Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. А. Корешков, Алгебры Ли и алгебры ассоциативного типа, *Матем. заметки*, 2010, том 88, выпуск 1, 43–52

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm6604>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 17:39:41

Алгебры Ли и алгебры ассоциативного типа

Н. А. Корешков

В работе исследуются некоторые свойства алгебр ассоциативного типа, которые применяются затем для описания структуры конечномерных полупростых модулярных алгебр Ли. Устанавливается, что однородный радикал конечномерной алгебры ассоциативного типа совпадает с ядром некоторой формы, индуцированной функцией следа со значениями в кольце многочленов. Используя этот факт, показано, что конечномерная полупростая алгебра ассоциативного типа $A = \bigoplus_{\alpha \in G} A_\alpha$ над полем нулевой характеристики, градуированная группой G , имеет ненулевую компоненту A_1 (1 – единица группы G), причем A_1 – полупростая ассоциативная алгебра.

Пусть $B = \bigoplus_{\alpha \in G} B_\alpha$ – конечномерная полупростая алгебра Ли над простым полем F_p , градуированная коммутативной группой G . Если $B = F_p \otimes_{\mathbb{Z}} A_L$, где A_L – коммутаторная алгебра $\mathbb{Z}$ -алгебры $A = \bigoplus_{\alpha \in G} A_\alpha$, причем $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} A$ – алгебра ассоциативного типа, то 1-компонента алгебры $K \otimes_{\mathbb{Z}} B$, где K – алгебраическое замыкание поля F_p , является суммой некоторого числа алгебр $\text{gl}(n_i, K)$.

Библиография: 4 названия.

В данной работе продолжается изучение некоторых свойств алгебр ассоциативного типа, начатое в [1]. В частности, устанавливается необходимое условие полупростоты этих алгебр в терминах некоторой формы, индуцированной формой следа со значениями в кольце многочленов. Используя это условие, доказывается, что если $B = \bigoplus_{\alpha \in G} B_\alpha$ – полупростая G -градуированная алгебра Ли над простым полем F_p , получающаяся редукцией в характеристику $p > 0$ коммутаторной алгебры A_L некоторой $\mathbb{Z}$ -алгебры A такой, что $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} A$ – алгебра ассоциативного типа, то компонента $K \otimes_{F_p} B_1$ градуированной алгебры $K \otimes_{F_p} B$ (K – алгебраически замкнутое поле, содержащее F_p , 1 – единица группы G) является прямой суммой некоторого числа алгебр $\text{gl}(n_i, K)$.

Приведем необходимые определения. Пусть G – полугруппа, $A = \bigoplus_{\alpha \in T} A_\alpha$ – алгебра над полем k , $T = \{\alpha \in G, A_\alpha \neq 0\}$. Множество T называется *носителем алгебры* A и обозначается $\text{Supp } A$. Алгебра G называется *G -градуированной*, если для любых $\alpha, \beta \in T$ имеет место включение $A_\alpha A_\beta \subseteq A_{\alpha\beta}$, когда $\alpha\beta \in T$, и $A_\alpha A_\beta = 0$, когда $\alpha\beta \notin T$. G -Градуированная алгебра $A = \bigoplus_{\alpha \in T} A_\alpha$, $T = \text{Supp } A \subseteq G$ называется *алгеброй ассоциативного типа (над полем k)*, если для любых $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in T$ существует $\lambda = \lambda(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in k$, $\lambda \neq 0$, такое, что

$$(a_{\alpha_1} a_{\alpha_2}) a_{\alpha_3} = \lambda a_{\alpha_1} (a_{\alpha_2} a_{\alpha_3}) \quad (1)$$

для любых элементов $a_{\alpha_i} \in A_{\alpha_i}$, $i = 1, 2, 3$.

Если G – коммутативная группа, то данное понятие является частным случаем определения алгебры лиевского типа, которое было введено в работах [2], [3].

Пусть A – алгебра ассоциативного типа. Обозначим через $[a_1, \dots, a_m]$ произведение элементов $a_1, \dots, a_m$ в заданном порядке при некоторой расстановке скобок. Используя рассуждения, аналогичные тем, с помощью которых для ассоциативных алгебр доказывается, что любое произведение не зависит от способа расстановки в нем скобок, легко показать, что любые два произведения $[x_1, \dots, x_m]_1$ и $[x_1, \dots, x_m]_2$ однородных элементов $x_i \in A$, $i = 1, \dots, m$, отличаются ненулевым множителем из k . (Элемент называется *однородным*, если он принадлежит одному из пространств G -градуировки.)

Будем говорить, что алгебра ассоциативного типа A *нильпотентна*, если $A^s = 0$ для некоторого натурального s , где $A^n = \sum_{m=1}^{n-1} A^m A^{n-m}$.

Для алгебр ассоциативного типа имеет место аналог теоремы Веддербёрна о том, что нильпотентность конечномерной ассоциативной алгебры определяется нильпотентностью ее элементов.

Будем говорить, что элемент a из алгебры ассоциативного типа нильпотентен, если $a^{[n]} = 0$, где $a^{[n]} = [a, \dots, a]$ при некоторой расстановке скобок. Если a – однородный элемент, то из приведенного выше замечания о том, что $a^{[n]}$ и $a^{[n]_1}$ отличаются лишь ненулевым множителем из k , следует, что нильпотентность однородного элемента a не зависит от способа расстановки скобок в $[a, \dots, a]$.

В [1] доказано, что конечномерная алгебра ассоциативного типа нильпотентна тогда и только тогда, когда каждый ее однородный элемент нильпотентен.

Все алгебры ассоциативного типа, рассматриваемые далее, предполагаются конечномерными. В частности, для конечномерных алгебр ассоциативного типа в [1] доказано существование наибольшего однородного двустороннего нильпотентного идеала. Этот идеал будем называть *однородным радикалом* алгебры A ассоциативного типа и обозначим $R_q(A)$. (Идеал B алгебры ассоциативного типа $A = \bigoplus_{\alpha \in T} A_\alpha$, $T = \text{Supp } A$ называется *однородным*, если $B = \bigoplus_{\alpha \in T} B_\alpha$, $B_\alpha = B \cap A_\alpha$.) Докажем, что $R_q(A)$ совпадает с однородным ядром некоторой формы, индуцированный формой следа.

Во-первых, заметим, что условие (1) можно переписать в терминах оператора левого умножения. Пусть $L_a: x \rightarrow ax$, $a, x \in A$, – оператор левого умножения. Тогда указанное условие примет вид

$$L_{ab} = L_a L_b \Lambda, \quad (2)$$

где $a, b \in A_\beta$ – однородные элементы из A ,

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \Lambda_r \end{bmatrix}$$

– блочно-диагональная матрица, где $\Lambda_i = \lambda_i E_i$, $\lambda_i = \lambda_i(\alpha, \beta) \in k$, $\lambda_i \neq 0$, E_i – единичная матрица порядка n_i , $n_i = \dim A_{\alpha_i}$, $i = 1, \dots, r$, $\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\} = T \subset G$, L_a , L_b , L_{ab} – матрицы операторов левого умножения в некотором базисе, согласованном с градуировкой алгебры A .

Пусть $k[x]$ – кольцо многочленов над полем k от переменной x . Обозначим через S билинейное отображение $A \times A$ в $k[x]$, задаваемое правилом $S(a, b) = \text{tr}(X L_a L_b)$, где

L_a, L_b – матрицы операторов левого умножения для элементов $a, b \in A$, а

$$X = \begin{bmatrix} X_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & X_r \end{bmatrix}$$

– блочно-диагональная матрица, где $X_i = x^i E_i$, E_i – единичная матрица порядка n_i , $n_i = \dim A_{\alpha_i}$, $i = 1, \dots, r$.

Обозначим через δf старший коэффициент многочлена $f(x) \in k[x]$. Определим отображение $(\cdot, \cdot)$ на $A \times A$ со значениями в k по следующей формуле:

$$(a, b) = \delta \operatorname{tr}(X L_a L_b), \quad a, b \in A.$$

В случае, когда элемент a однородный, его матрица L_a в базисе, согласованном с градуировкой, имеет вид $[L_{ij}(a)]$, $i, j = 1, \dots, r$, где $L_{ij}(a)$ – матрица оператора L_a в ограничении на A_{α_j} со значениями в A_{α_i} . Легко видеть, что для любого $j = 1, \dots, r$ количество ненулевых блоков $L_{ij}(a)$, $i = 1, \dots, r$, не больше одного.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Если $A = \bigoplus_{\alpha \in T} A_\alpha$ – конечномерная алгебра ассоциативного типа над полем k нулевой характеристики, то однородный элемент a удовлетворяет условию $(a, b) = (b, a) = 0$ для любого однородного элемента $b \in A$ тогда и только тогда, когда левый и правый идеалы Aa и aA нильпотентны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Aa – нильпотентный идеал. Тогда для любого однородного элемента $b \in A$ произведение ba есть нильпотентный элемент, т.е. $(ba)^{[n]} = 0$ для некоторого n . Из последнего соотношения имеем $L_{ba}^n = 0$.

Действительно, для любых двух однородных элементов $a, b \in A$ имеет место $L_{ab} = L_a L_b \Lambda$ (см. (2)). Отсюда по индукции легко получить, что

$$L_{a_1} L_{a_2} \dots L_{a_m} = L_{(a_1 \dots (a_{m-1} a_m) \dots)} \tilde{\Lambda},$$

где $\tilde{\Lambda}$ – матрица, аналогичная матрице Λ . В частности, $L_{ba}^n = L_{ba^{[n]}} \tilde{\Lambda}$. Поэтому для любого диагонального блока $L_{ii}(ba)$ его след равен нулю. Действительно, если $L_{ii}(ba) \neq 0$, то из строения матрицы L_{ba} (см. замечание перед предложением 1) следует, что i -й диагональный блок матрицы L_{ba}^n есть $(L_{ii}(ba))^n$. Таким образом, $(L_{ii}(ba))^n = 0$, т.е. $L_{ii}(ba)$ – нильпотентная матрица. В частности, $\operatorname{tr} L_{ii}(ba) = 0$, $i = 1, \dots, r$. В силу формулы (2) диагональные блоки матрицы $L_b L_a$ отличаются от диагональных блоков $L_{ii}(ba)$ матрицы L_{ba} только на ненулевой множитель $\lambda_i \in k$. Поэтому

$$(b, a) = \delta \operatorname{tr}(X L_b L_a) = \delta \sum_{i=1}^r x^i \operatorname{tr}(L_b L_a)_{ii} = 0.$$

(Здесь $(L_a L_b)_{ii}$ – i -й диагональный блок матрицы $L_a L_b$.) Аналогично, условие $(a, b) = 0$ вытекает из нильпотентности правого идеала aA .

Пусть теперь $(a, b) = 0$ для любого однородного элемента b и некоторого однородного элемента a . Так как

$$(a, b) = \delta \operatorname{tr}(X L_a L_b) = \delta \sum_{i=1}^r x^i \operatorname{tr}(L_a L_b)_{ii} = 0,$$

то $\text{tr}(L_a L_b)_{ii} = 0$, $i = 1, \dots, r$. В силу формулы (2) имеем $\text{tr} L_{ii}(ab) = 0$, $i = 1, \dots, r$. Поэтому $\text{tr} L_{ab} = 0$.

Заменяем элемент b на $b(ab)^{[m-1]}$ для некоторого $m > 1$. Так как $(a, b(ab)^{[m-1]}) = 0$, то, повторяя выкладки предыдущего абзаца, опять имеем $\text{tr} L_{ii}(a(b(ab)^{[m-1]})) = 0$, $i = 1, \dots, r$. Элемент $(ab)^{[m]}$ отличается от $a(b(ab)^{[m-1]})$ только ненулевым множителем $\lambda \in k$, поэтому $\text{tr} L_{ii}(ab)^{[m]} = 0$, $i = 1, \dots, r$. Используя соотношение $L_{ab}^m = L_{(ab)^{[m]}} \tilde{\Lambda}$, полученное в первой части доказательства, имеем $\text{tr}(L_{ab}^m)_{ii} = 0$, $i = 1, \dots, r$. Тогда

$$\text{tr} L_{ab}^m = \sum_{i=1}^r \text{tr}(L_{ab}^m)_{ii} = 0.$$

Последнее соотношение выполняется для любого натурального m . Так как основное поле k имеет нулевую характеристику, то L_{ab} – нильпотентный оператор, т.е. $L_{ab}^m = 0$ для некоторого m . Применяя последнее соотношение в элементу ab , получим $(ab)^{[m+1]} = 0$. В силу аналога теоремы Веддербёрна отсюда вытекает нильпотентность идеала aA .

Аналогично, из условия $(b, a) = 0$ вытекает нильпотентность идеала Aa .

Пусть $I = \bigoplus_{\alpha \in T} I_\alpha$, $I_\alpha = I \cap A_\alpha$ – однородный двусторонний идеал алгебры A . Определим множество

$$I_{\alpha, L}^\perp = \{a \in A_\alpha, (a, b) = 0, b \in I\}.$$

Легко проверить, что $I_{\alpha, L}^\perp$ – подпространство в A_α . Положим $I_L^\perp = \bigoplus_{\alpha \in T} I_{\alpha, L}^\perp$. Аналогично, $I_R^\perp = \bigoplus_{\alpha \in T} I_{\alpha, R}^\perp$, где

$$I_{\alpha, R}^\perp = \{a \in A_\alpha, (b, a) = 0, b \in I\}.$$

Если $I = A$, то $A_L^\perp$ будем называть *левым однородным ядром отображения* $(\cdot, \cdot)$ и обозначать $\text{Ker}_q^L(\cdot, \cdot)$, а $A_R^\perp$ – *правым однородным ядром* и обозначать $\text{Ker}_q^R(\cdot, \cdot)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть I – однородный двусторонний идеал в конечномерной алгебре A ассоциативного типа над полем нулевой характеристики. Тогда $I_L^\perp = I_R^\perp$, и указанное множество является однородным двусторонним идеалом в A .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По построению $I_L^\perp$ и $I_R^\perp$ – однородные подпространства в A . Пусть $a \in I_{\alpha, L}^\perp$, $b \in I_\beta$. Так как $(a, b) = 0$, то $\text{tr}(X L_a L_b) = 0$, т.е.

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r x^i \text{tr}(L_{ij}(a) L_{ji}(b)) = 0,$$

где r – количество компонент градуировки в алгебре A . Если $L_{ji}(b) \neq 0$ для некоторого i , то номер j определяется однозначно, так как в каждом i -м блочном столбце может быть только один ненулевой блок. Поэтому коэффициент при x^i в рассмотренной выше сумме равен $\text{tr}(L_{ij}(a) L_{ji}(b))$. Значит, и в случае, когда $L_{ji}(b) \neq 0$, тем не менее, $\text{tr}(L_{ij}(a) L_{ji}(b)) = 0$.

Рассмотрим

$$S = \sum_{k=1}^r \sum_{t=1}^r x^k \text{tr}(L_{kt}(b) L_{tk}(a)).$$

Если $L_{kt}(b) \neq 0$ для некоторого k , то, как отмечено выше, $\text{tr}(L_{tk}(a)L_{kt}(b)) = 0$. Но

$$\text{tr}(L_{tk}(a)L_{kt}(b)) = \text{tr}(L_{kt}(b)L_{tk}(a));$$

следовательно, $S = 0$. Тем более, $(b, a) = \delta S = 0$.

Итак, $I_L^\perp = I_R^\perp$, и это множество будем обозначать $I^\perp$.

Для проверки того, что $I^\perp$ – однородный двусторонний идеал, достаточно убедиться в том, что если $a \in A_\alpha$, $b \in A_\beta$, $c \in A_\gamma$, то $(ab, c) = 0$ равносильно $(a, bc) = 0$. Выпишем левые части этих соотношений

$$(ab, c) = \delta \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^r x^i \text{tr}(L_{ik}(a)L_{ki}(bc)) = \delta \sum_{i=1}^r \lambda_i x^i \text{tr} L_{ii}(a(bc)).$$

Соответственно

$$(a, bc) = \delta \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^r x^i \text{tr}(L_{ik}(a)L_{ki}(bc)) = \delta \sum_{i=1}^r \lambda'_i x^i \text{tr} L_{ii}(a(bc)).$$

Если $(ab, c) = 0$, то $\text{tr} L_{ii}((ab)c) = 0$, $i = 1, \dots, r$. Но элементы $(ab)c$ и $a(bc)$ отличаются на ненулевой скаляр, поэтому их матрицы $L((ab)c)$ и $L(a(bc))$ обладают тем же свойством. В частности, диагональные блоки $L_{ii}((ab)c)$ и $L_{ii}(a(bc))$ связаны таким же образом. Следовательно, $L_{ii}(a(bc)) = 0$, $i = 1, \dots, r$, т.е. $(a, bc) = 0$. Это доказывает сформулированное выше условие “частичной” инвариантности.

Из доказанного предложения следует, что

$$\text{Ker}_q^L(\cdot, \cdot) = \text{Ker}_q^R(\cdot, \cdot).$$

Будем обозначать это множество $\text{Ker}_q(\cdot, \cdot)$ и называть однородным ядром отображения $(\cdot, \cdot)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Для любой конечномерной алгебры A ассоциативного типа над полем нулевой характеристики ее однородный радикал $R_q(A)$ совпадает с однородным ядром $\text{Ker}_q(\cdot, \cdot)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть I – однородный нильпотентный двусторонний идеал в A . Тогда для любого однородного элемента x из I односторонние идеалы xA и Ax нильпотентны. Следовательно, по предложению 1 имеем $x \in \text{Ker}_q(\cdot, \cdot)$, т.е. $I \subseteq \text{Ker}_q(\cdot, \cdot)$. В частности, $R_q(A) \subseteq \text{Ker}_q(\cdot, \cdot)$.

Обратно, пусть $y \in \text{Ker}_q(\cdot, \cdot)$. Опять используя предложение 1, получим, что yA – нильпотентный идеал. В частности, y^2 нильпотентен. Но тогда нильпотентен и элемент y . По аналогу теоремы Веддербёрна для алгебр ассоциативного типа идеал $\text{Ker}_q(\cdot, \cdot)$ нильпотентен и, следовательно, $\text{Ker}_q(\cdot, \cdot) \subseteq R_q(A)$. Два полученных включения доказывают сформулированное в предложении равенство.

Алгебру ассоциативного типа A будем называть *полупростой*, если она не содержит ненулевых нильпотентных двусторонних идеалов. В этом случае алгебра A не содержит и однородных нильпотентных двусторонних идеалов, т.е. $R_q(A) = 0$. Тогда в силу предложения 3 для полупростой алгебры ассоциативного типа над полем нулевой характеристики $\text{Ker}_q(\cdot, \cdot) = 0$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть G – группа, $A = \bigoplus_{\alpha \in T} A_\alpha$, $T = \text{Supp } A \subseteq G$ – конечномерная полупростая алгебра ассоциативного типа над полем нулевой характеристики. Тогда $1 \in T$ (1 – единица группы G) и компонента A_1 является полупростой ассоциативной алгеброй.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В [1] доказано, что полупростая алгебра ассоциативного типа содержит ненулевой однородный идемпотент e . Из определения e следует, что $e \in A_1$, т.е. $A_1 \neq 0$. Подставляя идемпотент e в соотношение $(ab)c = \lambda a(bc)$, $a, b, c \in A_1$, имеем $\lambda = 1$, т.е. A_1 – ассоциативная алгебра. Покажем, что она полупроста.

Во-первых, заметим, что так как G – группа, то для любого i количество ненулевых блоков $L_{ij}(a)$, $j = 1, \dots, r$, в матрице оператора левого умножения L_a , $a \in A_\alpha$, не более одного. Далее, если $c \in A_\alpha$, $\alpha \neq 1$, то все диагональные блоки $L_{ii}(c)$ матрицы L_c нулевые. Пусть $a \in A_\alpha$, $b \in A_\beta$, $\alpha\beta \neq 1$. Тогда $(a, b) = 0$, так как $L_a L_b = L_{ab} \Lambda$ и все диагональные блоки матрицы L_{ab} нулевые. Следовательно, $(A_1, A_\beta) = 0$, когда $\beta \neq 1$.

Если элемент $z \in A_1$ такой, что матрица L_z нильпотентна, то все диагональные блоки $L_{ii}(z)$ – также нильпотентные матрицы, так как в данном случае все недиагональные блоки $L_{ij}(z)$, $i \neq j$, нулевые. Поэтому след каждого диагонального блока $\text{tr } L_{ii}(z)$ равен нулю.

Пусть I – нильпотентный двусторонний идеал в A_1 . Тогда для $a \in I$, $b \in A_1$ оператор L_{ab} нильпотентен в силу соотношения $L_{ab}^n = L_{(ab)^{[n]}} \Lambda$ (см. предложение 1). Поэтому

$$\text{tr}(X L_a L_b) = \sum_{i=1}^r \lambda_i x^i \text{tr}(L_{ii}(ab)) = 0.$$

Отсюда следует, что $\delta \text{tr}(X L_a L_b) = 0$, $a \in I$, $b \in A_1$, т.е. $(I, A_1) = 0$. Добавляя полученное выше условие $(A_1, A_\beta) = 0$, когда $\beta \neq 1$, имеем $(I, A) = 0$, т.е.

$$I \subset \text{Ker}_q(\cdot, \cdot).$$

Здесь используем ослабленное условие аддитивности функции $(\cdot, \cdot)$. А именно, если $a, b, c \in A$ и $(a, b) = 0$, $(a, c) = 0$, то $\text{tr}(X L_a L_b) = 0$, $\text{tr}(X L_a L_c) = 0$. В силу линейности функции следа получим $\text{tr}(X L_a L_{b+c}) = 0$. Тогда, тем более, $(a, b+c) = 0$. В силу полупростоты алгебры A однородное ядро $\text{Ker}_q(\cdot, \cdot)$ равно нулю, т.е. $I = 0$. Таким образом, A_1 – полупростая ассоциативная алгебра.

Рассуждая по аналогии с леммой 3 из [4], докажем следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть G – группа, $A = \bigoplus_{\alpha \in T} A_\alpha$, $T = \text{Supp } A \subseteq G$ – конечномерная алгебра ассоциативного типа, причем $1 \in T$ (1 – единица группы G). Если алгебра A не имеет однородных двусторонних нильпотентных идеалов, то компонента A_1 также не имеет двусторонних нильпотентных идеалов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что I – ненулевой двусторонний нильпотентный идеал алгебры A_1 . По условию предложения множество T конечно, $|T| = n$. Пусть $J = AI$ – однородный левый идеал алгебры A , порожденный I . Покажем, что $J^{mn} = 0$, если $I^m = 0$. (Заметим, что, как следует из (1), $(XY)Z = X(YZ)$, если X, Y, Z – однородные подмножества в A .) Для этого достаточно проверить,

что для любых $x_1, \dots, x_{mn}$ из I и любых однородных элементов $a_1, \dots, a_{mn} \in A$ выполняется равенство

$$[a_1, x_1, a_2, x_2, \dots, a_{mn}, x_{mn}] = 0 \quad (3)$$

при какой-либо расстановке скобок.

Так как элементы $a_1, \dots, a_{mn}$ однородны, существуют такие $g_1, \dots, g_{mn} \in T$, что $a_i \in A_{g_i}$, $i = 1, \dots, mn$. Рассмотрим элементы

$$u_1 = g_1, \quad u_2 = g_1 g_2, \quad \dots, \quad u_{mn} = g_1 \cdots g_{mn}$$

в группе G . Если $u_i \notin T$, то $[a_1, x_1, \dots, a_i, x_i] \in A_{u_i} = 0$ и равенство (3) выполнено. Если все u_i лежат в T , то найдутся такие индексы $i_1 < \dots < i_m$, что $u_{i_1} = \dots = u_{i_m}$. В этом случае обозначим

$$b_k = (\dots (a_{i_k+1} x_{i_k+1}) a_{i_k+2} \dots) a_{i_{k+1}}, \quad k = 1, \dots, m-1.$$

Тогда $b_1, \dots, b_{m-1}$ лежат в A_1 и в левой части (3) присутствует сомножитель

$$c = (\dots (x_{i_1} b_1) x_{i_2}) b_2 \dots b_{m-1}) x_{i_m}.$$

Поскольку $b_1, \dots, b_{m-1} \in A_1$, а I – левый идеал в A_1 , то $c \in I^m = 0$, что влечет равенство (3).

Так как сумма всех однородных левых нильпотентных идеалов алгебры A является однородным двусторонним нильпотентным идеалом, то отсутствие однородных двусторонних нильпотентных идеалов в алгебре A означает, что $AI = 0$.

Аналогично, рассматривая однородный правый идеал $\tilde{J} = IA$, можно показать, что $IA = 0$. Таким образом, получаем, что I – ненулевой однородный двусторонний нильпотентный идеал алгебры A . Полученное противоречие доказывает предложение.

Так как существование идемпотента в полупростой алгебре ассоциативного типа доказано в [1] независимо от характеристики основного поля, то из предложения 4 вытекает следующее усиление теоремы 1.

ТЕОРЕМА 1'. Пусть G – группа, $A = \bigoplus_{\alpha \in T} A_\alpha$, $T = \text{Supp } A \subseteq G$ – конечномерная полупростая алгебра ассоциативного типа. Тогда $1 \in T$ (1 – единица группы G) и компонента A_1 является полупростой ассоциативной алгеброй.

Пусть $A = \bigoplus_{\alpha \in T} A_\alpha$, $T = \text{Supp } A \subseteq G$ – градуированная по полугруппе G алгебра над $\mathbb{Z}$ (являющаяся свободным $\mathbb{Z}$ -модулем) такая, что

$$\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} A = \bigoplus_{\alpha \in T} (\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} A_\alpha)$$

– алгебра ассоциативного типа над $\mathbb{Q}$. Введем в $\mathbb{Z}$ -модуле A новую операцию $\circ$ по правилу $a \circ b = ab - ba$, $a, b \in A$. Полученную алгебру будем называть *коммутаторной алгеброй* и обозначать A_L . Если алгебра $F_p \otimes_{\mathbb{Z}} A_L$ является алгеброй Ли, то будем говорить, что последняя получена *редукцией в характеристику p некоторой алгебры ассоциативного типа*.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $B = \bigoplus_{\alpha \in T} B_\alpha$, $T = \text{Supp } B \subseteq G$ – конечномерная полупростая градуированная алгебра Ли над простым полем F_p , G – коммутативная группа и B получена редукцией в характеристику p алгебры ассоциативного типа A . Если K – алгебраическое замыкание поля F_p , то компонента $K \otimes_{F_p} B_1$ (1 – единица группы G) алгебры $K \otimes_{F_p} B$ является прямой суммой некоторого числа алгебр вида $\text{gl}(n_i, K)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если I – двусторонний идеал алгебры A такой, что $I \equiv 0 \pmod{p^k A}$, но $I \not\equiv 0 \pmod{p^{k+1} A}$ для некоторого натурального k , то $I_1 = p^{-k} I$ – также двусторонний идеал в A , причем $F_p \otimes_{\mathbb{Z}} I_1$ – ненулевой идеал в B . Поэтому из полупростоты алгебры Ли B следует, что алгебра A также полупроста, а тогда полупроста и алгебра ассоциативного типа $\bar{A} = \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} A$. Из теоремы 1 немедленно получаем, что $\bar{A}_1 = \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} A_1$ – полупростая ассоциативная алгебра.

Пусть K_1 – алгебраическое замыкание поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Тогда $K_1 \otimes_{\mathbb{Q}} \bar{A}_1$ – также полупростая ассоциативная алгебра. В силу алгебраической замкнутости поля K_1 имеем

$$K_1 \otimes_{\mathbb{Z}} A_1 = \bigoplus_{i=1}^m M(n_i, K_1),$$

где $M(n_i, K_1)$ – полная матричная алгебра порядка n_i над K_1 .

Обозначим через $E_{kj}^{(i)}$, $i = 1, \dots, m$, $k, j = 1, \dots, n_i$, матричные единицы кольца матриц $M(n_i, K_1)$, а через e_s , $s = 1, \dots, t$, – базисные элементы алгебры A_1 . Тогда

$$E_{kj}^{(i)} = \sum_{s=1}^t \alpha_{k,j,s}^{(i)} (1 \otimes e_s), \quad \alpha_{k,j,s}^{(i)} \in K_1, \quad (4)$$

$$1 \otimes e_s = \sum_{i,k,j} \beta_{s,k,j}^{(i)} E_{k,j}^{(i)}, \quad \beta_{s,k,j}^{(i)} \in K_1. \quad (5)$$

Пусть $K_2 = \mathbb{Z}[\alpha_{k,j,s}^{(i)}, \beta_{s,k,j}^{(i)}]$ – конечнопорожденная в K_1 элементами $\alpha_{k,j,s}^{(i)}$, $\beta_{s,k,j}^{(i)}$ для всех i, j, k, s алгебра над $\mathbb{Z}$. Тогда из соотношений (3) следует, что

$$\bigoplus_{i=1}^m M(n_i, K_2) \subseteq K_2 \otimes_{\mathbb{Z}} A_1,$$

а из соотношений (4) – что

$$K_2 \otimes_{\mathbb{Z}} A_1 \subseteq \bigoplus_{i=1}^m M(n_i, K_2).$$

Из этих включений получаем, что

$$K_2 \otimes_{\mathbb{Z}} A_1 = \bigoplus_{i=1}^m M(n_i, K_2).$$

Обозначим через $\mathbb{Z}[x_{k,j,s}^{(i)}, y_{s,k,j}^{(i)}]$ кольцо многочленов над $\mathbb{Z}$ от переменных $x_{k,j,s}^{(i)}$, $y_{s,k,j}^{(i)}$, где индексы i, j, k, s пробегают те же множества значений, что и у набора $\{\alpha_{k,j,s}^{(i)}, \beta_{s,k,j}^{(i)}\}$. Тогда алгебру K_2 можно отождествить с факторалгеброй

$$\mathbb{Z}[x_{k,j,s}^{(i)}, y_{s,k,j}^{(i)}] / I,$$

где идеал I состоит из всех таких элементов f кольца многочленов $\mathbb{Z}[x_{k,j,s}^{(i)}, y_{s,k,j}^{(i)}]$, которые задают соотношения вида $f(\alpha_{k,j,s}^{(i)}, \beta_{s,k,j}^{(i)}) = 0$.

Рассмотрим гомоморфизм

$$\varphi: \mathbb{Z}[x_{k,j,s}^{(i)}, y_{s,k,j}^{(i)}] \rightarrow F_p \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[x_{k,j,s}^{(i)}, y_{s,k,j}^{(i)}],$$

определяемый правилом $\varphi(f) = 1 \otimes_{F_p} f$, когда $f \in \mathbb{Z}[x_{k,j,s}^{(i)}, y_{s,k,j}^{(i)}]$. Обозначим через $\overline{K}_2$ факторалгебру

$$F_p \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[x_{k,j,s}^{(i)}, y_{s,k,j}^{(i)}] / F_p \otimes I,$$

а через ψ – композицию гомоморфизмов φ и τ :

$$F_p \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[x_{k,j,s}^{(i)}, y_{s,k,j}^{(i)}] \rightarrow \overline{K}_2.$$

Наконец, через $\overline{\psi}$ обозначим продолжение гомоморфизма ψ на K_2 со значениями в $\overline{K}_2$. Пусть $\overline{\alpha}_{k,j,s}^{(i)} = \overline{\psi}(\alpha_{k,j,s}^{(i)})$, $\overline{\beta}_{s,k,j}^{(i)} = \overline{\psi}(\beta_{s,k,j}^{(i)})$ – образы элементов $\alpha_{k,j,s}^{(i)}$ и $\beta_{s,k,j}^{(i)}$.

В силу алгебраичности над $\mathbb{Q}$ элементов $\alpha_{k,s,j}^{(i)}$, $\beta_{s,k,j}^{(i)}$ существуют многочлены над $\mathbb{Z}$ от одной переменной $f_{k,s,j}^{(i)}, g_{s,k,j}^{(i)} \in \mathbb{Z}[x]$, причем $f_{k,s,j}^{(i)}, g_{s,k,j}^{(i)} \not\equiv 0 \pmod{p\mathbb{Z}[x]}$, корнями которых являются упомянутые элементы. Очевидно, указанные многочлены принадлежат идеалу I . Поэтому элементы $\overline{\alpha}_{k,j,s}^{(i)}$, $\overline{\beta}_{s,k,j}^{(i)}$ являются корнями многочленов $\varphi(f_{k,s,j}^{(i)})$, $\varphi(g_{s,k,j}^{(i)})$. Следовательно, алгебра $\overline{K}_2$ порождается алгебраическими над F_p элементами, и поэтому $\overline{K}_2 \subset K$, где K – алгебраическое замыкание поля F_p .

Применяя гомоморфизм $\overline{\psi} \otimes 1$ к полученному выше соотношению

$$K_2 \otimes_{\mathbb{Z}} A_1 = K_2 \otimes_{\mathbb{Z}} \left(\bigoplus_{i=1}^m M(n_i, \mathbb{Z}) \right),$$

имеем

$$\overline{K}_2 \otimes_{\mathbb{Z}} A_1 = \overline{K}_2 \otimes_{\mathbb{Z}} \left(\bigoplus_{i=1}^m M(n_i, \mathbb{Z}) \right).$$

Тем более,

$$K \otimes_{\mathbb{Z}} A_1 = K \otimes_{\mathbb{Z}} \left(\bigoplus_{i=1}^m M(n_i, \mathbb{Z}) \right) = \bigoplus_{i=1}^r M(n_i, K).$$

Наконец, используя то обстоятельство, что

$$(K \otimes_{\mathbb{Z}} A_1)_L = K \otimes_{\mathbb{Z}} (A_1)_L = K \otimes_{\mathbb{Z}} B_1,$$

получим утверждение теоремы.

Заметим, что если конечномерная полупростая градуированная алгебра Ли B над полем k характеристики $p > 0$ является коммутаторной алгеброй A_L некоторой алгебры A ассоциативного типа над тем же полем k , то утверждение теоремы 2 очевидно. Но основной целью изучаемых объектов является попытка построения конструкции, аналогичной конструкции Шевалле для классических полупростых алгебр Ли уже для модулярных алгебр Ли картановского типа. Как показывает пример из [1], алгебры ассоциативного типа над $\mathbb{Q}$ являются подходящим объектом для реализации этой цели.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Н. А. Корешков, “О нильпотентности и разложении алгебр ассоциативного типа”, *Изв. вузов. Матем.*, 2006, № 9, 34–42.
- [2] Y. A. Bahturin, M. V. Zaicev, “Identities of graded algebras”, *J. Algebra*, **205**:1 (1998), 1–12.
- [3] Ю. А. Бахтурин, М. В. Зайцев, С. К. Сегал, “ G -тождества неассоциативных алгебр”, *Матем. сб.*, **190**:11 (1999), 3–14.
- [4] М. В. Зайцев, С. К. Сегал, “Конечные градуировки простых артиновых колец”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2001, № 3, 21–24.

Н. А. Корешков

Казанский государственный университет

E-mail: Nikolai.Koreshkov@ksu.ru

Поступило

13.06.2007

Исправленный вариант

08.05.2009