Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. В. Ролдугин, О числе максимально негамильтоновых графов, *Матем. заметки*, 2004, том 75, выпуск 5, 702–710

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm66>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 10:54:31

УДК 519.1

О ЧИСЛЕ МАКСИМАЛЬНО НЕГАМИЛЬТОНОВЫХ ГРАФОВ

П. В. Ролдугин

В данной работе изучаются максимально негамильтоновы графы (МНГ графы), т.е. негамильтоновы графы, в которые нельзя добавить новое ребро без нарушения его негамильтоновости. Показано, что изучение МНГ графов можно свести к изучению так называемых упрощенных МНГ графов. Получены ограничения на структуру максимальных клик упрощенных МНГ графов, оценены порядки и число таких графов.

Библиография: 5 названий.

0. Введение. В этой работе мы рассматриваем только непомеченные конечные неориентированные графы без петель и кратных ребер. Термины, относящиеся к теории графов, можно найти в учебнике [1]. Напомним, что *гамильтоновым графом* называется граф, в котором существует простой цикл, проходящий по всем вершинам графа (гамильтонов цикл). Графы, в которых такой цикл отсутствует, называются негамильтоновыми.

В данной работе изучаются так называемые максимально негамильтоновы графы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Граф G будем называть *максимально негамильтоновым графом* (сокращенно МНГ графом), если выполнены два условия:

- 1) граф G негамильтонов;
- 2) при добавлении хотя бы одного ребра, инцидентного любой паре несмежных вершин, граф G становится гамильтоновым.

Результаты, относящиеся к таким графам, кроме работы автора [2] можно найти также в работе [3]. Кроме того, понятие МНГ графа возникает при доказательстве теоремы Поша (например, в монографии [4]).

Поскольку любой негамильтонов граф содержится в качестве остовного подграфа в некотором максимально негамильтоновом графе, изучение максимально негамильтоновых графов может позволить продвигнуться в вопросах, относящихся к гамильтоновым циклам, таких, как: построение критериев существования гамильтонова цикла, подсчет числа гамильтоновых (или негамильтоновых) графов и так далее.

В утверждении 1 настоящей работы показано, что изучение МНГ графов можно свести к изучению так называемых упрощенных МНГ графов. В упрощенном графе каждая максимальная клика содержит не более одной собственной вершины, т.е. вершины, принадлежащей этой максимальной клике и не лежащей в других максимальных кликах

(под *максимальной кликой* графа G понимается полный подграф в G , не принадлежащий целиком никакому другому полному подграфу графа G).

Пусть $K_1, \dots, K_r$ – такая совокупность максимальных клик графа G , что каждое ребро графа принадлежит одной из этих клик (в этом случае будем говорить, что объединение указанных клик дает весь граф). Обозначим $R = \{1, 2, \dots, r\}$. Пусть I – подмножество R . Обозначим n_I – количество вершин, лежащих в каждой из максимальных клик K_i для $i \in I$ и не принадлежащих максимальным кликам с номерами из $R \setminus I$. Доказывается (утверждение 3), что набор n_I , $I \subseteq R$, задаваемый упрощенным МНГ графом с r максимальными кликами, обязан быть решением некоторой системы линейных неравенств (так называемой МНГ-системы), задаваемой значением r .

Кроме того, получены верхние оценки порядков и числа (утверждение 4 и следствие к нему) упрощенных МНГ графов, которые могут быть представлены в виде объединения r своих максимальных клик; в частности, доказывается, что число таких графов конечно.

Автор выражает благодарность Ф. М. Малышеву за сделанные замечания и внимание к работе.

1. Упрощенные МНГ графы. *Собственной вершиной* максимальной клики K графа G назовем вершину, принадлежащую клике K , и не принадлежащую другим максимальным кликам графа G .

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть K – максимальная клика графа G , имеющая собственную вершину. Добавим в граф G вершину a и ребра, соединяющие вершину a и каждую из вершин клики K . Полученный такой процедурой граф H является МНГ графом тогда и только тогда, когда G – МНГ граф.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть b – собственная вершина клики K графа G . Предположим, что G – МНГ граф. Докажем, что граф H негамильтонов. Действительно, если граф H гамильтонов, то существует гамильтонов цикл $\bar{t}$, который содержит отрезок kak' , где k, k' – вершины клики K . Поскольку ребро (k, k') принадлежит графу G , то, заменяя в цикле $\bar{t}$ отрезок kak' на отрезок kk' , получаем гамильтонов цикл в графе G , что противоречит его негамильтоновости.

Далее, пусть x, y – две несмежные вершины графа G . Покажем, что в графе H их соединяет гамильтонова цепь. Существует гамильтонова цепь $x\bar{t}y$ в графе G . Поскольку собственная вершина клики смежна только с другими вершинами той же клики, любая гамильтонова цепь должна содержать отрезок bb' , где b' – вершина клики K , отличная от b . Заменяя этот отрезок отрезком bab' , получаем требуемую цепь в графе H . Остается доказать, что существует гамильтонова цепь в графе H между вершинами x и a , где x – вершина графа G , не лежащая в клике K . Пусть y – любая вершина клики K графа G , не смежная с x (такая вершина найдется, поскольку x не лежит в K). Тогда в G существует гамильтонова цепь $x\bar{t}y$, соединяющая x и y . Цепь $x\bar{t}ya$ есть искомая гамильтонова цепь в графе H между вершинами x и a . Следовательно, в графе H между любыми двумя несмежными вершинами существует гамильтонова цепь и граф H негамильтонов. Это означает, что H – МНГ граф.

Пусть теперь H – МНГ граф. Предположим, что граф G гамильтонов. Но тогда в нем существует гамильтонов цикл, и этот цикл содержит отрезок b_1bb_2 , где b_1, b_2 – различные вершины клики K , отличные от b (поскольку вершина b – собственная вершина

клики K). Заменяя в этом гамильтоновом цикле отрезок b_1bb_2 отрезком b_1bab_2 , получаем гамильтонов цикл в графе H . Следовательно, граф G негамильтонов.

Пусть x и y – две несмежные вершины графа G . Тогда эти вершины не смежны и в графе H . Следовательно, в H вершины x и y соединяет гамильтонова цепь. Поскольку a смежна только с вершинами клики K графа G , указанная гамильтонова цепь обязана содержать отрезок b_1ab_2 , где b_1, b_2 – различные вершины клики K . Заменяем этот отрезок цепью b_1b_2 и получим гамильтонову цепь в графе G , соединяющую вершины x и y . Таким образом, G – МНГ граф.

Утверждение 1 доказано.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Граф, в котором каждая максимальная клика содержит не более одной собственной вершины, назовем *упрощенным графом*.

Из утверждения 1 следует, что любой МНГ граф может быть получен последовательным добавлением новых собственных вершин в максимальные клики с собственными вершинами некоторого упрощенного МНГ графа. То есть множество всех МНГ графов разбивается на непересекающиеся семейства, каждое из которых задается упрощенным МНГ графом. Переход от изучения всех МНГ графов к изучению упрощенных МНГ графов имеет принципиальное значение: например, далее показано, что количество упрощенных МНГ графов с фиксированным числом r максимальных клик конечно и получена зависящая от r верхняя оценка их числа.

2. Построение МНГ-системы. Пусть $K_1, \dots, K_r$ – совокупность таких максимальных клик графа G , что каждое ребро графа принадлежит одной из этих клик. В частности, в качестве $K_1, \dots, K_r$ можно взять совокупность всех максимальных клик графа G . Обозначим $R = \{1, 2, \dots, r\}$. Пусть I – подмножество R . Определим подмножество M_I множества вершин графа G следующим образом:

$$M_I = \left(\bigcap_{i \in I} K_i \right) \setminus \left(\bigcap_{j \in R \setminus I} K_j \right).$$

Очевидно, что множества M_I и M_J не пересекаются при различных I и J , а $\bigcup_{I \subseteq R} M_I$ исчерпывает все множество вершин графа G и $M_\emptyset = \emptyset$. Далее нам понадобится следующая лемма.

ЛЕММА 1. Пусть I – произвольное подмножество в R . Тогда любая вершина a из множества M_I смежна со всеми вершинами максимальных клик K_i , $i \in I$, отличными от a , и только с ними.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть для некоторого $i \in I$ вершина b лежит в максимальной клике K_i . Тогда, поскольку по определению множества M_I вершина a обязана, в частности, лежать в клике K_i , вершины a и b смежны. Пусть теперь вершина b смежна с вершиной a . Найдется максимальная клика K_i , содержащая ребро (a, b) (возможна такая найдется не одна – возьмем любую из них). В частности, клика K_i будет содержать вершину a , из-за чего $i \in I$. Если i не принадлежит I , то a принадлежит множеству $(\bigcup_{j \in R \setminus I} K_j)$ и, следовательно, не может лежать во множестве M_I . Лемма 1 доказана.

Обозначим $n_I = |M_I|$, где I – произвольное подмножество в R . Для МНГ графов множества M_I , $I \subseteq R$, содержат относительно небольшое число элементов, а именно справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Пусть G – МНГ граф. Тогда, если $I_1 \subsetneq I_2 \subsetneq \dots \subsetneq I_t \subseteq R$ – цепочка вложенных различных подмножеств R , причем $|I_1| \geq 2$, то

$$\sum_{i=1}^t n_{I_i} \leq |I_t| - 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\bigcup_{i=1}^t M_{I_i} = \{a_1, \dots, a_m\}$ и $I_i = \{i_1, \dots, i_s\}$. Поскольку множества M_I и M_J не пересекаются при $I \neq J$, то

$$\sum_{i=1}^t n_{I_i} = \sum_{i=1}^t |M_{I_i}| = \left| \bigcup_{i=1}^t M_{I_i} \right| = m$$

и, следовательно, для доказательства теоремы достаточно показать, что $m < s$. Во множестве I_1 найдется пара различных номеров p и q , поскольку по условию теоремы $|I_1| \geq 2$. Пусть, далее, h_p – вершина из максимальной клики K_p и h_q – вершина из максимальной клики K_q , причем h_p несмежна с h_q (такие вершины найдутся, поскольку клика K_p не совпадает с кликой K_q). Из несмежности вершин h_p и h_q следуют два вывода:

- 1) ни одна из вершин h_p и h_q не лежит во множестве $\{a_1, \dots, a_m\}$, поскольку по предыдущей лемме каждая из a_j смежна со всеми вершинами клик K_p и K_q ;
- 2) в G вершины h_p и h_q соединены гамильтоновой цепью (простой цепью, проходящей по всем остальным вершинам графа), поскольку G – МНГ граф.

Гамильтонова цепь из h_p в h_q не содержит отрезков $a_i a_j$, т.е. не может иметь вид

$$h_p \bar{t}_1 a_i a_j \bar{t}_2 h_q,$$

поскольку иначе в графе G найдется гамильтонов цикл

$$h_p \bar{t}_1 a_i h_q \bar{t}_2^{-1} a_j,$$

что противоречит негамильтоновости графа G .

Таким образом, гамильтонова цепь, соединяющая h_p и h_q , обязана иметь вид

$$h_p \bar{t}_1 a_{j_1} \bar{t}_2 a_{j_2} \bar{t}_3 \dots \bar{t}_m a_{j_m} \bar{t}_{m+1} h_q,$$

причем цепи $\bar{t}_i$, $i = 2, \dots, m$, содержат хотя бы по одной вершине. Без ограничения общности считаем, что $j_l = l$, $l = 1, \dots, m$. Тогда гамильтонова цепь из h_p в h_q примет вид

$$h_p \bar{t}_1 a_1 \bar{t}_2 a_2 \bar{t}_3 \dots \bar{t}_m a_m \bar{t}_{m+1} h_q.$$

Обозначим для $i = 2, \dots, m$ через b_i последнюю вершину в цепи $\bar{t}_i$. Пусть, дополнительно, b_1 – последняя вершина в цепи $\bar{t}_1$, если эта цепь не пуста, и b_1 совпадает с h_p , если цепь $\bar{t}_1$ пуста.

В этих обозначениях гамильтонова цепь выглядит следующим образом:

$$h_p \bar{t}_1 b_1 a_1 \bar{t}_2 b_2 a_2 \bar{t}_3 \dots \bar{t}_m b_m a_m \bar{t}_{m+1} h_q,$$

причем новые цепи $\bar{t}_i, i = 1, \dots, m+1$, могут быть пустыми.

По лемме 1 получаем: $\{b_1, \dots, b_m\} \subset K_{i_1} \cup \dots \cup K_{i_s}$. Предположим, что найдется такое $i \in 1, \dots, m$, что b_i принадлежит клике K_q . Тогда в G существует гамильтонов цикл

$$h_p \bar{t}_1 b_1 a_1 \bar{t}_2 \dots \bar{t}_i b_i h_q \bar{t}_{m+1}^{-1} a_m b_m \bar{t}_m^{-1} \dots \bar{t}_{i+1}^{-1} a_i,$$

что противоречит негамильтоновости графа G . Следовательно, никакая из вершин $b_1, \dots, b_m$ не лежит в клике K_q .

Теперь предположим, что $m \geq s$. Тогда, поскольку все вершины $b_1, \dots, b_m$ лежат в кликах $K_{i_1}, \dots, K_{i_s}$ и никакая из этих вершин не лежит в клике K_q , которая является одной из клик $K_{i_1}, \dots, K_{i_s}$, найдется пара вершин b_i и b_j , лежащая в одной клике. Следовательно, b_i и b_j соединены ребром в графе G . Кроме того, $a_i \in M_I$ и $a_j \in M_J$, где $I, J \in \{I_1, \dots, I_t\}$. Поскольку $I_1 \subset I_2 \subset \dots \subset I_t$, то либо $I \subseteq J$, либо $J \subseteq I$. Также выполняется одно из двух неравенств: $i < j$ или $j < i$. Проведем доказательство для случая, когда $i < j$ и $J \subseteq I$; в остальных трех случаях доказательство проводится аналогично. По лемме 1 получаем, что если некоторая вершина c , отличная от a_i , смежна с a_j , то она смежна и с вершиной a_i . Следовательно, и первая вершина в цепи $\bar{t}_{i+1}$ и первая вершина в цепи $\bar{t}_{j+1}$ смежны с a_i . Но тогда можно указать гамильтонов цикл в графе G :

$$h_p \bar{t}_1 b_1 a_1 \bar{t}_2 \dots \bar{t}_i b_i b_j \bar{t}_j^{-1} a_{j-1} b_{j-1} \bar{t}_{j-1}^{-1} \dots \bar{t}_{i+1}^{-1} a_i \bar{t}_{j+1} b_{j+1} a_{j+1} \bar{t}_{j+2} \dots \bar{t}_{m+1} h_q a_j,$$

что противоречит с определением МНГ графа. Таким образом, неравенство $m \geq s$ приводит к противоречию. Теорема 1 доказана.

Приведем в виде следствия один частный случай.

СЛЕДСТВИЕ. Если G – МНГ граф, то для любого $I \subseteq R$ такого, что $|I| \geq 2$, выполнено неравенство

$$n_I \leq |I| - 1.$$

Согласно доказанной теореме для МНГ графа значения n_I ограничены сверху при $|I| \geq 2$. Очевидно также, что $n_\emptyset = 0$. Но остается вопрос об ограничении сверху величины $n_{\{i\}} = |M_{\{i\}}|, i = 1, \dots, r$. Легко видеть, что во множество $M_{\{i\}} = K_i \setminus \bigcup_{j \neq i} K_j$ входят только собственные вершины максимальной клики K_i , т.е. те вершины, которые принадлежат клике K_i и не принадлежат другим максимальным кликам из набора $K_1, \dots, K_r$. В предыдущем разделе показано, что изучение МНГ графов можно свести к изучению упрощенных МНГ графов. Но для упрощенных графов по определению все $n_{\{i\}} \leq 1, i = 1, \dots, r$. Таким образом, набор $n_I, I \subseteq R, I \neq \emptyset$, задаваемый упрощенным

МНГ графом, обязан удовлетворять системе линейных неравенств (СЛН), состоящей из трех подсистем:

$$\{x_I \geq 0, \quad I \subseteq R, \quad I \neq \emptyset, \quad (1)$$

$$\left\{ \sum_{i=1}^t x_{I_i} \leq |I_t| - 1, \quad I_1 \subsetneq I_2 \subsetneq \dots \subsetneq I_t \subseteq R, \quad |I_1| \geq 2, \quad t \in 1, \dots, r-1, \quad (2)$$

$$\{x_{\{i\}} \leq 1, \quad i \in 1, \dots, r. \quad (3)$$

Множеством неизвестных этой системы являются $\{x_I : I \subseteq R, I \neq \emptyset\}$. Упростим указанную систему неравенств, перейдя к эквивалентной.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Если в СЛН, задаваемой неравенствами (1) и (2), из неравенств (2) оставить только неравенства

$$\begin{aligned} \left\{ \sum_{i=1}^t x_{I_i} \leq t, \quad I_1 \subsetneq I_2 \subsetneq \dots \subsetneq I_t \subseteq R, \quad |I_i| = i + 1, \right. \\ \left. i = 1, \dots, t, \quad t \in 1, \dots, r-1, \right. \end{aligned} \quad (4)$$

то получим СЛН, эквивалентную исходной.

Доказательство следует из того, что любая цепочка включений $I_1 \subsetneq I_2 \subsetneq \dots \subsetneq I_s \subseteq R$, $|I_1| \geq 2$, следует из некоторой цепочки включений $I_1 \subsetneq I_2 \subsetneq \dots \subsetneq I_t \subseteq R$, $|I_t| = i + 1$, $i = 1, \dots, t$, такой, что $\{J_1, \dots, J_s\} \subset \{I_1, \dots, I_t\}$.

Таким образом, СЛН, составленная из неравенств (1)–(3) эквивалентна своей подсистеме, состоящей из неравенств (1), (4), (3). Далее эту подсистему станем называть МНГ-системой. Из вышесказанного следует утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Пусть граф G – упрощенный МНГ граф с r максимальными кликами, объединение которых дает граф G . Набор n_I , $I \subseteq R$, $I \neq \emptyset$, задаваемый графом G , является целочисленным решением МНГ-системы, однозначно определяемой значением натурального параметра $r > 1$.

3. Оценка порядков и числа упрощенных МНГ графов. Пусть G – упрощенный МНГ граф с r максимальными кликами, объединение которых дает граф G . Напомним, что порядок графа G равен $\sum_{I \subseteq R, I \neq \emptyset} n_I$. Рассмотрим линейную функцию $\tau(x)$, где $x = \{x_I : I \subseteq R, I \neq \emptyset\}$:

$$\tau(x) = \sum_{I \subseteq R, I \neq \emptyset} x_I.$$

Пусть максимум этой линейной функции на множестве всех решений МНГ-системы равен $C(r)$. Тогда порядок графа G не превышает $C(r)$. Обозначим через $P(r)$ максимум порядков упрощенных МНГ графов, имеющих ровно r максимальных клик. Ясно, что при любом натуральном $r > 1$ $P(r) \leq C(r)$.

Далее вычислим точное значение величины $C(r)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Для любого натурального $r > 1$ верно равенство

$$C(r) = 2^{r-1} + \frac{r-3}{2} \cdot \binom{r}{[r/2]} + r.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При фиксированном r множество неизвестных МНГ-системы это множество $x = \{x_I : I \subseteq R, I \neq \emptyset\}$. Количество неизвестных равно $2^r - 1$. Отметим, что неизвестные, участвующие в неравенствах (4), и неизвестные, участвующие в неравенствах (3), образуют непересекающиеся множества. Поэтому МНГ-систему можно разделить на две независимые СЛН:

$$\begin{cases} x_{\{i\}} \geq 0, & i \in 1, \dots, r, \\ x_{\{i\}} \leq 1, & i \in 1, \dots, r, \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} x_I \geq 0, & I \subseteq R, \quad |I| \geq 2, \\ \sum_{i=1}^t x_{I_i} \leq t, & I_1 \subset I_2 \subset \dots \subset I_t \subseteq R, \quad |I_i| = i + 1, \\ i = 1, \dots, t, & t \in 1, \dots, r - 1. \end{cases} \quad (6)$$

Пусть линейная функция $\sum_{i=1}^r x_{\{i\}}$ имеет максимум $C_1(r)$ на множестве всех решений СЛН (5); линейная функция $\sum_{I \subseteq R, |I| \geq 2} x_I$ имеет максимум $C_2(r)$ на множестве решений системы (6). Легко видеть, что $C(r) = C_1(r) + C_2(r)$. Кроме того, очевидно, что $C_1(r) = r$.

Остается доказать, что

$$C_2(r) = 2^{r-1} + \frac{r-3}{2} \cdot \binom{r}{[r/2]}.$$

Обозначим $A = \{I \subseteq R : |I| \geq 2\}$. Пусть $\tilde{y} = \{y_I, I \in A\}$ – произвольное целочисленное решение системы (6). Докажем, что тогда существует решение $\tilde{y}^{(1)} = \{y_I^{(1)}, I \in A\}$ такое, что при всех $I \in A$: $2 \leq |I| \leq [\frac{r}{2}] - 1$ $y_I^{(1)} = 0$, а при $I \in A$: $[\frac{r}{2}] + 1 \leq |I| \leq r$ $y_I^{(1)} = y_I$, и, кроме того, целевая функция $\sum_{I \in A} x_I$ для решения $\tilde{y}^{(1)}$ не меньше, чем для $\tilde{y}$: $\sum_{I \in A} y_I \leq \sum_{I \in A} y_I^{(1)}$. Пусть само решение $\tilde{y}$ не годится в качестве $\tilde{y}^{(1)}$ – это означает, что существует i_0 , $2 \leq i_0 \leq [\frac{r}{2}] - 1$, которое равно минимальному номеру из таких номеров i , что $\max\{y_I : |I| = i\} > 0$. Далее обозначим

$$\max\{y_I : |I| = i_0\} = y_0 > 0, \quad X = \{I \in A : |I| = i_0, y_I = y_0\},$$

$$Y = \{J \in A : |J| = i_0 + 1, \exists I \in X \text{ такое, что } I \subset J\}.$$

Положим

$$y'_I = \begin{cases} y_I - 1, & \text{если } I \in X, \\ y_I + 1, & \text{если } I \in Y, \\ y_I, & \text{если } I \in A \setminus (X \cup Y). \end{cases}$$

Очевидно, что $\tilde{y}' = \{y'_I : I \in A\}$ – новое решение (6). По принципу Дирихле $|Y| \geq |X|$, поэтому целевая функция для нового решения не уменьшится: $\sum_{I \in A} y_I \leq \sum_{I \in A} y'_I$.

Теперь, если решение $\tilde{y}'$ не годится в качестве $\tilde{y}^{(1)}$, то применим к $\tilde{y}'$ те же самые рассуждения и получим решение $\tilde{y}''$. За конечное число таких шагов, не уменьшая целевой функции, получим искомое решение $\tilde{y}^{(1)}$.

Совершенно аналогично от решения $\tilde{y}^{(1)}$ можно перейти к решению $\tilde{y}^{(2)}$, в котором при всех $I \in A$: $2 \leq |I| \leq \left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor - 1$ $y_I^{(2)} = 0$, а при $I \in A$: $\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor + 1 \leq |I| \leq r$ $y_I^{(1)} = 1$, и целевая функция $\sum_{I \in A} x_I$ для решения $\tilde{y}^{(2)}$ не меньше, чем для $\tilde{y}^{(1)}$. Для этого рассматривается i_0 : $\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor + 1 \leq i_0 \leq r$ — максимальный номер такой, что

$$\max\{y_I^{(1)} : |I| = i_0\} = y_0 > 1, \quad X = \{I \in A : |I| = i_0, y_I = y_0\} \quad \text{и} \\ Y = \{J \in A : |J| = i_0 - 1, \exists I \in X \text{ такое, что } I \supset J\}.$$

Наконец от решения $\tilde{y}^{(2)}$ можно перейти к решению $\tilde{y}^{(3)}$:

$$y_I^{(3)} = \begin{cases} 0, & \text{если } 2 \leq |I| \leq \left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor, \\ \left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor - 1, & \text{если } |I| = \left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor, \\ 1, & \text{если } \left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor + 1 \leq |I| \leq r. \end{cases}$$

Мы исходили из произвольного решения $\tilde{y}$ и, поскольку на всех изложенных этапах целевая функция не уменьшалась, для решения $\tilde{y}^{(3)}$ целевая сумма самая большая, т.е. $C_2(r) = \sum_{I \in A} y_I^{(3)}$. Остается заметить, что

$$\sum_{I \in A} y_I^{(3)} = 2^{r-1} + \frac{r-3}{2} \cdot \binom{r}{\lfloor r/2 \rfloor}.$$

Утверждение 4 доказано.

Применение формулы Стирлинга предоставляет асимптотическое выражение для $C(r)$: при $r \rightarrow \infty$ имеем

$$C(r) = 2^r \cdot \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cdot (1 + o(1)).$$

Полученные результаты позволяют нам оценить сверху число $D(r)$ упрощенных МНГ графов, представимых в виде объединения r своих максимальных клик.

СЛЕДСТВИЕ. Для любого натурального $r > 1$ верно неравенство

$$D(r) \leq \binom{C(r) + 2^r - 1}{C(r)},$$

в частности,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log_2 D(r)}{C(r)} \leq 1. \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть даны графы G и G' и в каждом из этих графов задан набор из r максимальных клик, объединение которых дает весь граф. Тогда для графа G строится набор n_I , $I \subseteq R$, $I \neq \emptyset$, и для графа G' строится набор n'_I , $I \subseteq R$, $I \neq \emptyset$. Если графы G и G' различны, то и наборы n_I и n'_I должны быть различны. Таким образом, получаем, что количество упрощенных МНГ графов с фиксированным числом максимальных клик, объединение которых дает весь граф, конечно. Это количество ограничено сверху числом целочисленных решений МНГ-системы. Из утверждения 4 получаем, что для любого целочисленного решения x'_I , $I \subseteq R$, $I \neq \emptyset$, МНГ-системы верно неравенство

$$\sum_{I \subseteq R, I \neq \emptyset} x'_I \leq C(r). \quad (8)$$

В сумме (8) $2^r - 1$ целочисленных слагаемых $x'_I \geq 0$. Число решений $L(r)$ неравенства (8) оценивает сверху число решений МНГ-системы, а следовательно, и значение $D(r)$. Нетрудно убедиться, что

$$L(r) = \binom{C(r) + 2^r - 1}{C(r)}$$

(см., например, [5]).

Очевидно, что $L(r) \leq 2^{C(r)+2^r-1}$, поэтому $\log_2(L(r)) \leq C(r) + 2^r - 1$, откуда имеем (7). Следствие доказано.

В заключение отметим, что для любого натурального $r > 1$ существует упрощенный МНГ граф, представляемый в виде объединения r своих максимальных клик, и не представляемый в виде объединения меньшего, чем r , числа максимальных клик. Этот граф можно задать через значения n_I , $I \subseteq R$, $R = \{1, \dots, r\}$: $n_R = r - 1$, $n_I = 0$ при $2 \leq |I| \leq r - 1$, $n_{\{i\}} = 1$ для всех $i \in 1, \dots, r$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И. Лекции по теории графов. М.: Наука, 1990.
- [2] Ролдугин П. В. Максимально негамильтоновы графы // Третий Всероссийский симпозиум по прикладной и промышленной математике. Тезисы докладов. М.: ТВП, 2002. С. 238–239.
- [3] Bondy J. A. Variations on the Hamiltonian theme // Canad. Math. Bull. 1972. V. 14. № 1. P. 57–62.
- [4] Харари Ф. Теория графов. М.: Мир, 1973.
- [5] Сачков В. Н. Введение в комбинаторные методы дискретной математики. М.: Наука, 1982.

Московский институт радиотехники, электроники и автоматики (МИРЭА)
E-mail: PavRoldugin@rambler.ru

Поступило
06.02.2003
Исправленный вариант
18.04.2003