Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. Б. Уткин, Гипотеза о размерности для квадрик кораз-

мерности 3 и более, *Матем. заметки*, 2002, том 72, выпуск 1, 152–156

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm660>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:
IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 18:31:35

ГИПОТЕЗА О РАЗМЕРНОСТИ ДЛЯ КВАДРИК КОРАЗМЕРНОСТИ 3 И БОЛЕЕ

П. Б. Уткин

1. Введение. Пусть $z = (z^i)$, $i \in 1, \dots, n$; $w = (w^j)$, $j \in 1, \dots, k$, – координаты в $\mathbb{C}^{n+k}$; $\langle z, \bar{z} \rangle = (\langle z, \bar{z} \rangle^1, \dots, \langle z, \bar{z} \rangle^k)$ – векторозначная эрмитова форма, задаваемая при помощи k эрмитовых матриц. Вещественно аналитическое многообразие M в $\mathbb{C}^{n+k}$, задаваемое уравнением $\text{Im } w = \langle z, \bar{z} \rangle$, называется (n, k) -квадрикой. Эти алгебраические поверхности играют в теории вещественных подмногообразий комплексного пространства особую роль. Как показано в [1], квадрика M является поверхностью типа (n, k) с самой богатой группой голоморфных автоморфизмов. Этим обусловлен интерес к описанию этой группы и соответствующей ей алгебры Ли.

Группа автоморфизмов квадрики конечномерна тогда и только тогда, когда квадрика невырождена в следующем смысле [2].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-96185.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. (n, k) квадрака называется *невыврожденной* если выполнены два условия:

- 1) $\langle z, \bar{z} \rangle^1, \dots, \langle z, \bar{z} \rangle^k$ линейно независимы.
- 2) $\forall e \in \mathbb{C}^n: (\forall z \in \mathbb{C}^n: \langle z, \bar{e} \rangle = 0) \rightarrow (e = 0)$.

Пусть невырожденная квадрака M задается набором k эрмитовых матриц $H_i, i \in 1 \dots k$; тогда условие 1) означает линейную независимость матриц H_i , а условие 2) $\bigcap_{i \in 1, \dots, k} \text{Ker}(H_i) = \emptyset$.

Квадрика однородна, на ней транзитивно действует подгруппа автоморфизмов, состоящая из аффинных преобразований вида

$$z \mapsto z + p, \quad w \mapsto w + q + 2i\langle z, \bar{p} \rangle, \quad (p, q) \in M.$$

Подгруппа группы автоморфизмов, сохраняющих начало координат, не имеет столь простого и явного описания, однако имеется следующее описание соответствующей ей алгебры $g(M)$ [1]:

$$\forall h \in g(M): h = f \frac{\partial}{\partial z} + g \frac{\partial}{\partial w},$$

где

$$\begin{aligned} f &= Cz + A(z, z) + a w + B(z, w), \\ g &= s w + 2i\langle z, \bar{a} w \rangle + r(w, w). \end{aligned}$$

Соответственно $a: \mathbb{C}^k \rightarrow \mathbb{C}^n, C: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n, s: \mathbb{C}^k \rightarrow \mathbb{C}^k$ – линейные отображения, а $A: \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n, B: \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^k \rightarrow \mathbb{C}^n, r: \mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^k \rightarrow \mathbb{C}^k$ – билинейные отображения, удовлетворяющие системе уравнений

$$2 \operatorname{Re}(\langle Cz, \bar{z} \rangle) = s\langle z, \bar{z} \rangle, \quad (0.1)$$

$$\langle A(z, z), z \rangle = 2i\langle z, \bar{a}\langle z, \bar{z} \rangle \rangle, \quad (0.2)$$

$$\operatorname{Re}\langle B(z, u), z \rangle = r(\langle z, \bar{z} \rangle, u), \quad (0.3)$$

$$\operatorname{Im}\langle B(z, \langle z, \bar{z} \rangle), z \rangle = 0, \quad (0.4)$$

причем r, s вещественны.

Если ввести естественную градуировку на $g(M)$, а именно вес z равен 1, вес w равен 2, то $g(M)$ распадется на три однородные компоненты $g_0(M), g_1(M), g_2(M)$ (веса $\partial/\partial z$ и $\partial/\partial w$ определяются как -1 и -2 соответственно).

При $3 \leq k \leq n^2 - 3$ квадраки обладают эффектом “жесткости” [1], [3]: для квадраки общего положения компоненты g_1 и g_2 отсутствуют (равны нулю), а g_0 двумерна, что соответствует мультипликативной группе комплексных чисел, которая действует скалярными растяжениями $z \mapsto \lambda z, w \mapsto |\lambda|^2 w$. Однако это не мешает существованию исключительных квадрак с весьма богатыми группами (см. например [4], [5]). Во всех имевшихся примерах выполнялись оценки $\dim(g_1(M)) \leq 2n, \dim(g_2(M)) \leq k$, сформулированные в [6] в качестве гипотезы. В данной работе приведен контрпример к данной гипотезе, а также описаны квадраки коразмерности 3 с $\dim(g_1(M)) > 2n$. В качестве следствия описания получено подтверждение гипотезы $\dim(g_1(M)) \leq 2n$ для квадрак типа $(4, 3)$ (то, что это так для типа $(3, 3)$ было известно и раньше [4]).

2. Контрпример

2.1. Коразмерность 3. Рассмотрим $(3, n)$ -квадрику M , заданную тремя эрмитовыми матрицами

$$\begin{aligned} H_1 &= \operatorname{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m, \varepsilon_{m+1}I, \dots, \varepsilon_{m+t}I), & H_2 &= \operatorname{diag}(\underbrace{0, \dots, 0}_m, \varepsilon_{m+1}J, \dots, \varepsilon_{m+t}J), \\ H_3 &= \operatorname{diag}(\underbrace{0, \dots, 0}_m, H_3^I); \end{aligned}$$

матрица H_3' эрмитова и все ее ненулевые элементы стоят на местах пересечения столбцов с нечетными номерами и строк с нечетными номерами. Назовем такие квадрики α -квадриками. Далее,

$$H_1 = \text{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m, \varepsilon_{m+1}I, \dots, \varepsilon_{m+t}I), \quad H_2 = \text{diag}(\underbrace{0, \dots, 0}_m, \varepsilon_{m+1}J, \dots, \varepsilon_{m+t}J),$$

$$H_3 = \begin{pmatrix} H_3^1 & C \\ C^* & H_3^1 \end{pmatrix}, \quad H_1^1 = \text{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m) \rightarrow H_3^1 H_1^1 H_3^1 = 0, \quad H_3 H_1 H_3 = 0,$$

матрица H_3' как у α -квадрики, причем

$$I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_i = \pm 1.$$

Такие квадрики будем называть β -квадриками. Всякая α -квадрика является β -квадрикой, их выделение продиктовано тем, что они имеют наибольшую размерность подалгебры g_1 .

ТЕОРЕМА. 1) Если $\dim(g_1) \geq 2n$, то M эквивалентна β -квадрике.

2) Для α -квадрики $\dim(g_1) = 4(m+t) > 2n = 2m + 4t$, $\dim(g_2) = 4 > k = 3$.

3) Для β -квадрики $\dim(g_1) \leq 4(m+t)$.

4) Невырожденные α -квадрики существуют только при $n \geq 5$; для невырожденных β -квадрики при $n = 4$ $\dim(g_1) \leq 2n = 8$, в частности, для любой $(3, 4)$ квадрики $\dim(g_1) \leq 2n = 8$.

Теорема доказывается решением уравнения (0.2) с использованием приведения двух эрмитовых матриц к каноническому виду [7] и отбрасыванием случаев с низкой размерностью g_1 .

Для α -квадрики можно явно выписать g_1, g_2 : g_1 задается линейным отображением $a: \mathbb{C}^k \rightarrow \mathbb{C}^n$, а g_2 билинейным отображением $r_1: \mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^k \rightarrow \mathbb{C}$ и произвольным вещественным числом b .

А именно,

$$g_1 = (A(z, z) + a w) \frac{\partial}{\partial z} + 2i \langle z, \bar{a} w \rangle \frac{\partial}{\partial w},$$

$$a = \|a_1, a_2, a_3\|, \quad a_1 = 0, \quad H_2 a_2 = H_2 a_3 = 0.$$

А определяется из системы

$$A^t(z, z) h_i^j = z^t H_i(2i\bar{a}) G_j z, \quad (1.1)$$

где h_i^j — j столбец матрицы H_i , а $G_j^t = \|h_1^j, h_2^j, h_3^j\|$, $i = 1, 2, 3$, $j \in 1, \dots, n$. Данная система есть уравнение (0.2) и является совместной для таких a . Обозначив $v^j(z, z) = z^t H_1(2i\bar{a}) G_j z$, получим $A(z, z) = H_1 v$.

Для $g_2(M)$ через $r^1(w, w)$ обозначается первая координата $r(w, w)$. Она должна иметь вид

$$r_1 = \left\| \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & e \\ 0 & e & c \end{pmatrix} \right\|, \quad d, e, c \in \mathbb{R}.$$

Остальные две координаты $r(w, w)$ нулевые; если $B(z, w) = B(w)z$, то

$$B(w) = (dw^2 + ew^3 + ibw^3) H_1 H_2 + (ew^2 + cw^3 - ibw^2) H_1 \overline{H_3}.$$

2.2. Коразмерность больше 3. α -квадрики очевидным образом распространяются на большие коразмерности, а именно матрицы $\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2$ остаются прежними а матрицы $\mathbf{H}_3, \dots, \mathbf{H}_k$ делаются типа $\mathbf{H}_3$. Тогда в g_1 содержится линейное подпространство полей вида

$$g_1 = (A(z, z) + aw) \frac{\partial}{\partial z} + 2i\langle z, \bar{a}w \rangle \frac{\partial}{\partial w},$$

$$a = \|a_1 \dots a_k\|, \quad a_1 = 0, \quad \mathbf{H}_2 a_i = 0, \quad i \in 1, \dots, k,$$

$$\mathbf{G}_j^t = \|h_1^j \dots h_k^j\|.$$

Далее A определяется из системы (1.1), где $i \in 1, \dots, k$, а j определяется, как и в случае коразмерности $k = 3$. Выделение данного подпространства дает нам оценку снизу:

$$\dim(g_1) \geq 2(k-1)(m+t).$$

Таким же образом в g_2 выделяется подпространство полей, определяемых из $r^1(w, w)$ и из произвольной косэрмитовой матрицы $b = \|b_{ij}^i\|$, $i, j \in 2, \dots, k$. Если

$$B(z, w) = B(w)z,$$

то

$$B^t(w) = \sum_{j=2, \dots, k} r_j^1(w) \mathbf{H}_j \mathbf{H}_1 + \sum_{i, j=2, \dots, k} b_i^j w^i \mathbf{H}_j \mathbf{H}_1,$$

где

$$r^1(w, w) = \left\| \begin{array}{c} r_1^1(w, w) \\ \vdots \\ r_k^1(w, w) \end{array} \right\|.$$

Это дает нам оценку $\dim(g_2) \geq (k-1)^2$. Точных равенств нет, поскольку выше выписаны лишь подпространства, а не сами g_1, g_2 .

3. Подгруппа нелинейных автоморфизмов

Подгруппа нелинейных голоморфных автоморфизмов M , за которую отвечает подалгебра $g_1 + g_2$ для случая коразмерности 3 и квадрик из примера 1, может быть явно получена путем вычисления соответствующих однопараметрических подгрупп. Система дифференциальных уравнений имеет специфический вид и позволяет последовательно вычислить все координатные функции.

Точнее, система будет такой:

$$\begin{aligned} \dot{z}^1 &= a_2^1 w^2 + a_3^1 w^3, \\ &\vdots \\ \dot{z}^m &= a_2^m w^2 + a_3^m w^3, \\ \dot{z}^{m+2i-1} &= 0, \\ \dot{z}^{m+2i} &= F_i(w^2, w^3, z^1, \dots, z^m, z^{m+2j-1}), \\ \dot{w}^1 &= F_{t+1}(w^2, w^3, z^1, \dots, z^n), \\ \dot{w}^2 &= 0, \\ \dot{w}^3 &= 0, \end{aligned}$$

где $i \in 1, \dots, t$, $j \in 1, \dots, t$. Соответственно $F_1, \dots, F_{t+1}$ — квадратные многочлены, определяемые из $a(w)$, $r(w, w)$, $B(z, w)$, участвующие в уравнениях (0.2), (0.3), (0.4); коэффициенты a_i^j — из $a(w)$. В этом случае решение получается полиномиальным степени 2.

Решим эту систему. Для удобства запишем $z = (z^1, \dots, z^m, z^{m+1}, \dots, z^{m+2t})$ в виде $z = (z_1^1, \dots, z_1^m, z_2^1, z_3^1, \dots, z_2^t, z_3^t)$. Соответственно $A = (A_1, A_2, A_3)$, $a = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (B_1, B_2, B_3)$; тогда $z = z_1 + z_2 + z_3$ и экспонента данного поля даст автоморфизм

$$\begin{aligned} z_1 &\rightarrow z_1 + a_1 w, \\ z_2 &\rightarrow z_2, \\ z_3 &\rightarrow z_3 + a_3 w + A_3(z_2, z_2) + A_3(z_1, z_2) + B_3(z, w), \\ w^1 &\rightarrow w^1 + r^1(w, w) + 2i\langle z_1, \bar{a}w \rangle^1 + i\langle z_1, \bar{a}w \rangle^1, \\ w^2 &\rightarrow w^2, \\ w^3 &\rightarrow w^3. \end{aligned}$$

Все участвующие отображения a, A, r, B из записи подалгебры $g_1 + g_2$:

$$(aw + A(z, z) + B(z, w)) \frac{\partial}{\partial z} + (r(w, w) + 2i\langle z, \bar{a}w \rangle) \frac{\partial}{\partial w}.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белошапка В. К. // Матем. сб. 1991. № 2. С. 203–219.
2. Белошапка В. К. // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1988. Т. 52. № 2. С. 437–442.
3. Ezhov V., Schmalz G. // Math. Nachrichten. 1999. V. 204. P. 41–60.
4. Палинчак Н. Ф. // Матем. заметки. 1994. Т. 55. № 5. С. 110–115.
5. Анисова Е. Г. // Матем. заметки. 1998. Т. 64. № 6. С. 803–811.
6. Beloshapka V. K. // Russian J. Math. Phys. 1996. V. 4. № 3. P. 393–396.
7. Шевченко С. Н. // Изв. РАН. Сер. матем. 1994. Т. 58. № 4. С. 149–172.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило
16.10.2001