Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Азамов, К первому прямому методу Понтрягина в задачах преследования, *Матем. заметки*, 2011, том 90, выпуск 2, 163–167

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm6603>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 14:21:54

УДК 519.978.2

К первому прямому методу Понтрягина в задачах преследования

А. А. Азамов

Описывается пример трехмерной линейной дифференциальной игры с выпуклыми компактными областями управления игроков, в которой интегрант первого прямого метода Понтрягина терпит разрыв на множестве положительной меры.

Библиография: 15 названий.

1. Первый метод Понтрягина [1] в теории дифференциальных игр занимает особое положение – он позволяет находить начальные точки, из которых возможно завершение преследования посредством стробоскопических стратегий [2], [3]. В первоначальном виде метод имел следующую формулировку (о дальнейшем развитии метода см. [4]–[7]). Пусть даны $(n \times n)$ -матрица C , выпуклые компакты P , Q и подпространство M в пространстве $\mathbb{R}^n$, которые определяют линейную дифференциальную игру

$$\frac{dz}{dt} = Cz - u + v. \quad (1)$$

В начале игры фазовое состояние задается условием $z(0) = z_0$ и преследование считается законченным на отрезке времени $[0, \tau]$, когда для текущего положения $z(t)$ окажется $z(t) \in M$ в некоторый момент времени $t \in [0, \tau]$. (О подробной постановке задачи преследования в духе [1], см., например, [2], [8]–[9].)

Пусть L – ортогональное дополнение M , $\pi: \mathbb{R}^n \rightarrow L$ – ортогональная проекция (когда речь идет о проекции, будем использовать подчеркивание, чтобы отличить ее от числа π), $A \dashv B = \{c \in \mathbb{R}^n \mid A + c \subset B\}$ – геометрическая разность (употребляется также термин *разность Минковского–Понтрягина*).

Первый прямой метод Понтрягина в задаче преследования формулируется следующим образом: если

$$\pi e^{\tau C} z_0 \in \int_0^\tau [\pi e^{tC} P \dashv \pi e^{tC} Q] dt, \quad (2)$$

то в игре (1) возможно завершение преследования на отрезке $[0, \tau]$ посредством стратегии вида $u(t, v)$, которая при каждом фиксированном v измерима по $t \in [0, \tau]$ в смысле Лебега и для почти всех фиксированных t измерима по v в смысле Бореля (такие стратегии иногда называются *стробоскопическими*).

В соотношении (2) интеграл понимается как совокупность всевозможных векторов w вида

$$w = \int_0^\tau w(t) dt, \quad w(t) \in \underline{\pi} e^{\tau C} P \neg \underline{\pi} e^{\tau C} Q,$$

п.в. (интеграл Ауманна).

В начале 80-х годов прошлого века М. С. Никольским был поставлен следующий вопрос. Пусть $\underline{\pi} e^{tC} \neg \underline{\pi} e^{tC} Q$ не пусто на всем отрезке $[0, \tau]$. Всегда ли многозначное отображение $\underline{\pi} e^{tC} P \neg \underline{\pi} e^{tC} Q$ почти всюду непрерывно (в метрике Хаусдорфа)? В том же году был построен пример, в котором это отображение терпит разрыв на множестве положительной меры, о чем было доложено на семинаре кафедры оптимального управления факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М. В. Ломоносова, но результат не был опубликован. В. И. Благодатских, бывший тогда одним из руководителей семинара, заметил, что этот пример основывается на той же идее, которая прорабатывалась Силиным при построении линейной системы управления, у которой оптимальное по быстродействию управление разрывно на множестве положительной меры ([11], подробное изложение [12]). В настоящей заметке приводится описание упомянутого примера, дающего отрицательный ответ на вопрос М. С. Никольского. Пример, как было отмечено, основывается на идее построения выпуклого компакта, граница которого содержит прямолинейные участки, устроенные так же, как дополнение к канторовому дисконтинууму. Она была использована Силиным также и при построении других экзотических выпуклых компактов [13], [14], связанных с линейной теорией оптимального управления, в связи с чем их предлагается называть *компактами Силина*.

2. Пусть $n = 3$, $\tau = 2\pi$ (число π в отличии от оператора $\underline{\pi}$ проекции пишется без подчеркивания),

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e^{tC} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & \sin t \\ 0 & -\sin t & \cos t \end{pmatrix},$$

$$B = \{z = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^3 \mid z_1 = 0, z_2^2 + z_3^2 \leq 1\}.$$

В качестве M принимается ось Oz_3 , так что L – координатная плоскость Oz_1z_2 . В записи точек, лежащих на этой плоскости, третью (нулевую) координату будем опускать: $\underline{\pi}z = (z_1, z_2)$.

Заметим, что матрица e^{tC} задает поворот вокруг оси Oz_1 на угол t в направлении часовой стрелки. Теперь приступим к построению требуемого компакта. С этой целью выделим на отрезке $[0, 2\pi]$ канторов дисконтинуум K_ε с мерой $2\pi - \varepsilon$, где ε – произвольное фиксированное число, $\varepsilon \in (0, 2\pi)$. Метод построения такого дисконтинуума общеизвестен (см., например, [10; гл. 8, пример 4, с. 115]). Для цельности изложения дадим краткое описание соответствующего примера, тем более, что для нас существенно, чтобы K_ε обладал специальной симметрией.

На первом шаге удалим из $[0, 2\pi]$ промежутки

$$\left[0, \frac{\varepsilon}{8}\right), \quad \left(\pi - \frac{\varepsilon}{8}, \pi + \frac{\varepsilon}{8}\right), \quad \left(2\pi - \frac{\varepsilon}{8}, 2\pi\right]$$

суммарной длины $\varepsilon/2$. Останутся отрезки

$$K_- = \left[\frac{\varepsilon}{8}, \pi - \frac{\varepsilon}{8} \right] \quad \text{и} \quad K_+ = \left[\pi + \frac{\varepsilon}{8}, 2\pi - \frac{\varepsilon}{8} \right].$$

Положим $K_1 = K_- \cup K_+$.

На втором шаге из каждого отрезка K_- и K_+ удалим центральные интервалы

$$\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{16}, \frac{\pi}{2} + \frac{\varepsilon}{16} \right) \quad \text{и} \quad \left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{16}, \frac{3\pi}{2} + \frac{\varepsilon}{16} \right)$$

длины $\varepsilon/8$, так что общая мера удаляемых интервалов равняется $\varepsilon/4$. После этого останутся четыре отрезка:

$$\begin{aligned} K_{--} &= \left[\frac{\varepsilon}{8}, \frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{16} \right], & K_{-+} &= \left[\frac{\pi}{2} + \frac{\varepsilon}{16}, \pi - \frac{\varepsilon}{8} \right], \\ K_{+-} &= \left[\pi + \frac{\varepsilon}{8}, \frac{3\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{16} \right], & K_{++} &= \left[\frac{3\pi}{2} + \frac{\varepsilon}{16}, 2\pi - \frac{\varepsilon}{8} \right]. \end{aligned}$$

Положим $K_2 = K_{--} \cup K_{-+} \cup K_{+-} \cup K_{++}$.

На третьем шаге ровно из середины каждого из оставшихся четырех отрезков удалим интервалы длины $\varepsilon/32$ с суммарной мерой $\varepsilon/8$, а оставшееся множество обозначим K_3 и т.д.

Продолжив этот процесс, приходим к последовательности убывающих по включению замкнутых подмножеств $K_1, K_2, K_3, \dots$ отрезка $[0, 2\pi]$, каждое из которых симметрично относительно точки π . Пересечение $K_\varepsilon = K_1 \cap K_2 \cap K_3 \cap \dots$ и будет требуемым канторовым дисконтинуумом. Поскольку суммарная мера удаляемых интервалов не превосходит $\varepsilon/2 + \varepsilon/4 + \varepsilon/8 + \varepsilon/16 + \dots = \varepsilon$, мера K_ε не меньше $2\pi - \varepsilon$.

Теперь перенесем канторов дисконтинуум K_ε из отрезка $[0, 2\pi]$ на единичную окружность комплексной плоскости $S = \{e^{i\sigma} \mid 0 \leq \sigma \leq 2\pi\}$, а именно, положим $S_\varepsilon = \{e^{i\sigma} \mid \sigma \in K_\varepsilon\}$. Отметим, что при этом крайним полуинтервалам $[0, \varepsilon/8)$ и $(2\pi - \varepsilon/8, 2\pi]$, удаленным на первом шаге, соответствует одна открытая дуга $\{e^{i\sigma} \mid -\varepsilon/8 < \sigma < \varepsilon/8\}$, симметричная удаленной дуге $\{e^{i\sigma} \mid \pi - \varepsilon/8 < \sigma < \pi + \varepsilon/8\}$. Таким образом, множество S_ε симметрично относительно действительной оси. Считая, что оно лежит на координатной плоскости Oz_2z_3 , сдвинем его на вектор $(1, 0, 0)$, в результате получим множество $\Sigma_\varepsilon = \{(1, \cos \sigma, \sin \sigma) \mid \sigma \in K_\varepsilon\}$.

Положим $P = \text{conv}[S \cup \Sigma_\varepsilon]$, где $S = \partial B$ – граничная окружность круга B . Выпуклый компакт P имеет форму “пробки”, полученной из цилиндрической “болванки” $D = \{0 \leq z_1 \leq 1, z_2^2 + z_3^2 \leq 1\}$ после “специальной сверхтонкой обработки”. Его граница состоит из а) образующих цилиндра D , проходящих через точки S_ε ; б) счетного числа равнобочных треугольников, основания которых суть хорды дуг, соответствующих удаленным интервалам при построении Σ_ε , а вершины лежат на S ; в) частей конических поверхностей с направляющей S и вершинами на концах оснований тех треугольников. (На рисунке это иллюстрировано на правом, самом большом срезе. Разумеется, возможны и другие способы построения компакта P натягиванием оболочки на каркас $S \cup \Sigma_\varepsilon$, например, соединив отрезками точки хорды Σ_ε с соответствующими точками дуги S – это показано на верхнем срезе.)

Тем самым, все исходные данные игры определены. Для нее имеет место

ТЕОРЕМА. Если $t \in K_\varepsilon$, то разность $\pi e^{tC} P - \pi e^{tC} Q$ равна отрезку, соединяющему точки $(0, 0)$ и $(1, 0)$, если же $t \in [0, 2\pi] \setminus K_\varepsilon$, то $\pi e^{tC} P - \pi e^{tC} Q$ состоит из одной точки $(0, 0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего отметим, что проекция “болванки” D на плоскость Oz_1z_2 является прямоугольником $\Pi = \{0 \leq z_1 \leq 1, -1 \leq z_2 \leq 1\}$.

Далее, очевидно,

$$\pi e^{tC} Q = \pi Q = \{(z_1, z_2) \mid z_1 = 0, -1 \leq z_2 \leq 1\}.$$

Пусть $t \in K_\varepsilon$. Тогда $(1, \cos t, \sin t) \in \Sigma_\varepsilon$ и эта точка под действием e^{tC} переходит в точку $(1, 1, 0)$, т.е. $(1, 1) \in \pi e^{tC} P$. Ввиду симметрии $(1, -1) \in \pi e^{tC} P$. Отсюда вытекает, что $\pi e^{tC} P$ совпадает с прямоугольником Π . Тем самым, первое утверждение теоремы доказано.

Пусть теперь $t \in [0, 2\pi] \setminus K_\varepsilon$, конкретно, $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$ – одному из дополнительных к компакту K_ε интервалов, который может иметь вид $[0, \beta)$, либо $(\alpha, 2\pi]$, либо (α, β) , $0 < \alpha < \beta < 2\pi$. Ввиду симметрии можно ограничиться вычислениями для последнего случая. Соответствующая интервалу (α, β) хорда является отрезком с концами $(1, \cos \alpha, \sin \alpha)$, $(1, \cos \beta, \sin \beta)$, и она при отображении e^{tC} переходит в отрезок с концами

$$(1, \cos(\alpha - t), \sin(\alpha - t)), \quad (1, \cos(\beta - t), \sin(\beta - t)),$$

а после проектирования π – в отрезок с концами $(1, \cos(\alpha - t))$ и $(1, \cos(\beta - t))$. Если $\mu = \max\{\cos(\alpha - t), \cos(\beta - t)\}$, то

$$\pi e^{tC} \Sigma_\varepsilon = \{z_1 = 1, |z_2| \leq \mu\}.$$

Поскольку $\pi(\operatorname{conv} X) = \operatorname{conv}(\pi X)$, то множество $\pi e^{tC}P$ есть трапеция с основаниями $\{z_1 = 1, |z_1| \leq 1\}$ и $\{z_1 = 1, |z_1| \leq \mu\}$. Остается заметить, что поскольку $\beta - \alpha \leq \pi/4$ и $t \in (\alpha, \beta)$, то $0 < \mu < 1$, так что второе утверждение теоремы также верно.

СЛЕДСТВИЕ. Множество точек разрыва многозначного отображения

$$\pi e^{tC}P - \pi e^{tC}Q, \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

совпадает с канторовым дисконтинуумом K_ε .

В работе [15] изучен вопрос об интегрируемости по Риману многозначного отображения $\pi e^{tC}P - \pi e^{tC}Q$.

В заключение автор выражает благодарность М. С. Никольскому за внимание к работе и Д. Б. Силину за полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Избранные труды Л. С. Понтрягина*, ред. М. С. Никольский, Н. Л. Григоренко В. И. Дмитриев, МАКС Пресс, М., 2004.
- [2] М. С. Никольский, *Первый прямой метод Л. С. Понтрягина в дифференциальных играх*, Изд-во Моск. ун-та, М., 1984.
- [3] О. Hájek, *Pursuit Games*, Math. Sci. Engrg., **120**, Academic Press, New York, 1975.
- [4] А. Азамов, Б. Т. Саматов, “О модифицированном третьем методе в задаче преследования”, *Неклассические задачи математической физики*, Фан, Ташкент, 1985, 174–184.
- [5] Н. Ю. Сатимов, “К методам решения задачи преследования в дифференциальных играх”, *Докл. АН УзССР*, 1990, № 11, 8–11.
- [6] A. A. Chikrii, *Conflict-Controlled Processes*, Math. Appl., **405**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1997.
- [7] Б. Н. Пшеничный, В. В. Остапенко, *Дифференциальные игры*, Наукова думка, Киев, 1992.
- [8] Л. А. Петросян, *Дифференциальные игры преследования*, Изд-во Ленинградск. ун-та, Л., 1977.
- [9] Л. С. Понтрягин, “Линейные дифференциальные игры преследования”, *Матем. сб.*, **112:3** (1980), 307–330.
- [10] Б. Гельбаум, Дж. Олмстед, *Контрпримеры в анализе*, Мир, М., 1967.
- [11] Д. Б. Силин, “О вариации и интегрируемости по Риману оптимального управления в линейных системах”, *Докл. АН СССР*, **257:3** (1981), 548–550.
- [12] Д. Б. Силин, “Интегрируемость по Риману оптимального управления в линейных задачах быстрогодействия”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **48:4** (1984), 854–864.
- [13] Д. Б. Силин, “О полунепрерывных сверху многозначных отображениях”, *Докл. АН СССР*, **294:4** (1987), 792–795.
- [14] Д. Б. Силин, “О разрывных стратегиях в первом прямом методе Понтрягина”, *Численные методы в математической физике*, Изд-во Моск. ун-та, М., 1986, 74–75.
- [15] Е. С. Половинкин, “Об интегрировании многозначных отображений”, *Докл. АН СССР*, **271:5** (1983), 1069–1074.

А. А. Азамов

Институт математики и информационных технологий АН

РУз, г. Ташкент

E-mail: abdulla.azamov@gmail.com

Поступило

06.10.2008