Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. А. Альпин, Границы для совместных спектральных радиусов множества неотрицательных матриц, *Матем. заметки*, 2010, том 87, выпуск 1, 13–16

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm6601>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 18:05:25

Границы для совместных спектральных радиусов множества неотрицательных матриц

Ю. А. Альпин

Средствами идемпотентной алгебры установлены границы для совместных спектральных радиусов множества неотрицательных матриц.

Библиография: 8 названий.

В заметке [1] установлены верхняя и нижняя оценки для спектрального радиуса (перронова корня) неотрицательной матрицы, учитывающие строение ее графа. В работе [2], в частности, даны интерпретация и более простое доказательство этих результатов с помощью идемпотентной алгебры. В настоящем сообщении показано, что техника идемпотентной алгебры применима для решения более общей задачи: нахождения границ для *верхнего* и *нижнего* совместных спектральных радиусов множества неотрицательных матриц. Сами эти границы установлены в работе [3], но представленные здесь доказательства намного быстрее приводят к цели. Кроме того, интересна связь между спектральными задачами в традиционной и идемпотентной линейной алгебре.

Напомним определения. Пусть Σ – конечное множество вещественных матриц порядка n , $\|\cdot\|$ – любая матричная норма. Положим, что

$$\rho_k(\Sigma) = \max_{A_1, \dots, A_k \in \Sigma} \|A_1 \cdots A_k\|^{1/k}, \quad \check{\rho}_k(\Sigma) = \min_{A_1, \dots, A_k \in \Sigma} \|A_1 \cdots A_k\|^{1/k}.$$

Пределы

$$\rho(\Sigma) = \lim_{k \rightarrow \infty} \rho_k(\Sigma) \quad \text{и} \quad \check{\rho}(\Sigma) = \lim_{k \rightarrow \infty} \check{\rho}_k(\Sigma)$$

всегда существуют, не зависят от выбора нормы и называются соответственно *верхним* и *нижним совместным спектральным радиусом* множества матриц Σ . Таким образом, при переходе от одной матрицы к множеству матриц понятие спектрального радиуса расщепляется на две числовых характеристики. Совместные спектральные радиусы, в особенности верхний, стали темой множества публикаций теоретического и прикладного характера в последние десятилетия; см., например, работы [4] и [5] с комментариями и ссылками на предшествующие исследования в этой области. В связи с темой данной заметки укажем еще на работу [6], содержащую ряд результатов о верхнем и нижнем спектральных радиусах системы неотрицательных матриц, а также на статью [7], в которой методы идемпотентной алгебры применены для приближенного вычисления верхнего совместного спектрального радиуса.

Теперь приведем необходимый минимум сведений из идемпотентной линейной алгебры. Подробнее см., например, [7], где имеются исторические сведения и обширная библиография, а также [8], где изучается проблема собственных значений для матриц над идемпотентными полукольцами общего вида.

Пусть на множестве неотрицательных вещественных чисел $\mathbb{R}_+$ определены операции

$$a \oplus b = \max\{a, b\}, \quad a \otimes b = ab.$$

Алгебраическая система $(\mathbb{R}_+, \oplus, \otimes)$ является идемпотентным полукольцом (точнее – идемпотентным полуполем). В англоязычных источниках используется также термин *max algebra*. Проблема собственных значений в идемпотентной линейной алгебре над $(\mathbb{R}_+, \oplus, \otimes)$ разрешима: для любой матрицы A существуют число μ и ненулевой вектор-столбец x такие, что $A \otimes x = \mu x$. Наибольшее из чисел, удовлетворяющих последнему уравнению, назовем *спектральным тах-радиусом* матрицы A и обозначим через $\mu(A)$. Спектральный тах-радиус допускает прозрачную графовую интерпретацию. Граф неотрицательной матрицы $A = (a_{ij})$ – ориентированный граф с вершинами $1, \dots, n$, в котором дуга ведет из вершины i в вершину j , если $a_{ij} > 0$. *Весом* пути $i_1, \dots, i_k, i_{k+1}$ называется произведение $a_{i_1 i_2} \cdots a_{i_k i_{k+1}}$, а *средним весом* – среднее геометрическое $(a_{i_1 i_2} \cdots a_{i_k i_{k+1}})^{1/k}$. Путь называется *простым*, если его вершины, кроме, может быть, первой и последней, различны. *Спектральный тах-радиус матрицы A равен наибольшему из средних весов простых контуров ее графа*. Если матрица A неразложима, то собственные тах-векторы, отвечающие $\mu(A)$, положительны. (Неразложимость означает, что матрицу нельзя привести к блочно-треугольному виду перестановкой строк и такой же перестановкой столбцов, это свойство равносильно сильной связности графа матрицы).

Пусть

$$r_i(A) = \sum_{j=1}^n a_{ij}, \quad \Sigma_{ij} = \{A \in \Sigma : a_{ij} > 0\}.$$

Определим матрицу

$$S = (s_{ij}), \quad s_{ij} = \max_{A \in \Sigma_{ij}} r_i(A)$$

(максимум по пустому множеству считаем равным нулю).

ТЕОРЕМА 1. *Если $S = S(\Sigma)$ – неразложимая матрица, то $\rho(\Sigma) \leq \mu(S)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $d = (d_j)$ – собственный тах-вектор матрицы S , соответствующий ее спектральному тах-радиусу. Это означает, что

$$(S \otimes d)_i = s_{i1}d_1 \oplus \cdots \oplus s_{in}d_n = \max_{1 \leq j \leq n} s_{ij}d_j = \mu(S)d_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Используя эти равенства, для любой $A \in \Sigma$ и любого i получаем соотношения

$$(Ad)_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}d_j \leq r_i(A)d_{j_0} \leq s_{ij_0}d_{j_0} \leq \max_{1 \leq j \leq n} s_{ij}d_j = \mu(S)d_i, \quad d_{j_0} = \max_{j: a_{ij} > 0} d_j. \quad (1)$$

Поскольку S неразложима, элементы d положительны и неотрицательная матрица $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ невырождена. Из (1) следует, что строчные суммы матрицы

$D^{-1}AD$ не превышают $\mu(S)$. В дальнейшем символ $\|\cdot\|$ обозначает норму

$$\|A\| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.$$

Формула $\|A\|_D = \|D^{-1}AD\|$ тоже задает матричную норму. Итак, для матриц системы Σ и нормы $\|\cdot\|_D$ мы доказали неравенства $\|A\|_D \leq \mu(S)$, из которых легко следует утверждение теоремы.

Мы вывели оценку сверху для верхнего спектрального радиуса системы. Теперь найдем нижнюю оценку для нижнего радиуса.

Предположим, что матрицы из Σ не содержат нулевых строк и определим матрицу

$$S^- = (s_{ij}^-), \quad s_{ij}^- = \max_{A \in \Sigma_{ij}} r_i^{-1}(A).$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть матрицы системы Σ не содержат нулевых строк и матрица $S^- = S^-(\Sigma)$ неразложима. Тогда $(\mu(S^-))^{-1} \leq \check{\rho}(\Sigma)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $h^- = (h_j^-)$ – положительный собственный max-вектор матрицы S^- , соответствующий ее спектральному max-радиусу; следовательно,

$$(S^- \otimes h^-)_i = \max_{1 \leq j \leq n} s_{ij}^- h_j^{-1} = \mu(S^-) h_i^{-1}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Отсюда для любой $A \in \Sigma$ и любого i получаем

$$\begin{aligned} (Ah)_i &= \sum_{j=1}^n a_{ij} h_j \geq r_i(A) h_{j_0} \geq \min_{A \in \Sigma_{ij_0}} r_i(A) h_{j_0} = \left(\max_{A \in \Sigma_{ij_0}} r_i^{-1}(A) h_{j_0}^{-1} \right)^{-1} \\ &= (s_{ij_0}^- h_{j_0}^{-1})^{-1} \geq \left(\max_{1 \leq j \leq n} s_{ij}^- h_j^{-1} \right)^{-1} = (\mu(S^-))^{-1} h_i, \quad h_{j_0} = \min_{j: a_{ij} > 0} h_j. \end{aligned} \quad (2)$$

Введем невырожденную неотрицательную матрицу $H = \text{diag}(h_1, \dots, h_n)$. Из (2) следует, что все строчные суммы неотрицательных матриц $H^{-1}AH$, $A \in \Sigma$, не меньше числа $(\mu(S^-))^{-1}$. Элементарно доказывается, что тогда для любых матриц $A_1, \dots, A_k \in \Sigma$ строчные суммы матрицы $H^{-1}A_1 \cdots A_k H$ не меньше, чем $(\mu(S^-))^{-k}$. Следовательно, для любых $A_1, \dots, A_k \in \Sigma$ и нормы $\|\cdot\|_H$ верно неравенство

$$\|A_1 \cdots A_k\|_H \geq (\mu(S^-))^{-k},$$

откуда и вытекает утверждение теоремы.

Добавим несколько замечаний. Матрицы S и S^- имеют один и тот же граф $\Gamma(\Sigma)$, который можно описать независимо: дуга ведет из вершины i в вершину j , если $a_{ij} > 0$ для некоторой $A \in \Sigma$. Этот граф естественно назвать *графом множества матриц* Σ .

Теоремы 1 и 2 доказаны в предположении, что матрицы S и S^- неразложимы, т.е. граф $\Gamma(\Sigma)$ сильно связан. В случае разложимости можно перейти к подматрицам матриц из Σ , соответствующим сильно связным компонентам графа $\Gamma(\Sigma)$. Оценки теорем 1 и 2 не могут быть улучшены глобально, т.е. на всех системах неотрицательных матриц. Действительно, если Σ состоит из стохастических матриц, то, легко видеть, что имеют место равенства

$$(\mu(S^-))^{-1} = \check{\rho}(\Sigma) = \rho(\Sigma) = \mu(S) = 1.$$

Если система Σ состоит из единственной матрицы A , то оценки теорем 1 и 2 превращаются в оценки спектрального радиуса A из [1] в “идемпотентной” интерпретации [2; теорема 2.2].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ю. А. Альпин, “Границы для перронова корня неотрицательной матрицы, учитывающие свойства ее графа”, *Матем. заметки*, **58**:4 (1995), 635–637.
- [2] L. Elsner, P. van den Driessche, “Bounds for the Perron root using max eigenvalues”, *Linear Algebra Appl.*, **428**:8–9 (2008), 2000–2005.
- [3] Ю. А. Альпин, Л. Ю. Колотилина, Н. Н. Корнеева, “Совместные оценки для перроновских корней неотрицательных матриц и их приложения”, *Численные методы и вопросы организации вычислений. XIX*, Зап. научн. сем. ПОМИ, **334**, ПОМИ, СПб., 2006, 30–56.
- [4] В. Ю. Протасов, “Совместный спектральный радиус и инвариантные множества линейных операторов”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **2**:1 (1996), 205–231.
- [5] В. Ю. Протасов, “О гладкости кривых де Рама”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **68**:3 (2004), 139–180.
- [6] В. Ю. Протасов, “Асимптотика функции разбиения”, *Матем. сб.*, **191**:3 (2000), 65–98.
- [7] A. Peperko, “On the max version of the generalized spectral radius theorem”, *Linear Algebra Appl.*, **428**:10 (2008), 2312–2318.
- [8] S. Gaubert, Max Plus, *Methods and Applications of (max, +) Linear Algebra*, Rapport de recherche № 3088, INRIA, Cedex, 24 pp.

Ю. А. Альпин

Казанский государственный университет

E-mail: yuri.alpin@ksu.su

Поступило

16.09.2008