \varphi(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma, \quad (4)$$

$$u(1, y) = \psi(y), \quad y \in [-1, 0], \quad (5)$$

$$u_y(x, +0) = a(x)v_-(x), \quad x \in (0, 1), \quad (6)$$

где

$$v_-(x) = \Gamma(1 - \lambda)[D_{0x}^\lambda u(x, 0) + D_{0x}^{\lambda-1} u(t, -x)], \quad 0 < \lambda < 1, \quad (7)$$

$\varphi(x, y)$, $\psi(y)$, $a(x)$ – заданные достаточно гладкие функции, $\varphi(1, 0) = \psi(0)$, $D_{0x}^\lambda u$ и $D_{0x}^{\lambda-1} u$ – соответственно производная и интеграл дробного порядка, $u(x, -t)$ – решение уравнения (1) в области D_- с краевыми условиями

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in [0, 1], \quad u(1, y) = \psi(y), \quad y \in [-1, 0], \quad \psi(0) = 0.$$

Ранее исследовалась задача (2)–(7) для уравнения (1) в области D , когда

- 1) $b(x, y) = c(x, y) \equiv 0$ [1];
- 2) $-b(x, y) = c(x, y) \equiv -\lambda$, где $\lambda = \text{const} > 0$ [2] и кривая Γ совпадала с нормальной кривой Γ_0 : $|\zeta - 1/2| = 1/2$, $\eta > 0$, $\zeta = \xi + i\eta$.

В данной работе альтернирующим методом типа Шварца доказана однозначная разрешимость в классе обобщенных решений задачи (2)–(7) для уравнения (1) при произвольном подходе кривой Γ к оси Ox за исключением случая касания. Ранее альтернирующий процесс типа Шварца был применен для доказательства теорем существования решения задачи Трикоми при довольно общих предположениях о подходе линии Γ к линии перехода $y = 0$ Бицадзе [3] для уравнения Лаврентьева, Бабенко [4] для уравнения Трикоми, Косовец [5] для обобщенного уравнения Трикоми, Сабитовым [6] для общего уравнения смешанного типа

$$\text{sgn } y|y|^m u_{xx} + u_{yy} + A(x, y)u_x + B(x, y)u_y + C(x, y)u = 0, \quad m \geq 0.$$

2. Экстремальные свойства регулярных решений. Единственность и существование решения задачи. Рассмотрим в области D_- для уравнения (1) вспомогательную задачу.

Задача Гурса. В области D_- найти решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (2), (5) и

$$u(x, 0) = \tau(x), \quad x \in [0, 1], \quad (8)$$

где $\tau(x)$ – заданная достаточно гладкая функция.

Пусть $b(x, y) \in C(\overline{D_-})$. Задачу Гурса решим методом Римана (см., например, [7; с. 68]). Строя функцию Римана $R(x, y; x_0, y_0)$ методом последовательных приближений, будем иметь

$$u(x, y) = - \int_x^1 \tau'(t) R(t, 0; x, y) dt - \int_y^0 \psi'(t) R(1, t; x, y) dt, \quad (9)$$

где функция Римана имеет вид

$$R(x, y; x_0, y_0) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, y; x_0, y_0),$$

$u_n(x, y; x_0, y_0)$ определяются рекуррентными соотношениями

$$\begin{aligned} u_1(x, y; x_0, y_0) &= - \int_{x_0}^x \int_{y_0}^y b(t, s) dt ds, \\ u_n(x, y; x_0, y_0) &= - \int_{x_0}^x \int_{y_0}^y b(t, s) u_{n-1}(t, s; x_0, y_0) dt ds, \quad n = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть $b(x, y) \in C(\overline{D_-})$. Если $\tau(x) \in C[0, 1] \cap C^1(0, 1)$, $\tau'(x) \in L[0, 1]$, $\psi(y) \in C^1[-1, 0]$ и $\tau(1) = \psi(0) = 0$, то существует единственное решение задачи Гурса и оно определяется формулой (9).

Пусть $u(x, y)$ – решение задачи Гурса в области D_- с краевыми условиями: (8) и $u(1, y) = 0$ на BC . Из формулы (9), интегрируя по частям, используя представление

производных функции Римана через функцию Римана [8; с. 45], непрерывность в $\overline{D}_-$ коэффициента $b(x, y)$ уравнения (1) и функции Римана $R(x, y; x_0, y_0)$ как суммы абсолютно и равномерно сходящегося ряда, будем иметь оценку

$$|u(x, y)| \leq C \|\tau\|, \quad (10)$$

где

$$\|\tau\| = \max_{[0,1]} |\tau(x)|, \quad C = 1 + \max_{\overline{D}_-} \int_x^1 \left| \int_y^0 b(t, \mu) R(t, \mu; x, y) d\mu \right| dt.$$

Исходя из формул (7) и (9) при условии $\tau(0) = 0$, вычислим

$$v_-(x) = \int_0^x \tau'(t)(x-t)^{-\lambda} dt - \int_0^x (x-t)^{-\lambda} dt \int_{-t}^0 \psi'(s) R(1, s; x, -t) ds. \quad (11)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Регулярным в D решением уравнения (1) назовем функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую условиям (2), (3).

ЛЕММА 1. Пусть функция $u(x, y)$ – регулярное в D_- решение уравнения (1) и $u(1, y) = 0$, $-1 \leq y \leq 0$. Если функция $u(x, 0) = \tau(x)$ (где $\tau(x) \in C[0, 1] \cap C^1(0, 1)$, $\tau'(x) \in L[0, 1]$, $\tau(1) = \tau(0) = 0$) достигает на $[0, 1]$ наибольшего положительного (соответственно наименьшего отрицательного) значения в точке $x_0 \in (0, 1)$, то $v_-(x_0) > 0$ (соответственно $v_-(x_0) < 0$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из формулы (11) с учетом условий леммы имеем

$$v_-(x_0) = \int_0^{x_0} \tau'(t)(x_0-t)^{-\lambda} dt = \int_0^{x_0} (x_0-t)^{-\lambda} [\tau(t) - \tau(x_0)]' dt.$$

Интегрируя по частям, приходим к утверждению леммы.

ЛЕММА 2. Пусть

- 1) коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют следующим условиям: $b(x, y) \in C(\overline{D}_-)$, $c(x, y)$ в D_+ ограничена и $c(x, y) \leq 0$;
- 2) $a(x) \in C[0, 1]$, $a(x) > 0$ на $(0, 1)$;
- 3) $u(x, y)$ – регулярное решение уравнения (1) в области D , равное нулю на характеристике BC .

Тогда если $\max_{\overline{D}_+} u > 0$ (соответственно $\min_{\overline{D}_+} u < 0$), то $\max_{\overline{D}_+} u$ (соответственно $\min_{\overline{D}_+} u$) достигается на кривой $\overline{\Gamma}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\max_{\overline{D}_+} u(x, y) = u(Q) > 0$, $Q \in \overline{D}_+$. На основании принципа внутреннего экстремума для эллиптических уравнений $u(x, y) \neq \text{const}$ не может достигать положительного максимума в области D_+ . Тогда $Q \in \partial D_+$. Пусть $Q \in AB$, т.е. $Q = (x_0, 0)$, $0 < x_0 < 1$. В силу граничного принципа экстремума [3; с. 26] $u_y(x_0, +0) < 0$. С учетом леммы 1 приходим к противоречию с условием (6). Тогда $Q \in \overline{\Gamma}$, что и требовалось установить.

ТЕОРЕМА 2. Пусть коэффициенты $b(x, y)$, $c(x, y)$ уравнения (1) и $a(x)$ удовлетворяют условиям леммы 2 и в классе регулярных в D решений уравнения (1) существует решение задачи V. Тогда оно единственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u(x, y)$ есть решение однородной задачи (2)–(7), где $\varphi(s) \equiv 0$, $\psi(y) \equiv 0$. Докажем, что $u(x, y) \equiv 0$ в $\bar{D}_+$. Предположим, что существует точка $(x', y') \in D_+$ такая, что $u(x', y') \neq 0$. Не теряя общности, будем считать $u(x', y') > 0$. Тогда $\max_{\bar{D}_+} u(x, y) = u(Q) > 0$, $Q \in \bar{D}_+$. В силу леммы 2 точка $Q \in \bar{\Gamma}$, что противоречит условию $u = 0$ на $\bar{\Gamma}$. Поэтому $u(x, y) \equiv 0$ в $\bar{D}_+$. В силу единственности решения задачи Гурса $u(x, y) \equiv 0$ в $\bar{D}_-$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если выполнены условия леммы 2, то для любой точки (x, y) из $\bar{D}_+$ справедлива оценка

$$\min_{\bar{\Gamma}} u(x, y) \leq u(x, y) \leq \max_{\bar{\Gamma}} u(x, y). \quad (12)$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть выполнены условия леммы 2 и $u(x, y)$ – регулярное решение уравнения (1), равное нулю на ВС. Тогда

- если $u \geq 0$ (соответственно ≤ 0) на $\bar{\Gamma}$, то $u \geq 0$ (соответственно ≤ 0) в $\bar{D}_+$;
- если $u > 0$ (соответственно < 0) на Γ , то $u > 0$ (соответственно < 0) в D_+ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Допустим, что существует точка $Q_0 \in \bar{D}_+ \setminus \bar{\Gamma}$ такая, что $u(Q_0) < 0$. Тогда $\min_{\bar{D}_+} u(x, y) = u(Q) < 0$ и поэтому выполнены все условия принципа минимума. В силу леммы 2 точка $Q \in \bar{\Gamma}$, а это противоречит тому, что $u \geq 0$ на $\bar{\Gamma}$.

б) Допустим, что $\min_{\bar{D}_+} u(x, y) = u(Q) = 0$ и $Q \in D_+$. Тогда в силу принципа Хопфа [3; с. 25] функция $u(x, y) \equiv 0$ в $\bar{D}_+$, что противоречит $u > 0$ на Γ .

Пусть $x = x(s)$, $y = y(s)$ – параметрические уравнения кривой Γ , s – длина дуги, отсчитываемая от точки B , l – длина кривой Γ . Будем предполагать относительно кривой Γ выполнение условий Бабенко (условия (Б)):

- функции $x = x(s)$, $y = y(s)$ на отрезке $[0, l]$ имеют непрерывные производные $x'(s)$, $y'(s)$, не обращающиеся одновременно в нуль; производные $x''(s)$, $y''(s)$ удовлетворяют условию Гёльдера на $[0, l]$;
- в окрестности точек A и B выполняется условие ортогональности $|dx/ds| \leq Cy(s)$, $C = \text{const} > 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Регулярное в D решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (4)–(7), назовем *регулярным решением задачи V* для уравнения (1).

ТЕОРЕМА 3. Пусть

- $\varphi(s)$ на $(0, l)$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем α и $|\varphi(s)| < C_1(l-s)^{1-\sigma_1}$, $|\varphi(s)| < C_2s^{1-\sigma_2}$, где $C_1, C_2 = \text{const} > 0$, $\sigma_1, \sigma_2 > 0$ и произвольно малы;
- $\psi(y) \in C^1[-1, 0]$ и $\psi(0) = \varphi(0) = \varphi(l) = 0$;
- $a(x) \in C^1[0, 1]$, $a(x) > 0$ на $(0, 1)$;
- коэффициенты $b(x, y)$ и $c(x, y)$ уравнения (1) подчиняются следующим условиям: $b(x, y) \in C(\bar{D}_-)$, $c(x, y) \in C^1(\bar{D}_+)$, $c(x, y) \leq 0$ в D_+ и вблизи линии $y = 0$ имеет место представление $c(x, y) = y^\delta c^*(x, y)$, где $c^*(x, y)$ – ограниченная функция, $\delta > 0$ и произвольно мало;
- на кривой Γ выполнены условия (Б).

Тогда в области D существует единственное регулярное решение задачи V для уравнения (1) и являющееся решением задачи Гурса в области D_- .

Доказательство теоремы приведено в работе [9].

3. Экстремальные свойства обобщенных решений. Единственность решения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Обобщенным в области D решением уравнения (1) будем называть функцию $u(x, y)$, если существует последовательность регулярных в D решений $\{u_p(x, y)\}$ уравнения (1), равномерно сходящаяся к $u(x, y)$ в $\bar{D}$.

ЛЕММА 3. Пусть выполнены условия 1), 2) леммы 2 и $u(x, y)$ есть обобщенное в D решение уравнения (1), равное нулю на характеристике BC . Тогда если $\max_{\bar{D}_+} u(x, y) > 0$ (соответственно $\min_{\bar{D}_+} u(x, y) < 0$), то этот максимум (соответственно минимум) достигается на кривой $\bar{\Gamma}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\max_{\bar{D}_+} u(x, y) = u(Q) > 0$, и допустим, что $Q \notin \bar{\Gamma}$. Тогда $Q \in \bar{D}_+ \setminus \bar{\Gamma}$. Пусть

$$E = \{(x, y) \in \bar{D}_+ \setminus \bar{\Gamma} \mid u(x, y) = M = u(Q) > 0\}.$$

Множество E замкнуто и не имеет общих точек с кривой $\bar{\Gamma}$. Поскольку множества $\bar{\Gamma}$ и E замкнуты, ограничены и не имеют общих точек, то расстояние между ними больше нуля. Поэтому существует простая кривая γ , лежащая в области D_+ , с концами в точках A и B , такая, что $\bar{\gamma} \cap E = \emptyset$ и $E \subset D_\gamma$, где D_γ – область, ограниченная кривыми γ , AC и CB . Так как $u(x, y)$ – обобщенное решение уравнения (1), равное нулю на BC , то существует последовательность регулярных в D решений $\{u_p(x, y)\}$ уравнения (1), равномерно сходящихся к $u(x, y)$ в $\bar{D}$ и $u_p(x, y) = 0$ на BC . Поскольку в D_γ выполнены условия леммы 2, то $\max_{\bar{D}_{\gamma+}} u_p(x, y)$ достигается на кривой $\bar{\gamma}$. Пусть $\max_{\bar{\gamma}} u = M_0$; очевидно, $M_0 < M$. Пусть $\varepsilon = (M - M_0)/2$.

В силу равномерной сходимости $\{u_p(x, y)\}$ в $\bar{D}_\gamma$ для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $p_0 = p_0(\varepsilon) > 0$ такой, что для всех $p > p_0$ и $u(x, y) \in \bar{D}_\gamma$ выполняется условие

$$u(x, y) - \varepsilon < u_p(x, y) < u(x, y) + \varepsilon.$$

Тогда на множестве E выполнено $u_p(x, y) > (M + M_0)/2$, а на кривой $\bar{\gamma} - u_p(x, y) < (M + M_0)/2$ при $p > p_0$. Следовательно, функция $u_p(x, y)$ при $p > p_0$ не достигает положительного максимума в $\bar{D}_{\gamma+}$ на кривой $\bar{\gamma}$, что противоречит лемме 2. Полученное противоречие и доказывает утверждение леммы.

СЛЕДСТВИЕ 3. а) Если выполнены условия леммы 3, то для любой точки (x, y) из $\bar{D}_+$ справедлива оценка (12).

б) Пусть выполнены условия 1), 2) леммы 2 и в классе обобщенных в D решений уравнения (1) существует решение задачи V. Тогда оно единственно.

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть выполнены условия 1), 2) леммы 2 и $u(x, y)$ – обобщенное в D решение уравнения (1), равное нулю на BC . Тогда если $u \geq 0$ (соответственно ≤ 0) на $\bar{\Gamma}$, то $u \geq 0$ (соответственно ≤ 0) в $\bar{D}_+$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству следствия 2.

4. Разрешимость задачи (2)–(7). Пусть D_0 – область, ограниченная кривыми Γ_0 , AC и CB , $D_{0+} = D_0 \cap \{y > 0\}$, $D_{0-} = D_0 \cap \{y < 0\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Равномерный в $\bar{D}$ предел последовательности регулярных решений задачи **V** назовем *обобщенным решением задачи V*.

ТЕОРЕМА 4. Пусть выполнены условия 1)–5) теоремы **3**. Тогда в области D существует единственное обобщенное решение $u(x, y)$ задачи **V**, являющееся регулярным в области D_+ , с граничными данными $u = \varphi(s)$ на Γ и $u = \psi(y)$ на BC при произвольном подходе кривой к оси $y = 0$ за исключением случая, когда в достаточно малых окрестностях концов кривой Γ имеем $dy/ds = 0$.

Доказательство теоремы проведем по схеме, примененной в [4], [6]. Предварительно установим следующие вспомогательные утверждения.

ЛЕММА 4. Пусть $D_{0+} \cup \Gamma_0 \subset D_+$. Тогда если $u(x, y)$ – регулярное решение уравнения (1) в D_+ , обращающееся в нуль на кривой Γ , то для $(x, y) \in \Gamma_0$ справедлива оценка

$$|u(x, y)| \leq \theta \max_{0 \leq x \leq 1} |u(x, 0)|, \quad 0 < \theta < 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На основании принципа внутреннего экстремума для эллиптических уравнений функция $u(x, y)$ положительный максимум и отрицательный минимум в области $\bar{D}_+$ достигает на AB . В качестве θ можно взять

$$\theta = \frac{\max_{\bar{\Gamma}_0} |u(x, y)|}{\max_{\bar{AB}} |u(x, 0)|}.$$

ЛЕММА 5. Если $\varphi_0(x) \in C[0, 1]$, $\psi(y)$ – достаточно гладкая на $[-1, 0]$ функция, $\varphi_0(1) = \psi(0)$, то существует в области D_0 обобщенное решение задачи **V** с граничными данными $u = \varphi_0$ на Γ_0 и $u = \psi$ на BC .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{\varphi_{0p}(x)\}$ – последовательность функций из теоремы **3**, удовлетворяющих условиям: $\lim_p \varphi_{0p}(x) = \varphi_0(x)$ равномерно на $[0, l]$ и $\varphi_{0p}(1) = \varphi_0(1)$. В области D по теореме **3** существует регулярное решение $u_p(x, y)$ задачи **V** для уравнения (1) с краевыми условиями $u_p = \varphi_{0p}$ на Γ_0 и $u_p = \psi$ на BC .

В силу следствия **1** в $\bar{D}_{0+}$ справедлива оценка

$$|u_p(x, y) - u_q(x, y)| \leq \max_{\bar{\Gamma}_0} |\varphi_{0p} - \varphi_{0q}|, \quad q > p.$$

Отсюда следует, что в $\bar{D}_{0+}$ последовательность $\{u_p(x, y)\}$ регулярных решений задачи **V** равномерно сходится. Тогда на $\bar{AB}$ равномерно сходится и последовательность $\{\tau_p(x)\}$, где $\tau_p(x) = u_p(x, 0)$. Из оценки (10) имеем

$$|u_p(x, y) - u_q(x, y)| \leq C \|\tau_p - \tau_q\|.$$

Тогда в $\bar{D}_-$

$$|u_p(x, y) - u_q(x, y)| \leq C \max_{\bar{\Gamma}_0} |\varphi_{0p} - \varphi_{0q}|.$$

Отсюда следует, что в $\bar{D}_-$ последовательность $\{u_p(x, y)\}$ регулярных решений задачи **V** равномерно сходится.

Таким образом, в $\overline{D}_0$ последовательность $\{u_p(x, y)\}$ регулярных решений задачи **V** равномерно сходится.

Пусть $\lim_p u_p(x, y) = u(x, y)$. Предельная функция $u(x, y)$ непрерывна в $\overline{D}_0$, $u = \varphi_0$ на Γ_0 и $u = \psi$ на BC . При $y > 0$ функция $u(x, y)$ удовлетворяет уравнению (1) и при $\psi(y) \equiv 0$ в $\overline{D}_{0+}$ справедлива оценка

$$|u(x, y)| \leq \max_{\overline{\Gamma}_0} |\varphi_0|. \quad (13)$$

ЛЕММА 6. Пусть $D_{0+} \cup \Gamma_0 \subset D_+$. Если функция $\varphi(s) \in C[0, l]$ и $\psi(y)$ достаточно гладкая на $[-1, 0]$, $\varphi(0) = \psi(0)$, то существует обобщенное решение $u(x, y)$ задачи **V** для уравнения (1) с краевыми условиями $u = \varphi$ на Γ и $u = \psi$ на BC .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для построения такого решения применим альтернирующий метод типа Шварца. В областях D_0 и D_+ построим две последовательности решений уравнения (1). В силу леммы 5 в D_0 существует обобщенное решение $z_0(x, y)$ задачи **V** с данными $z_0 = 0$ на кривой $\overline{\Gamma}_0$ и $z_0 = \psi$ на BC .

В области D_+ существует решение задачи Дирихле для уравнения (1) с данными $u_0 = \varphi$ на $\overline{\Gamma}$ и $u_0 = z_0$ на $\overline{AB}$ [3; с. 187].

Пусть $z_p(x, y)$ – обобщенное решение задачи **V** в области D_0 с граничными условиями $z_p(x, y) = u_{p-1}(x, y)$ на $\overline{\Gamma}_0$ и $z_p = \psi$ на BC , где $p = 1, 2, \dots$, $u_p(x, y)$ – решение задачи Дирихле для уравнения (1) в области D_+ с данными $u_p = \varphi$ на $\overline{\Gamma}$ и $u_p = z_p$ на $\overline{AB}$.

Последовательности $\{u_p(x, y)\}$ и $\{z_p(x, y)\}$ равномерно сходятся в $\overline{D}_+$ и в $\overline{D}_0$. Действительно, в силу принципа максимума для эллиптических уравнений имеем

$$|u_{p+1}(x, y) - u_p(x, y)| \leq \max_{0 \leq x \leq 1} |z_{p+1}(x, 0) - z_p(x, 0)| \leq \max_{\overline{D}_{0+}} |z_{p+1}(x, y) - z_p(x, y)|. \quad (14)$$

С другой стороны, в силу оценки (13) и леммы 4 в $\overline{D}_{0+}$

$$\begin{aligned} |z_{p+1}(x, y) - z_p(x, y)| &\leq \max_{\overline{\Gamma}_0} |u_p - u_{p-1}| \\ &\leq \theta \max_{0 \leq x \leq 1} |u_p(x, 0) - u_{p-1}(x, 0)| \leq \theta \max_{\overline{D}_{0+}} |z_p - z_{p-1}|. \end{aligned}$$

Продолжая это рассуждение шаг за шагом, получим в $\overline{D}_{0+}$

$$|z_{p+1}(x, y) - z_p(x, y)| \leq \theta^p \max_{\overline{D}_{0+}} |z_1 - z_0|. \quad (15)$$

Из оценок (14), (15) следует, что

$$|u_{p+1}(x, y) - u_p(x, y)| \leq \theta^p \max_{\overline{D}_{0+}} |z_1 - z_0|. \quad (16)$$

Тогда из оценок (15), (16) следует, что $z_p(x, y)$ сходится к $z(x, y)$ равномерно в $\overline{D}_{0+}$ и $u_p(x, y)$ сходится к $u(x, y)$ равномерно в $\overline{D}_+$, и в $\overline{D}_{0+}$ выполнено $z(x, y) \equiv u(x, y)$. Тогда последовательность $\{\tau_p(x)\}$ равномерно сходится на $\overline{AB}$ и в силу оценки (10) последовательность $\{z_p(x, y)\}$ равномерно сходится в $\overline{D}_-$. Таким образом, последовательность $\{z_p(x, y)\}$ равномерно сходится в $\overline{D}_0$. Функция $u(x, y)$ является “аналитическим” продолжением функции $z(x, y)$ и регулярным решением уравнения (1) в области D_+ . Кроме того, при $\psi \equiv 0$ в $\overline{D}_+$

$$|u(x, y)| \leq \max_{\overline{\Gamma}} |\varphi|. \quad (17)$$

ЛЕММА 7. Пусть выполнены все условия леммы 6, и пусть функция $\varphi(s) > 0$ на $(0, l)$. Тогда существует обобщенное решение задачи V такое, что $u = 0$ на BC и $u(x, y) > 0$ в $D_+ \cup \Gamma$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 6 существует обобщенное решение $u(x, y)$ задачи V для уравнения (1) с граничными данными $u = \varphi$ на Γ и $u = 0$ на BC . В области D_+ такое решение $u(x, y)$ задачи V является регулярным решением уравнения (1). Если $\varphi(s) > 0$ на Γ , то в силу следствия 4 имеем $u(x, y) \geq 0$ в $\bar{D}_+$. Пусть $\min_{\bar{D}_+} u(x, y) = u(Q) = 0$ и $Q \in D_+$. Тогда в силу принципа Хопфа функция $u(x, y) \equiv 0$ в $\bar{D}_+$, что противоречит тому, что $u > 0$ на кривой Γ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. 1. Пусть $\psi \equiv 0$ и $\varphi(s) = 0$ при $y < h$, $h > 0$ и $\varphi(s) \geq 0$ при $y \geq h$. Построим последовательность дуг Γ_p , $p = 1, 2, \dots$, удовлетворяющих следующим условиям:

- 1) Γ и Γ_p совпадают при $y \geq h$, $h = h(p) \rightarrow 0$ при $p \rightarrow \infty$;
- 2) Γ_p оканчивается в точках A и B малыми дугами c_p и c'_p нормальных кривых;
- 3) Γ_p имеет непрерывную кривизну;
- 4) при $p \rightarrow \infty$ дуги c_p и c'_p стягиваются в точки A и B соответственно.

Пусть D_p – область, ограниченная дугой Γ_p и характеристиками AC и BC . На кривой Γ_p определим функцию

$$\varphi_p(s) = \begin{cases} \varphi(s), & y \geq h, \\ 0, & y < h. \end{cases}$$

В области D_p по теореме 3 существует регулярное решение $u_p(x, y)$ задачи V для уравнения (1) с граничными данными $u_p = \varphi_p$ на Γ_p и $u_p = \psi \equiv 0$ на BC .

Пусть $z(x, y)$ – обобщенное в области D^* решение задачи V, равное нулю на BC и $z(x, y) > 0$ в D_+^* , где $D_-^* \equiv D_-$, $D_+^* \supset D_+ \cup \Gamma$. Такое решение в силу леммы 7 существует. Поскольку $z(x, y) > 0$ в D_+^* , существует $M = \text{const}$, не зависящая от p и такая, что на Γ_p

$$Mz - u_p \geq 0. \quad (18)$$

Из оценки (18) на основании следствия 4

$$Mz - u_p \geq 0 \quad \text{в } \bar{D}_{p+}. \quad (19)$$

Пусть $G_p = D \cap D_p$, и положим

$$v_p(x, y) = \begin{cases} u_p(x, y), & (x, y) \in \bar{D}_p, \\ 0, & (x, y) \in \bar{D} \setminus \bar{D}_p. \end{cases}$$

Пусть K_p и K'_p – два круга с центрами в точках $(0, 0)$ и $(1, 0)$, внутри которых содержатся дуги c_p и c'_p , и при $p \rightarrow \infty$ их радиусы стремятся к нулю. Пусть $\varepsilon_p = \max z(x, y)$ в $\bar{K}_p$ и $\bar{K}'_p$. Тогда из (19) следует, что на границе G_p при $y > 0$

$$|v_q(x, y) - v_p(x, y)| = |u_q - u_p| \leq 2Mz \leq 2M\varepsilon_p.$$

Поэтому всюду в $\bar{G}_{p+}$ справедлива оценка

$$|v_q(x, y) - v_p(x, y)| \leq 2M\varepsilon_p.$$

Для точек $(x, y) \in \overline{D}_+ \cup \overline{D}_q \setminus \overline{D}_p$ выполнено $0 \leq v_q \leq M\varepsilon_p$, а для $(x, y) \in \overline{D} \setminus \overline{D}_q$ выполнено $v_q(x, y) = v_p(x, y) = 0$. Тогда для $(x, y) \in \overline{D}_+$

$$|v_q(x, y) - v_p(x, y)| \leq 2M\varepsilon_p.$$

Так как $\varepsilon_p \rightarrow 0$ при $p \rightarrow \infty$, то $\{v_p(x, y)\}$ равномерно сходится в $\overline{D}_+$. Тогда равномерно сходится $\{\tau_p(x)\}$ и, следовательно, равномерно сходится $\{u_p(x, y)\}$ в $\overline{D}_-$. Итак, $\{u_p(x, y)\}$ равномерно сходится в $\overline{D}$ и

$$\lim_p v_p(x, y) = \lim_p u_p(x, y) = u(x, y).$$

При этом функция $u(x, y)$ принимает на Γ значения $\varphi(s)$, а на характеристике BC имеем $u = 0$. В области D_+ $u(x, y)$ удовлетворяет уравнению (1), непрерывна в $\overline{D}$ и в $\overline{D}_+$ имеет место оценка

$$0 \leq u(x, y) \leq \max_{\overline{\Gamma}} \varphi.$$

2. Если $\varphi(s) \geq 0$ и $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$, то, строя по последовательности $\{\varphi_n(s)\}$ непрерывных неотрицательных функций, обращающихся в нуль в достаточно малых окрестностях точек $s = 0$ и $s = l$ и имеющих пределом $\varphi(s)$, соответствующую последовательность $\{u_p(x, y)\}$ решений задачи V, получим, что $u = \lim_{p \rightarrow \infty} u_p$. В области D_+ функция $u(x, y)$ удовлетворяет уравнению (1), $u = \varphi$ на Γ , $u = 0$ на BC и $u(x, y)$ непрерывна в $\overline{D}$. Кроме того, в $\overline{D}_+$ имеет место оценка

$$0 \leq u(x, y) \leq \max_{\overline{\Gamma}} \varphi. \quad (20)$$

3. Пусть $\varphi(s)$ – знакопеременная функция и $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$; тогда $\varphi = \varphi_+ - \varphi_-$, где $\varphi_+ \geq 0$ и $\varphi_- \geq 0$ и $\varphi_+(0) = \varphi_+(l) = \varphi_-(0) = \varphi_-(l)$, а $u = u_+ - u_-$, где $u_+(x, y)$ и $u_-(x, y)$ строятся соответственно по функциям φ_+ и φ_- . Из оценки (20) в $\overline{D}_+$ имеем

$$|u(x, y)| = u_+(x, y) + u_-(x, y) \leq \max_{\overline{\Gamma}} (\varphi_+ + \varphi_-) = \max_{\overline{\Gamma}} |\varphi|.$$

4. Пусть $u = \psi \neq 0$ на характеристике BC , $\psi(0) = 0$. Пусть D^* – область из первого пункта с границей $\partial D^* = \Gamma^* \cup AC \cup CB$, причем $D_0 \cup \Gamma_0 \subset D^*$. По лемме 6 существует обобщенное решение задачи V, непрерывное в $\overline{D}^*$ с граничными данными: $u^* = 0$ на Γ^* и $u^* = \psi$ на BC . Если $\varphi^*(s) = u^*$ на Γ , то обобщенное решение задачи V для области D определяется формулой $u(x, y) = u^*(x, y) + \tilde{u}(x, y)$, где $\tilde{u}(x, y)$ – решение задачи V в области D с граничными данными $\tilde{u} = \varphi(s) - \varphi^*(s)$ на Γ и $\tilde{u} = 0$ на BC .

Решение $\tilde{u}(x, y)$ задачи V для уравнения (1) в области D существует в силу пунктов 1–3.

Единственность построенного решения $u(x, y)$ задачи V вытекает из следствия 3.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. Ф. Волкодав, О. Ю. Наумов, “Для уравнения смешанного типа задача Т с сопряжением специального вида”, *Неклассические уравнения математической физики*, Ин-т матем. СО РАН, Новосибирск, 2002, 41–49.

- [2] В. Ф. Волкодавov, Ю. А. Илюшина, “Для уравнения смешанного типа единственность решения задачи T с сопряжением производной по нормали с дробной производной”, *Изв. вузов. Матем.*, 2003, № 9, 6–9.
- [3] А. В. Бицадзе, *Некоторые классы уравнений в частных производных*, Наука, М., 1981.
- [4] К. И. Бабенко, “О задаче Трикоми”, *Докл. АН СССР*, **291**:1 (1986), 14–19.
- [5] А. А. Косовец, “Разрешимость задачи Трикоми для одного уравнения смешанного типа”, *Дифференц. уравнения*, **21**:9 (1985), 1627–1628.
- [6] К. Б. Сабитов, “Альтернирующий метод типа Шварца в теории уравнений смешанного типа”, *Докл. РАН*, **322**:3 (1992), 476–480.
- [7] С. Л. Соболев, *Уравнения математической физики*, Наука, М., 1992.
- [8] В. Ф. Волкодавov, М. Е. Лернер, Н. Я. Николаев, В. А. Носов, *Таблицы некоторых функций Римана, интегралов и рядов*, Изд-во КГПИ, Куйбышев, 1982.
- [9] Е. Р. Мансурова, “К вопросу существования аналога задачи Трикоми для уравнения смешанного типа с нелокальным интегральным условием сопряжения”, *Труды международной конференции “Дифференциальные уравнения и смежные проблемы” посвященной юбилею академика Владимира Александровича Ильина*, т. 2, Гилем, Уфа, 2008, 111–117.

Е. Р. Мансурова

Марийский государственный университет, г. Йошкар-Ола

E-mail: mansurovka@mail.ru

Поступило

28.11.2008