Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. И. Шарапудинов, Т. И. Шарапудинов, Смешанные ряды по полиномам Якоби и Чебышева и их дискретизация, *Матем. заметки*, 2010, том 88, выпуск 1, 116–147

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm6607>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 15:00:41

Смешанные ряды по полиномам Якоби и Чебышева и их дискретизация

И. И. Шарапудинов, Т. И. Шарапудинов

Статья посвящена исследованию аппроксимативных свойств смешанных рядов по полиномам Якоби на весовых пространствах Соболева и дискретизированных смешанных рядов по полиномам Чебышева первого рода на классах аналитических функций.

Библиография: 20 названий.

1. Введение. Достаточно часто встречаются задачи, в которых требуется одновременно приближать функцию $f(x)$ и несколько ее производных $f'(x), f''(x), \dots, f^{(r)}(x)$ посредством выбранной приближающей функции $g(x)$ и соответствующих производных $g'(x), g''(x), \dots, g^{(r)}(x)$. Такие задачи непосредственно возникают, например, всякий раз, когда требуется решить дифференциальное уравнение приближенными численно-аналитическими методами. В настоящей работе продолжаются исследования первого из авторов, посвященные этой теме, базирующиеся на так называемых смешанных (или трансплантационных) рядах, ассоциированных с классическими ортогональными полиномами. Смешанные ряды по полиномам Якоби $P_n^{\alpha, \beta}(x)$, включая случаи смешанных рядов по ультрасферическим полиномам и полиномам Чебышева $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$, $x \in [-1, 1]$, были введены и исследованы в работах [1]–[5]. Как неоднократно отмечалось в указанных работах, смешанные ряды по полиномам Якоби появились как естественный и альтернативный рядам Фурье–Якоби аппарат одновременного приближения дифференцируемых функций и их производных. Дело в том, что нормы продифференцированных частичных сумм ряда Фурье–Якоби

$$(S_n^{\alpha, \beta}(f, x))^{(\nu)} = \left(\sum_{k=0}^n f_k^{\alpha, \beta} P_k^{\alpha, \beta}(x) \right)^{(\nu)} = \sum_{k=0}^n f_k^{\alpha, \beta} (P_k^{\alpha, \beta}(x))^{(\nu)},$$

рассматриваемых как линейные функционалы, действующие в $C[-1, 1]$, сильно растут вместе с n , когда переменная x находится вблизи точек -1 и 1 . Это вызвано тем фактом, что полиному Якоби $P_n^{\alpha, \beta}(x)$ присуще следующее дифференциальное свойство:

$$\frac{d^\nu}{dx^\nu} P_n^{\alpha, \beta}(x) = \frac{(n + \alpha + \beta + 1)_\nu}{2^\nu} P_{n-\nu}^{\alpha+\nu, \beta+\nu}(x),$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 07-01-00143а).

где $(a)_r = a(a+1) \cdots (a+r-1)$. И поскольку

$$P_{n-\nu}^{\alpha+\nu, \beta+\nu}(1) = \binom{n+\alpha}{n-\nu},$$

то

$$\frac{d^\nu}{dx^\nu} P_n^{\alpha, \beta}(1) \asymp n^{2\nu+\alpha}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Вследствие этого сильно замедляется скорость сходимости продифференцированных частичных сумм Фурье–Якоби $(S_n^{\alpha, \beta}(f, x))^{(\nu)}$ к соответствующей производной $f^{(\nu)}(x)$, если такая сходимость возможна в принципе. Рассмотрим эту ситуацию более подробно. Пусть $\alpha, \beta > -1$, $\rho(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$, $p \geq 1$. Обозначим через $\mathcal{L}_\rho^p$ пространство измеримых функций $f = f(x)$, определенных на $[-1, 1]$, для которых конечна норма

$$\|f\|_{\mathcal{L}_\rho^p} = \left(\int_{-1}^1 \rho(x) |f(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Если $f \in \mathcal{L}_\rho^p$, то, полагая $h_k^{\alpha, \beta} = \|P_k^{\alpha, \beta}\|_{\mathcal{L}_\rho^2}^2$, мы можем определить коэффициенты Фурье–Якоби функции f по формуле

$$f_k^{\alpha, \beta} = \frac{1}{h_k^{\alpha, \beta}} \int_{-1}^1 \rho(x) f(x) P_k^{\alpha, \beta}(x) dx$$

и рассмотреть ее ряд Фурье по полиномам Якоби: $\sum_{k=0}^{\infty} f_k^{\alpha, \beta} P_k^{\alpha, \beta}(x)$. Положим

$$K_n^{\alpha, \beta}(x, t) = \sum_{k=0}^n \frac{P_k^{\alpha, \beta}(x) P_k^{\alpha, \beta}(t)}{h_k^{\alpha, \beta}}.$$

Тогда

$$S_n^{\alpha, \beta}(f) = S_n^{\alpha, \beta}(f, x) = \sum_{k=0}^n f_k^{\alpha, \beta} P_k^{\alpha, \beta}(x) = \int_{-1}^1 f(t) K_n^{\alpha, \beta}(x, t) \rho(t) dt$$

представляет собой частичную сумму порядка n ряда Фурье–Якоби. Мы будем называть ее просто суммой Фурье–Якоби. Будем рассматривать $S_n^{\alpha, \beta}(f) = S_n^{\alpha, \beta}(f, x)$ как аппарат приближения непрерывных функций, определенных на $[-1, 1]$. Через $C[-1, 1]$ обозначим линейное нормированное пространство всех непрерывных функций, заданных на $[-1, 1]$, для которых норма определяется следующим образом:

$$\|f\| = \max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x)|.$$

Пусть $f \in C[-1, 1]$, $\mathcal{P}_n$ – пространство алгебраических полиномов степени n , и пусть $E_n(f) = \min_{p_n \in \mathcal{P}_n} \|f - p_n\|$ – наилучшее приближение функции f алгебраическими полиномами степени n , $p_n(f) = p_n(f, x)$ – полином наилучшего приближения степени n , т.е. $\|f - p_n(f)\| = E_n(f)$. Нетрудно заметить, что $S_n^{\alpha, \beta}(p_n(f), x) = p_n(f, x)$, поэтому

$$f(x) - S_n^{\alpha, \beta}(f, x) = f(x) - p_n(f, x) + S_n^{\alpha, \beta}(p_n(f) - f, x).$$

Отсюда следует, что

$$|f(x) - S_n^{\alpha, \beta}(f, x)| \leq |f(x) - p_n(f, x)| + |S_n^{\alpha, \beta}(p_n(f) - f, x)|.$$

С другой стороны, имеем

$$S_n^{\alpha,\beta}(p_n(f) - f, x) = \int_{-1}^1 (p_n(f, t) - f(t)) K_n^{\alpha,\beta}(x, t) \rho(t) dt$$

и, стало быть,

$$|S_n^{\alpha,\beta}(p_n(f) - f, x)| \leq E_n(f) L_n^{\alpha,\beta}(x),$$

где

$$L_n^{\alpha,\beta}(x) = \int_{-1}^1 |K_n^{\alpha,\beta}(x, t)| \rho(t) dt.$$

Сопоставляя эти соотношения, получаем оценку

$$|f(x) - S_n^{\alpha,\beta}(f, x)| \leq [1 + L_n^{\alpha,\beta}(x)] E_n(f),$$

которая называется *неравенством Лебега* для сумм Фурье–Якоби. Она сводит вопрос о величине отклонения сумм Фурье–Якоби $S_n^{\alpha,\beta}(f, x)$ от функции $f(x)$ к оценке функции Лебега $L_n^{\alpha,\beta}(x)$ при $-1 \leq x \leq 1$. По поводу исторической справки о поведении функции Лебега $L_n^{\alpha,\beta}(x)$ и константы Лебега $L_n^{\alpha,\beta} = \max_{-1 \leq x \leq 1} L_n^{\alpha,\beta}(x)$ при $n \rightarrow \infty$ мы можем обратиться к [6] и цитированной там литературе. Из рассуждений, проведенных в [6; §9.3], следует, что при $x \in [-1 + \varepsilon, 1 - \varepsilon]$, где $0 < \varepsilon < 1$, порядок роста $L_n^{\alpha,\beta}(x)$ при $n \rightarrow \infty$ не превосходит $\ln(n + 1)$; другими словами,

$$L_n^{\alpha,\beta}(x) \leq c(\alpha, \beta, \varepsilon) \ln(n + 1), \quad x \in [-1 + \varepsilon, 1 - \varepsilon];$$

кроме того, при $s = \max\{\alpha, \beta\} > -1/2$ имеет место оценка

$$L_n^{\alpha,\beta} \geq c(\alpha, \beta) n^{s+1/2}.$$

В работе [7] при $\alpha, \beta > -1/2$, $x \in [-1, 1]$ установлено неравенство

$$L_n^{\alpha,\beta}(x) \leq c(\alpha, \beta) \left\{ \ln(n + 1) + \frac{n^{\alpha+1/2}}{(n\sqrt{1-x})^{\alpha+1/2} + 1} + \frac{n^{\beta+1/2}}{(n\sqrt{1+x})^{\beta+1/2} + 1} \right\},$$

из которого вытекает следующая оценка:

$$L_n^{\alpha,\beta} \asymp n^{s+1/2}.$$

Из этих оценок выводим

$$\|f - S_n^{\alpha,\beta}(f)\| \leq c(\alpha, \beta) n^{s+1/2} E_n(f),$$

где $s = \max\{\alpha, \beta\} > -1/2$. При $s > -1/2$ множитель $n^{s+1/2}$ неограниченно растет вместе с n . Можно показать, что эта оценка неумлучшаема, а именно, существует функция $f \in C[-1, 1]$, для которой имеет место неравенство

$$\frac{\|f - S_{n_k}^{\alpha,\beta}(f)\|}{E_{n_k}(f)} \geq c(\alpha, \beta) n_k^{s+1/2}$$

для бесконечной последовательности номеров $n_1 < n_2 < \dots$. Более того, функция с таким свойством может иметь сколь угодно высокую гладкость. В частности, пусть $W^r H^\mu$ – класс r раз непрерывно-дифференцируемых на $[-1, 1]$ функций f , для

которых при $x, t \in [-1, 1]$ выполняется неравенство $|f^{(r)}(x) - f^{(r)}(t)| \leq c(r, \mu)|x - t|^\mu$. В работе [8] построен пример функции $f(x)$, принадлежащей классу $W^r H^\mu$, $r = 0, 1, \dots$, $0 < \mu < 1$, для которой

$$|f(1) - S_{n_k}^{\alpha, \alpha}(f, 1)| \geq c(\alpha, r, \mu)n_k^{\alpha+1/2-r-\mu}, \quad \alpha > -\frac{1}{2}, \quad n_k \rightarrow \infty.$$

Это означает, что сумма Фурье–Якоби $S_n^{\alpha, \alpha}(f, x)$ приближает функцию $f \in W^r H^\mu$ в $n^{s+1/2}$ раз хуже по порядку, чем полином наилучшего приближения функции f . Причем, как показывает этот пример, искомая функция f может иметь произвольно высокую конечную гладкость. В случае ультрасферических полиномов $P_n^{\alpha, \alpha}(x)$ мы можем привести совсем простой пример аналитической функции f , для которой имеет место неравенство

$$\frac{\|f - S_n^{\alpha, \alpha}(f)\|}{E_n(f)} \geq c(\alpha)n^{s+1/2}$$

для всех $n > 0$. В самом деле, рассмотрим известное разложение (см. [6; с. 94]) производящей функции для ультрасферических полиномов

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(2\alpha+1)} \frac{\Gamma(n+2\alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)} P_n^{\alpha, \alpha}(x) z^n = (1 - 2xz + z^2)^{-\alpha-1/2}.$$

Функция

$$f(x) = f_z(x) = (1 - 2xz + z^2)^{-\alpha-1/2} = (2z)^{-\alpha-1/2} \left(\frac{1+z^2}{2z} - x \right)^{-\alpha-1/2}$$

при $0 < z < 1$ аналитична на всей плоскости, разрезанной вдоль положительной полуоси с началом в точке $x = (1+z^2)/(2z) = a > 1$. Известно (см. [9; с. 476]), что

$$E_n[(a-x)^{-\alpha-1/2}] \asymp \frac{n^{\alpha-1/2}}{\Gamma(\alpha+1/2)(\sqrt{a^2-1})^{\alpha+3/2}(a+\sqrt{a^2-1})^n} \asymp n^{\alpha-1/2} z^n.$$

Отсюда находим $E_n(f) \asymp n^{\alpha-1/2} z^n$. С другой стороны, так как $P_n^{\alpha, \alpha}(1) \asymp n^\alpha$, $\alpha > -1$, пользуясь формулой Стирлинга, находим,

$$|f(1) - S_n^{\alpha, \alpha}(f, 1)| \asymp n^{2\alpha} z^n.$$

Следовательно,

$$\frac{\|f - S_n^{\alpha, \alpha}(f)\|}{E_n(f)} \geq c(\alpha)n^{\alpha+1/2}, \quad \alpha > -\frac{1}{2}.$$

В работе [10] показано, что существуют функции f со сколь угодно быстро убывающими наилучшими приближениями $E_n(f)$, для которых, тем не менее,

$$\frac{\|f - S_n^{\alpha, \alpha}(f)\|}{E_n(f)} \asymp n^{\alpha+1/2}, \quad \alpha > -\frac{1}{2},$$

для бесконечного множества номеров n . Приведенные выше примеры показывают, что суммы Фурье–Якоби $S_n^{\alpha, \alpha}(f, x)$ при $\alpha > -1/2$ плохо приближают не только функции $f \in C[-1, 1]$, обладающие конечной гладкостью (пример Бадкова из

пространства $W^r H^\mu$), но также аналитические и целые функции (за исключением алгебраических полиномов). Итак, суммы Фурье–Якоби $S_n^{\alpha,\beta}(f, x)$, вообще говоря, не дают хорошего приближения для $f \in C[-1, 1]$ и, следовательно, не всегда могут быть использованы как аппарат приближения функции $f \in C[-1, 1]$, даже если f обладает высокой гладкостью на $[-1, 1]$: может случиться, что $S_n^{\alpha,\beta}(f, x)$ приближает f в $n^{s+1/2}$ раз хуже (по порядку), чем полином наилучшего приближения $p_n(f)$. Этот отрицательный факт является следствием того, что константа Лебега $L_n^{\alpha,\beta}$ для сумм Фурье–Якоби $S_n^{\alpha,\beta}(f, x)$ при $s > -1/2$ имеет порядок роста, равный $n^{s+1/2}$, $n \rightarrow \infty$.

Наиболее ярко выраженный недостаток сумм Фурье–Якоби, который также является следствием неограниченного роста констант Лебега $L_n^{\alpha,\beta} \asymp n^{s+1/2}$, заключается в том, что $S_n^{\alpha,\beta}(f, x)$ не возможно использовать для одновременного приближения функции $f(x)$ посредством $S_n^{\alpha,\beta}(f, x)$, а ее производной $f^{(r)}(x)$, $r = 1, 2, \dots$, посредством $(S_n^{\alpha,\beta}(f, x))^{(r)}$. В самом деле, известно (и это совсем легко проверить), что

$$(S_n^{\alpha,\beta}(f, x))^{(r)} = S_{n-r}^{\alpha+r, \beta+r}(f^{(r)}, x) = \sum_{k=0}^{n-r} f_{r,k}^{\alpha+r, \beta+r} P_k^{\alpha+r, \beta+r}(x),$$

где $S_{n-r}^{\alpha+r, \beta+r}(f^{(r)}, x)$ – частичная сумма порядка $n-r$ ряда Фурье функции $f^{(r)}(x)$ по полиномам Якоби $P_k^{\alpha+r, \beta+r}(x)$, $k = 0, 1, \dots$. С другой стороны, как было отмечено выше, уже при $s+r > -1/2$ приближение функции $g \in C[-1, 1]$, доставляемое операторами $S_m^{\alpha+r, \beta+r} = S_m^{\alpha+r, \beta+r}(g)$, вообще говоря, в $m^{s+r+1/2}$ раз хуже по порядку (при $m \rightarrow \infty$), чем наилучшее приближение $E_m(g)$ функции g на $[-1, 1]$ алгебраическими полиномами степени m . Следует особо отметить, что этот существенный недостаток присущ, в частности, суммам Фурье–Якоби $S_n^{\alpha,\alpha}(f, x)$ с произвольным $\alpha > -1$, включая суммы Фурье–Чебышева $S_n^{-1/2, -1/2}(f, x)$ по полиномам Чебышева первого рода $T_k(x)$, $k = 0, 1, \dots$. Мы продемонстрируем это на простом примере. Рассмотрим известное разложение экспоненты

$$e^x = I_0(1) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} I_k(1) T_k(x), \quad x \in [-1, 1],$$

где

$$I_k(a) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(a/2)^{k+2\nu}}{(k+\nu)! \nu!}$$

– функция Бесселя мнимого аргумента порядка k . Пусть

$$S_n(f, x) = I_0(1) + 2 \sum_{k=1}^n I_k(1) T_k(x)$$

– частичная сумма указанного разложения порядка n . Тогда нетрудно заметить, что

$$|e^x - S_n(f, x)| \leq \frac{c}{2^n n!}, \quad x \in [-1, 1].$$

Теперь рассмотрим вопрос о том, насколько хорошо производные функции e^x могут быть приближены посредством соответствующих производных частичной суммы

$S_n(f, x)$. С этой целью продифференцируем обе части рассматриваемого разложения:

$$(e^x)^{(\nu)} = 2 \sum_{k=\nu}^{\infty} I_k(1)(T_k(x))^{(\nu)}, \quad x \in [-1, 1].$$

Если теперь мы воспользуемся равенством

$$(T_k(x))^{(\nu)} = \frac{(2^k k!)^2 (k)_{\nu}}{(2k)! 2^{\nu}} P_{k-\nu}^{\nu-1/2, \nu-1/2}(x),$$

то получим

$$(e^x)^{(\nu)} = \sum_{k=\nu}^{\infty} a_k P_{k-\nu}^{\nu-1/2, \nu-1/2}(x), \quad x \in [-1, 1],$$

где $a_k \asymp k^{\nu+1/2}/2^k k!$. Таким образом, мы замечаем, что

$$(S_n(f, x))^{(\nu)} = \sum_{k=\nu}^n a_k P_{k-\nu}^{\nu-1/2, \nu-1/2}(x),$$

откуда

$$(e^x)^{(\nu)} - (S_n(f, x))^{(\nu)} = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k P_{k-\nu}^{\nu-1/2, \nu-1/2}(x), \quad x \in [-1, 1].$$

В частности, подставляя здесь $x = 1$, получим

$$|(e^x)^{(\nu)} - (S_n(f, x))^{(\nu)}|_{x=1} = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k P_{k-\nu}^{\nu-1/2, \nu-1/2}(1),$$

а так как

$$P_{k-\nu}^{\nu-1/2, \nu-1/2}(1) \asymp k^{\nu-1/2}, \quad a_k \asymp \frac{k^{\nu+1/2}}{2^k k!},$$

находим

$$|(e^x)^{(\nu)} - (S_n(f, x))^{(\nu)}|_{x=1} \asymp \frac{n^{\nu}}{2^n (n-\nu)!}.$$

С другой стороны, поскольку $(e^x)^{(\nu)} = e^x$, имеем

$$|(e^x)^{(\nu)} - S_{n-\nu}(f, x)| \leq \frac{c(\nu)}{2^n (n-\nu)!}, \quad x \in [-1, 1].$$

Сопоставляя полученные оценки, замечаем, что производная $(S_n(f, x))^{(\nu)}$ приближает $(e^x)^{(\nu)}$ на $[-1, 1]$ в n^{ν} раз хуже по порядку, чем некоторый полином $S_{n-\nu}(f, x)$ той же степени, что и $(S_n(f, x))^{(\nu)}$. Таким образом, частичные суммы рядов Фурье по полиномам Якоби, вообще говоря, не могут быть рассмотрены как хороший аппарат приближения в задаче одновременного приближения функции и ее производных. Как уже отмечалось выше, основной причиной такого поведения производных сумм Фурье–Якоби $S_n^{\alpha, \beta}(f, x)$ служит тот факт, что ортонормированные полиномы Якоби $\{h_k^{\alpha+r, \beta+r}\}^{-1/2} P_k^{\alpha+r, \beta+r}(x)$, $k = 0, 1, \dots$, вблизи точек -1 и 1 имеют порядок роста при $k \rightarrow \infty$, равный $k^{s+r+1/2}$, и вследствие этого константа Лебега $L_m^{\alpha+r, \alpha+r}$ при $m \rightarrow \infty$ растет по порядку $m^{s+r+1/2}$. Отсюда возникла задача

о конструировании новых рядов по полиномам Якоби $P_k^{\alpha,\beta}(x)$, $k = 0, 1, \dots$, (альтернативных рядам Фурье–Якоби), пригодных для использования в задаче одновременного приближения дифференцируемых функций и их производных. Идея такой конструкции весьма проста и естественна: поскольку, как было показано выше, путь от функции к производной через суммы Фурье–Якоби ведет нас по “крутому подъему” (т.е. для достижения требуемой точности приближения производной $f^{(r)}(x)$ посредством $(S_n^{\alpha,\beta}(f, x))^{(r)}$ порядок n частичной суммы $S_n^{\alpha,\beta}(f, x)$ приходится брать слишком большим), то обратный путь от производной к самой функции должны вести “по спуску”. Другими словами, вместо того, чтобы разложить функцию $f(x)$ в ряд Фурье–Якоби и дифференцировать его с целью приближения производной $f^{(r)}(x)$ посредством $(S_n^{\alpha,\beta}(f, x))^{(r)}$, нужно действовать в обратном направлении, а именно, следует разложить производную $f^{(r)}(x)$ в ряд Фурье–Якоби и r -кратно интегрировать этот ряд для приближения искомой функции $f(x)$ и промежуточных производных $f^{(\nu)}(x)$, $1 \leq \nu \leq r - 1$. На этом пути и возникает смешанный ряд, ассоциированный с полиномами Якоби. Удобным инструментом для осуществления r -кратного интегрирования производной $f^{(\nu)}(x)$ и ее ряда Фурье–Якоби оказалась формула Тейлора с остаточным членом в виде интеграла с переменным верхним пределом. В результате возникает ряд, общий член которого получается путем умножения k -го коэффициента $f_{r,k}$ Фурье–Якоби r -й производной $f^{(r)}(x)$ на полином Якоби вида $P_k^{\alpha-r,\beta-r}(x)$, $k = 0, 1, \dots$, который с точки зрения теории равномерно-го приближения функций на $[-1, 1]$ обладает значительно лучшими (по сравнению с полиномами $P_k^{\alpha+r,\beta+r}(x)$, $k = 0, 1, \dots$) асимптотическими свойствами вблизи точек $-1, 1$.

Как уже было отмечено выше, задача об одновременном приближении функции и ее нескольких производных возникают в разных областях теории и приложений. Мы остановимся на некоторых из таких задач, непосредственно связанных с прикладными проблемами. Пусть $f(t)$ – достаточно гладкая функция, заданная на $[-1, 1]$. Требуется аппроксимировать $f(t)$ комбинациями вида $p_n(t) + \tau_m(t)$, где $p_n(t)$ – алгебраический полином степени n ,

$$\tau_m(t) = a_0 + \sum_{k=1}^m a_k \cos k\pi t + b_k \sin k\pi t$$

– тригонометрический полином порядка m . Подобные задачи часто встречаются в различных областях приложений, в которых для заданного временного ряда наблюдений $f(t)$ требуется найти так называемый тренд $p_n(t)$ и периодическую составляющую $\tau_m(t)$. Обозначим через X некоторое нормированное с нормой $\|f\|_X$ пространство функций $f = f(t)$, заданных на $[-1, 1]$. Если X содержит все алгебраические и тригонометрические полиномы, то мы можем определить величину

$$E_{n,m}(f)_X = \inf_{p_n, \tau_m} \|f - p_n - \tau_m\|_X,$$

представляющую собой наилучшее приближение функции $f \in X$ алгебро-тригонометрическими полиномами $p_n(x) + \tau_m(x)$ порядка $n + m$. Если $\mathcal{Y}$ – некоторый подкласс из X , то положим $E_{n,m}(\mathcal{Y})_X = \sup_{f \in \mathcal{Y}} E_{n,m}(f)_X$. Ставится задача об исследовании поведения величины $E_{n,m}(\mathcal{Y})_X$ для различных нормированных пространств X и классов $\mathcal{Y} \subset X$. Рассмотрим случай, когда $X = C[-1, 1]$. Через $L^p(-1, 1)$ мы обозначим лебегово пространство функций $f = f(x)$ с нормой $\|f\|_p =$

$(\int_{-1}^1 |f(x)|^p dx)^{1/p}$. В пространстве $C[-1, 1]$ мы будем выделять классы Соболева $W_p^r(M)$, состоящие из $r - 1$ раз непрерывно дифференцируемых функций $f(x)$, для которых $f^{(r-1)}(x)$ абсолютно непрерывна, а $f^{(r)}(x) \in L^p(-1, 1)$, $\|f^{(r)}\|_p \leq M$. Положим $W_p^r = \bigcup_{M>0} W_p^r(M)$. Через $\widetilde{W}_p^r(M)$ обозначим подкласс функций $f \in W_p^r(M)$, которые допускают 2-периодическое продолжение на всю числовую ось с сохранением гладкости; другими словами, если $f \in \widetilde{W}_p^r(M)$, то

$$f^{(\nu)}(-1) = f^{(\nu)}(1), \quad \nu = 0, 1, \dots, r - 1.$$

При $p = \infty$ будем считать, что $W_\infty^r(M)$ состоит из r раз непрерывно дифференцируемых функций $f(x)$, заданных на $[-1, 1]$ и, соответственно, $\widetilde{W}_\infty^r(M) \subset W_\infty^r(M)$.

Основная идея, которая позволяет успешно решить поставленную задачу для классов $W_p^r(M)$, заключается в следующем. Для заданной функции $f \in W_p^r(M)$ подбирается алгебраический полином $p_n(x) = p_n(f, x)$, удовлетворяющий условиям

$$p_n^{(\nu)}(\pm 1) = f^{(\nu)}(\pm 1), \quad \nu = 0, 1, \dots, r - 1, \quad (1.1)$$

который доставляет для функции $f(x)$ и ее производных $f^{(\nu)}(x)$ одновременное равномерное на $[-1, 1]$ приближение порядка $n^{\nu-r}$. Затем разность $g_n(x) = f(x) - p_n(x)$ продолжается 2-периодически на всю числовую ось сохранением гладкости так, чтобы $g_n(x)$ попала в класс $\widetilde{W}_p^r(cn^{\nu-r})$. После этого функцию $g_n(x)$ приближаем тригонометрическими полиномами. Этим методом удается получить неулучшаемые порядковые оценки для величины $E_{n,m}(W_p^r(M))_{C[-1,1]}$ при $n + m \rightarrow \infty$. При реализации этой идеи для $p = \infty$ основную роль играет известная теорема Теляковского–Гопенгауза [11], [12], согласно которой для $f \in W_\infty^r(M)$ найдется такая последовательность алгебраических полиномов $\{P_n(x)\}_{n=2r+1}^\infty$, что для каждого $0 \leq \nu \leq r$ справедлива оценка

$$|f^{(\nu)}(x) - P_n^{(\nu)}(x)| \leq C_r \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n} \right)^{r-\nu} \omega \left(f^{(r)}, \frac{\sqrt{1-x^2}}{n} \right), \quad (1.2)$$

где C_r – положительное число, зависящее только от r ,

$$\omega(g, \delta) = \sup_{x_1, x_2 \in [-1, 1], |x_1 - x_2| \leq \delta} |g(x_1) - g(x_2)|$$

– модуль непрерывности функции $g(x)$. Из (1.2) следует, в частности, что

$$f^{(\nu)}(\pm 1) = P_n^{(\nu)}(\pm 1) \quad \text{при} \quad \nu = 0, 1, \dots, r, \quad (1.3)$$

а для функции $g_n(x) = f(x) - P_n(x)$ справедлива оценка

$$\|g_n^{(\nu)}\| \leq \frac{C_r}{n^{r-\nu}} \omega \left(f^{(r)}, \frac{1}{n} \right). \quad (1.4)$$

Из (1.3) и (1.4) непосредственно вытекает, что функция $g_n(x)$ может быть продолжена на всю числовую ось 2-периодически с сохранением гладкости, т.е. так, чтобы продолженная функция

$$g_n(x) \in \widetilde{W}_\infty^\nu \left(\frac{C_r}{n^{r-\nu}} \omega \left(f^{(r)}, \frac{1}{n} \right) \right), \quad (1.5)$$

где через $\widetilde{W}_\infty^\nu(M)$ мы обозначаем класс 2-периодических ν -раз непрерывно дифференцируемых функций $g(x)$, для которых норма определяется равенством $\|g\| = \max_{-1 \leq x \leq 1} |g(x)|$. Из (1.6) в силу известных теорем Фавара о приближении классов $\widetilde{W}_\infty^\nu(M)$ тригонометрическими полиномами имеем

$$E_m^T(g_n) \leq \frac{C_r}{\pi^\nu m^\nu} \frac{\omega(f^{(r)}, 1/n)}{n^{r-\nu}}, \quad 0 \leq \nu \leq r, \quad (1.6)$$

где $E_m^T(g_n)$ – наилучшее приближение функции $g(x)$ тригонометрическими полиномами. Выберем ν следующим образом: если $n \geq m$ положим $\nu = 0$, а если $m > n$, то возьмем $\nu = r$. Тогда из (1.6) выводим

$$E_m^T(g_n) \leq \frac{C_r}{(\max\{n, m\})^r} \omega\left(f^{(r)}, \frac{1}{n}\right) \leq \frac{C_r}{(n+m)^r} \omega\left(f^{(r)}, \frac{1}{n}\right), \quad (1.7)$$

С другой стороны, очевидно, что $E_{n,m}(f) \leq E_m^T(g_n)$, поэтому из (1.7) выводим

$$E_{n,m}(f) \leq \frac{C_r}{(n+m)^r} \omega\left(f^{(r)}, \frac{1}{n}\right).$$

Это и есть искомая оценка для величины $E_{n,m}(f)$. Можно показать, что она неуплачивается по порядку на классах $W_\infty^r(M)$. Ключевую роль при получении этой оценки сыграло то, что из теоремы Теляковского–Гопенгауза мы знаем о существовании последовательности алгебраических полиномов $\{P_n(x) = P_n(f, x)\}_{n=2r+1}^\infty$, осуществляющих одновременное приближение функции f и нескольких ее производных, причем так, что $(P_n(f, x))^{(\nu)}$ доставляет наилучший порядок приближения класса $W_\infty^r(M)$ алгебраическими полиномами степени $n-\nu$ и удовлетворяет условию (1.1). С другой стороны, для приложений имеет важное значение умение конструировать полиномиальные операторы $P_n = P_n(f)$, обладающие свойством (1.2) или его следствием для класса $W_\infty^r(M)$:

$$\sup_{f \in W_\infty^r(M)} \frac{|f^{(\nu)}(x) - P_n^{(\nu)}(x)|}{(1-x^2)^{(r-\nu)/2}} \leq C_r \frac{M}{n^{r-\nu}}, \quad x \in [-1, 1], \quad 0 \leq \nu \leq r-1. \quad (1.8)$$

В работе [5] показано, что такие операторы могут быть сконструированы с помощью смешанных рядов по полиномам Лежандра, а именно, в качестве $P_n = P_n(f)$ можно взять средние типа Валле–Пуссена частичных сумм смешанного ряда по полиномам Лежандра. Тогда $P_n = P_n(f)$ обладают свойством (1.8). Недавно [13], опираясь на результаты, полученные в работе [14], нам удалось доказать оценку, аналогичную (1.8) для классов $W_p^r(M)$ с $4/3 < p < 4$. В этой оценке в качестве операторов $P_n = P_n(f)$ рассматриваются частичные суммы смешанного ряда по полиномам Лежандра.

Отметим также, что в недавно опубликованной монографии [15; с. 102] при рассмотрении проекционных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений в качестве координатных функций возникают полиномы

$$\omega_{k+1}(x) = b_k(1-x^2)^m P_{k-m}^{m,m}(x),$$

где b_k – некоторые коэффициенты. Эти же полиномы возникают и при конструировании смешанного ряда по полиномам Лежандра, который имеет вид

$$f(x) \sim D_{2r-1}(x) + \mathcal{F}_r(x),$$

где $D_{2r-1}(x)$ представляет собой интерполяционный полином Эрмита, интерполирующий функцию $f(x)$ и ее производные $f^{(\nu)}(x)$ при $0 \leq \nu \leq r-1$ в узлах ± 1 , т.е.

$$D_{2r-1}(x) = \frac{(1-x^2)^r}{2^r} \sum_{\nu=0}^{r-1} \frac{1}{\nu!} \sum_{s=0}^{r-1-\nu} \frac{(r)_s}{2^s s!} \left[\frac{f^{(\nu)}(-1)}{(1+x)^{r-\nu-s}} + \frac{(-1)^\nu f^{(\nu)}(1)}{(1-x)^{r-\nu-s}} \right],$$

а функция $\mathcal{F}_r(x)$ определяется равенством

$$\mathcal{F}_r(x) = \frac{(-1)^r}{2^r} \sum_{k=r}^{\infty} \frac{f_{r,k}}{k[r]} (1-x^2)^r P_{k-r}^{r,r}(x).$$

Еще одна задача, часто возникающая в приложениях (обработка временных рядов, обработка изображений и так далее), для решения которой успешно могут быть применены частичные суммы смешанных рядов по полиномам Якоби (проведенные авторами настоящей статьи компьютерные эксперименты это подтверждают), связана с приближением кусочно-гладких функций. Предположим, например, что функция $f(x)$, заданная на некотором отрезке $[a, b]$, является кусочно-аналитической, т.е. существуют такие точки $a = a_0 < a_1 < \dots < a_k < a_{k+1} = b$, для которых $f(x)$ является аналитической на каждом из отрезков $[a_j, a_{j+1}]$, $j = 0, \dots, k$. Такую функцию нельзя эффективно приближать на всем отрезке $[a, b]$ алгебраическими или тригонометрическими полиномами. Нетрудно понять, что для решения этой задачи нужно сконструировать полиномиальные сплайны достаточно высокого порядка с узлами в заданных точках $a_0, a_1, \dots, a_k, a_{k+1}$, сохраняющих гладкость функции $f(x)$ на всем отрезке $[a, b]$. Можно показать, что удобным инструментом решения этой задачи являются частичные суммы смешанного ряда по полиномам Якоби.

Следует отметить, что уже сама конструкция смешанного ряда по классическим ортогональным полиномам, которая естественным (а не искусственным) способом возникает в результате r -кратного интегрирования ряда Фурье r -й производной функции f по рассматриваемой системе ортогональных полиномов, базируется на использовании как всех хорошо известных дифференциально-разностных свойств этих полиномов, так и свойств, вытекающих из их ортогональности. Это, в конечном счете, и делает смешанные ряды удобным аппаратом одновременного приближения дифференцируемых функций и их производных. Для сравнения заметим, что ряд Фурье по тем же полиномам для самой дифференцируемой функции f базируется лишь на свойстве их ортогональности, поэтому слабо учитывает дифференциальные свойства f , в то время, как смешанный ряд в своей конструкции учитывает их в полной мере и, как следствие, производные частичной суммы смешанного ряда функции f , ассоциированного с рассматриваемой системой ортогональных полиномов, значительно лучше, чем производные суммы Фурье функции f по той системе ортогональных полиномов приближают производные этой функции.

Настоящая статья посвящена исследованию аппроксимативных свойств смешанных рядов по полиномам Якоби на весовых пространствах Соболева (теорема 1 из п. 4) и дискретизированных смешанных рядов по полиномам Чебышева первого рода на классах аналитических функций. Дискретизация производится путем замены интегралов, определяющих в смешанном ряде по полиномам Чебышева $T_k(x)$ коэффициенты Фурье–Чебышева $f_{r,k}$ r -й производной функции $f(x)$ с индексами $k \leq 2N-1$ квадратурными формулами с узлами в точках $t_j = \cos(\pi j/N)$, $j = 0, 1, \dots, N$, являющихся экстремумами полинома Чебышева $T_N(x)$. Слагаемые непрерывного смешанного ряда по полиномам $T_k(x)$, содержащие $f_{r,k}$ с $k \geq 2N$ отбрасываются. Это

позволяет применять быстрое преобразование Фурье при численной реализации дискретных смешанных рядов по полиномам $T_k(x)$. При этом возникает вопрос о том, сохранится ли после дискретизации основное свойство смешанного ряда, которое состоит в том, что частичные суммы смешанного ряда в определенном смысле наилучшим образом одновременно приближают функцию и несколько ее производных. Полученные в настоящей работе результаты позволяют утвердительно ответить на поставленный вопрос. Основные из них сформулированы ниже в пп. 8 (теорема 2) и 9 (оценка (9.15)).

Отметим, что идея о применении узлов Чебышева $t_j = \cos(\pi j/N)$ для приближенного вычисления интегралов и интерполяции функций полиномами и рациональными функциями не является новой и встречалась в работах очень многих авторов. По этому поводу мы отсылаем, например, к работам [16]–[18] и цитированной там литературе.

2. Некоторые сведения о полиномах Якоби. Полиномы Якоби $P_n^{\alpha,\beta}(x)$ мы определим с помощью формулы Родрига

$$P_n^{\alpha,\beta}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n! \rho(x)} (\rho(x)(1-x^2)^n(x))^{(n)}, \quad (2.1)$$

где $\rho(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$, α, β – произвольные вещественные числа. В частности, когда $\alpha = \beta = -1/2$ полиномы Якоби $P_n^{\alpha,\beta}(x)$ с точностью до постоянного множителя превращаются в полиномы Чебышева $T_n(x)$. Более точно,

$$\begin{aligned} P_n^{-1/2,-1/2}(x) &= \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n} T_n(x) \\ &= \frac{(2n)!}{2^n n!^2} T_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} (1 + \sigma_n) T_n(x), \quad \sigma_n = O\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned} \quad (2.2)$$

При $\alpha, \beta > -1$ полиномы Якоби образуют ортогональную систему на $(-1, 1)$ с весом $\rho(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$, а именно:

$$\int_{-1}^1 \rho(x) P_n^{\alpha,\beta}(x) P_k^{\alpha,\beta}(x) dx = h_n^{\alpha,\beta} \delta_{nk}, \quad (2.3)$$

где

$$h_n^{\alpha,\beta} = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)2^{\alpha+\beta+1}}{n!\Gamma(n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+1)}, \quad h_0^{\alpha,\beta} = \frac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)}.$$

При конструировании смешанных рядов важную роль играют следующие свойства полиномов Якоби [5]:

- производные

$$\frac{d}{dx} P_n^{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{2}(n+\alpha+\beta+1)P_{n-1}^{\alpha+1,\beta+1}(x), \quad (2.4)$$

$$\frac{d^r}{dx^r} P_n^{\alpha,\beta}(x) = \frac{(n+\alpha+\beta+1)_r}{2^r} P_{n-r}^{\alpha+r,\beta+r}(x), \quad (2.5)$$

$$\frac{d^r}{dx^r} P_{n+r}^{\alpha-r,\beta-r}(x) = \frac{(n+\alpha+\beta)^{[r]}}{2^r} P_n^{\alpha,\beta}(x), \quad (2.6)$$

где $a^{[0]} = (a)_0 = 1$, $a^{[r]} = a(a-1)\dots(a-r+1)$;

- частные значения

$$P_n^{\alpha,\beta}(1) = \binom{n+\alpha}{n}, \quad P_n^{\alpha,\beta}(-1) = \binom{n+\beta}{n}(-1)^n; \quad (2.7)$$

- симметрия

$$P_n^{\alpha,\beta}(-x) = (-1)^n P_n^{\beta,\alpha}(x); \quad (2.8)$$

- весовая оценка

$$\sqrt{n} \left| P_n^{\alpha,\beta}(x) \right| \leq c(\alpha, \beta) \left(\sqrt{1-x} + \frac{1}{n} \right)^{-\alpha-1/2} \left(\sqrt{1+x} + \frac{1}{n} \right)^{-\beta-1/2}; \quad (2.9)$$

- сходимость в среднем рядов Фурье–Якоби.

Пусть $a, b \in \mathbb{R}$, $\mu(x) = (1-x)^a(1+x)^b$, $p > 1$, $\mathcal{L}_\mu^p(-1, 1)$ – пространство измеримых функций, заданных на $(-1, 1)$, для которых существует конечная норма

$$\|f\|_{p,\mu} = \left(\int_{-1}^1 |f(x)|^p \mu(x) dx \right)^{1/p}.$$

В работе [19] установлен следующий результат.

ТЕОРЕМА М (Muckenhoupt). Пусть $-1 < \alpha, \beta$, $a, b \in \mathbb{R}$, $p > 1$ таковы, что

$$\left| \frac{a+1}{p} - \frac{\alpha+1}{2} \right| < \min \left\{ \frac{1}{4}, \frac{\alpha+1}{2} \right\}, \quad \left| \frac{b+1}{p} - \frac{\beta+1}{2} \right| < \min \left\{ \frac{1}{4}, \frac{\beta+1}{2} \right\}.$$

Тогда для любой функции $f \in \mathcal{L}_\mu^p(-1, 1)$ частичные суммы $S_n^{\alpha,\beta}(f, x)$ ее ряда Фурье–Якоби при $n \rightarrow \infty$ сходятся к f в метрике пространства $\mathcal{L}_\mu^p(-1, 1)$, т.е. при $n \rightarrow \infty$

$$\|f - S_n^{\alpha,\beta}(f)\|_{\mathcal{L}_\mu^p(-1,1)} \rightarrow 0.$$

3. Смешанные ряды по полиномам Якоби. Введем смешанные ряды по полиномам Якоби $P_n^{\alpha,\beta}(x)$ с параметрами α, β , удовлетворяющими условию $-1 < \alpha, \beta < 1$. Смешанные ряды Чебышева–Якоби являются частным случаем, когда $\alpha = \beta = -1/2$. Пусть целое $r \geq 1$, функция $f = f(x)$ непрерывно-дифференцируема $r-1$ раз на $[-1, 1]$, $f^{(r-1)}(x)$ абсолютно непрерывна и

$$\int_{-1}^1 (1-x)^\alpha (1+x)^\beta |f^{(r)}(x)| dx < \infty. \quad (3.1)$$

Тогда мы можем определить коэффициенты

$$f_{r,k}^{\alpha,\beta} = \frac{1}{h_{\alpha,\beta}^{\alpha,\beta}} \int_{-1}^1 (1-t)^\alpha (1+t)^\beta f^{(r)}(t) P_k^{\alpha,\beta}(t) dt \quad (3.2)$$

и ряд Фурье–Якоби

$$f^{(r)}(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} f_{r,k}^{\alpha,\beta} P_k^{\alpha,\beta}(x) \quad (3.3)$$

для функции $g(x) = f^{(r)}(x)$. Далее, запишем формулу Тейлора

$$f(x) = Q_{r-1}(f, x) + \frac{1}{(r-1)!} \int_{-1}^x (x-t)^{r-1} f^{(r)}(t) dt, \quad (3.4)$$

где

$$Q_{r-1}(f, x) = \sum_{\nu=0}^{r-1} \frac{f^{(\nu)}(-1)}{\nu!} (1+x)^\nu$$

– полиномом Тейлора и выполним формальную подстановку в (3.4) вместо $f^{(r)}(t)$ ряда Фурье–Якоби (3.3). Если эта операция законна, то мы придем к следующему равенству:

$$f(x) = Q_{r-1}(f, x) + \frac{1}{(r-1)!} \sum_{k=0}^{\infty} f_{r,k}^{\alpha,\beta} \int_{-1}^x (x-t)^{r-1} P_k^{\alpha,\beta}(t) dt. \quad (3.5)$$

Пусть $\lambda = \alpha + \beta$. Тогда если $(k+\lambda)^{[r]} \neq 0$, то мы можем воспользоваться равенством (2.6) и записать

$$P_k^{\alpha,\beta}(t) = \frac{2^r}{(k+\lambda)^{[r]}} \frac{d^r}{dt^r} P_{k+r}^{\alpha-r,\beta-r}(t). \quad (3.6)$$

Заметим, что если $\lambda \notin \{-1, 0, 1\}$, то при $-1 < \alpha, \beta < 1$ равенство (3.6) справедливо при всех $k = 0, 1, \dots$. Если же $\lambda \in \{-1, 0, 1\}$, то $(k+\lambda)^{[r]} \neq 0$ при $k \geq r - \lambda$, и для таких k мы можем снова воспользоваться равенством (3.6).

3.1. Случай $\lambda \notin \{-1, 0, 1\}$. При $\lambda \notin \{-1, 0, 1\}$, пользуясь равенством (3.6) имеем для любого $k = 0, 1, \dots$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(r-1)!} \int_{-1}^x (x-t)^{r-1} P_k^{\alpha,\beta}(t) dt \\ &= \frac{2^r}{(k+\lambda)^{[r]}} \frac{1}{(r-1)!} \int_{-1}^x (x-t)^{r-1} \frac{d^r}{dt^r} P_{k+r}^{\alpha-r,\beta-r}(t) dt \\ &= \frac{2^r}{(k+\lambda)^{[r]}} \left[P_{k+r}^{\alpha-r,\beta-r}(x) - \sum_{\nu=0}^{r-1} \frac{(1+x)^\nu}{\nu!} \{P_{k+r}^{\alpha-r,\beta-r}(t)\}_{t=-1}^{(\nu)} \right]. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Далее, в силу (2.5)

$$\{P_{k+r}^{\alpha-r,\beta-r}(t)\}_{t=-1}^{(\nu)} = \frac{(k+\lambda-r+1)_\nu}{2^\nu} P_{k+r-\nu}^{\alpha+\nu-r,\beta+\nu-r}(t), \quad (3.8)$$

а из (2.7) имеем

$$P_{k+r-\nu}^{\alpha+\nu-r,\beta+\nu-r}(-1) = (-1)^{k+r-\nu} \binom{k+\beta}{k+r-\nu} = \frac{(-1)^{k+r-\nu} \Gamma(k+\beta+1)}{\Gamma(\nu-r+\beta+1)(k+r-\nu)!}. \quad (3.9)$$

Из (3.8) и (3.9) находим

$$\{P_{k+r}^{\alpha-r,\beta-r}(t)\}_{t=-1}^{(\nu)} = \frac{(-1)^{k+r-\nu} \Gamma(k+\beta+1)(k+\lambda-r+1)_\nu}{\Gamma(\nu-r+\beta+1)(k+r-\nu)! 2^\nu} = A_{\nu,k}. \quad (3.10)$$

Сопоставляя (3.7) и (3.10), мы можем записать

$$\frac{1}{(r-1)!} \int_{-1}^x (x-t)^{r-1} P_k^{\alpha,\beta}(t) dt = \left[P_{k+r}^{\alpha-r,\beta-r}(x) - \sum_{\nu=0}^{r-1} \frac{A_{\nu,k}}{\nu!} (1+x)^\nu \right] \frac{2^r}{(k+\lambda)^{[r]}}. \quad (3.11)$$

Из (3.5) и (3.11) имеем

$$f(x) = Q_{r-1}(f, x) + 2^r \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_{r,k}^{\alpha,\beta}}{(k+\lambda)^{[r]}} \left[P_{k+r}^{\alpha-r, \beta-r}(x) - \sum_{\nu=0}^{r-1} \frac{A_{\nu,k}}{\nu!} (1+x)^{\nu} \right]. \quad (3.12)$$

Правую часть (3.12) можно переписать так:

$$f(x) = D_{r-1}^{\alpha,\beta}(f, x) + 2^r \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_{r,k}^{\alpha,\beta}}{(k+\lambda)^{[r]}} P_{k+r}^{\alpha-r, \beta-r}(x), \quad (3.13)$$

где

$$D_{r-1}^{\alpha,\beta}(f, x) = \sum_{\nu=0}^{r-1} \frac{1 - A_{\nu}}{\nu!} (1+x)^{\nu}, \quad (3.14)$$

$$A_{\nu} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^r A_{\nu,k}}{(k+\lambda)^{[r]}} f_{r,k}^{\alpha,\beta}. \quad (3.15)$$

Прежде чем доказать законность преобразований, которые нас привели к (3.13), рассмотрим еще случай, когда $\lambda \in \{-1, 0, 1\}$.

3.2. Случай $\lambda \in \{-1, 0, 1\}$, $-1 < \alpha, \beta < 1$. В случае, когда $\lambda \in \{-1, 0, 1\}$, выражение $(k+\lambda)^{[r]}$ обращается в нуль при $k+\lambda \leq r-1$ и для таких значений формула (3.6) не пригодна. Но если $k \geq r-\lambda$, то $(k+\lambda)^{[r]} > 0$, и мы снова можем воспользоваться равенством (3.6). Имея в виду это свойство полиномов Якоби, перепишем равенство (3.5) следующим образом:

$$f(x) = Q_{r-1}(x) + B_{2r-1-\lambda}^{\alpha,\beta}(f, x) + G_r^{\alpha,\beta}(f, x), \quad (3.16)$$

где

$$B_{2r-1-\lambda}^{\alpha,\beta}(f, x) = \frac{1}{(r-1)!} \sum_{k=0}^{r-1-\lambda} f_{r,k}^{\alpha,\beta} \int_{-1}^x (x-t)^{r-1} P_k^{\alpha,\beta}(t) dt, \quad (3.17)$$

$$G_r^{\alpha,\beta}(f, x) = \frac{1}{(r-1)!} \sum_{k=r-\lambda}^{\infty} f_{r,k}^{\alpha,\beta} \int_{-1}^x (x-t)^{r-1} P_k^{\alpha,\beta}(t) dt. \quad (3.18)$$

Как уже было отмечено, для $k \geq r-\lambda$ мы можем воспользоваться равенством (3.6) и, как следствие, равенством (3.11). Это дает

$$G_r^{\alpha,\beta}(x) = 2^r \sum_{k=r-\lambda}^{\infty} \frac{f_{r,k}^{\alpha,\beta}}{(k+\lambda)^{[r]}} \left[P_{k+r}^{\alpha-r, \beta-r}(x) - \sum_{\nu=0}^{r-1} \frac{A_{\nu,k}}{\nu!} (1+x)^{\nu} \right]. \quad (3.19)$$

Пусть

$$E_{r-1}^{\alpha,\beta}(f, x) = - \sum_{\nu=0}^{r-1} \frac{g_{\nu}}{\nu!} (1+x)^{\nu}, \quad (3.20)$$

$$g_{\nu} = \sum_{k=r-\lambda}^{\infty} \frac{2^r A_{\nu,k}}{(k+\lambda)^{[r]}} f_{r,k}^{\alpha,\beta}. \quad (3.21)$$

Из (3.4), (3.17) и (3.20) следует, что

$$\begin{aligned} \overline{D}_{2r-1-\lambda}^{\alpha,\beta}(f, x) &= Q_{r-1}^{\alpha,\beta}(f, x) + E_{r-1}^{\alpha,\beta}(f, x) + B_{2r-1-\lambda}^{\alpha,\beta}(f, x) \\ &= \sum_{\nu=0}^{r-1} \frac{1-g_\nu}{\nu!} (1+x)^\nu + \frac{1}{(r-1)!} \sum_{k=0}^{r-1-\lambda} f_{r,k}^{\alpha,\beta} \int_{-1}^x (x-t)^{r-1} P_k^{\alpha,\beta}(t) dt. \end{aligned} \quad (3.22)$$

– алгебраический полином степени $2r-1-\lambda$. Сопоставляя (3.16), (3.19) и (3.22), приходим для $\lambda \in \{-1, 0, 1\}$ к следующему равенству:

$$f(x) = \overline{D}_{2r-1-\lambda}^{\alpha,\beta}(f, x) + 2^r \sum_{k=r-\lambda}^{\infty} \frac{f_{r,k}^{\alpha,\beta}}{(k+\lambda)^{[r]}} P_{k+r}^{\alpha-r,\beta-r}(x). \quad (3.23)$$

Правые части равенств (3.13) и (3.23) будем называть *смешанными рядами по полиномам Якоби* $P_n^{\alpha,\beta}(x)$ или *смешанными рядами, ассоциированными с полиномами Якоби* $P_n^{\alpha,\beta}(x)$.

4. О сходимости смешанных рядов по полиномам Якоби. В этом пункте мы исследуем вопрос о сходимости смешанных рядов по полиномам Якоби. Пусть $a, b \in \mathbb{R}$, $\rho(x) = (1-x)^a(1+x)^b$, $p > 1$. Через $\mathcal{L}_\rho^p(-1, 1)$ обозначим пространство измеримых функций, заданных на $(-1, 1)$, для которых существует конечная норма

$$\|f\|_{p,\rho} = \left(\int_{-1}^1 |f(x)|^p \rho(x) dx \right)^{1/p}. \quad (4.1)$$

Для целого $r \geq 1$ через $W_{\mathcal{L}_\rho^p(-1,1)}^r$ обозначим класс r раз дифференцируемых функций, для которых $f^{(r-1)}(x)$ абсолютно непрерывна на $(-1, 1)$, а $f^{(r)} \in \mathcal{L}_\rho^p(-1, 1)$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $-1 < \alpha, \beta \leq 1/2$, $a, b \in \mathbb{R}$, $p > 1$ таковы, что

$$\left| \frac{a+1}{p} - \frac{\alpha+1}{2} \right| < \min \left\{ \frac{1}{4}, \frac{\alpha+1}{2} \right\}, \quad \left| \frac{b+1}{p} - \frac{\beta+1}{2} \right| < \min \left\{ \frac{1}{4}, \frac{\beta+1}{2} \right\}, \quad (4.2)$$

$\rho(x) = (1-x)^a(1+x)^b$. Тогда, если $f \in W_{\mathcal{L}_\rho^p(-1,1)}^r$, то смешанные ряды (3.13) и (3.23) существуют и равномерно на $[-1, 1]$ сходятся к $f(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существование рядов (3.13) и (3.23) означает, что, во-первых, мы можем определить коэффициенты Фурье–Якоби $f_{r,k}^{\alpha,\beta}$ для функции $f^{(r)}(x)$, и, во-вторых, что числовые ряды (3.15) и (3.21) сходятся. Покажем сначала, что коэффициенты $f_{r,k}^{\alpha,\beta}$ с помощью равенства (3.2) можно определить, если $f \in W_{\mathcal{L}_\rho^p(-1,1)}^r$. Для этого достаточно показать, что функция $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta f^{(r)}(x)$ интегрируема на $(-1, 1)$. В самом деле, поскольку $f^{(r)} \in \mathcal{L}_\rho^p(-1, 1)$, в силу условий (4.2)

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 (1-x)^\alpha(1+x)^\beta |f^{(r)}(x)| dx \\ &= \int_{-1}^1 (1-x)^{\alpha-a/p} (1+x)^{\beta-b/p} \{\rho(x)\}^{1/p} |f^{(r)}(x)| dx \\ &\leq \left(\int_{-1}^1 (1-x)^{(\alpha-a/p)p'} (1+x)^{(\beta-b/p)p'} dx \right)^{1/p'} \left(\int_{-1}^1 \rho(x) |f^{(r)}(x)|^p dx \right)^{1/p}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

где $p' = p/(p-1)$ – сопряженный показатель. Второй интеграл в (4.3) конечен, а для сходимости первого интеграла из (4.3) достаточно, чтобы были справедливы неравенства

$$\left(\alpha - \frac{a}{p}\right)p' > -1, \quad \left(\beta - \frac{b}{p}\right)p' > -1, \quad (4.4)$$

но (4.4) равносильно тому, что

$$\frac{p\alpha - a}{p} > -\frac{1}{p'} = -1 + \frac{1}{p}, \quad \frac{p\beta - b}{p} > -1 + \frac{1}{p}$$

или, что то же,

$$p(\alpha + 1) - (a + 1) > 0, \quad p(\beta + 1) - (b + 1) > 0,$$

а это, в свою очередь, равносильно тому, что

$$\frac{\alpha + 1}{2} - \frac{a + 1}{p} > -\frac{\alpha + 1}{2}, \quad \frac{\beta + 1}{2} - \frac{b + 1}{p} > -\frac{\beta + 1}{2}. \quad (4.5)$$

А поскольку

$$-\min\left\{\frac{1}{4}, \frac{\alpha + 1}{2}\right\} \geq -\frac{\alpha + 1}{2}, \quad -\min\left\{\frac{1}{4}, \frac{\beta + 1}{2}\right\} \geq -\frac{\beta + 1}{2},$$

справедливость неравенств (4.5) вытекает из (4.2) и, тем самым, коэффициенты $f_{r,k}^{\alpha,\beta}$ существуют.

Теперь покажем, что числовые ряды (3.15) и (3.21) сходятся. С этой целью оценим $|f_{r,k}^{\alpha,\beta}|$. Используя весовую оценку (2.9), имеем

$$\begin{aligned} |f_{r,k}^{\alpha,\beta}| &\leq \frac{1}{h_k^{\alpha,\beta}} \int_{-1}^1 (1-x)^\alpha (1+x)^\beta |P_k^{\alpha,\beta}(x)| |f^{(r)}(x)| dx \\ &\leq c(\alpha, \beta) k^{1/2} \int_{-1}^1 (1-x)^{\alpha/2-1/4} (1+x)^{\beta/2-1/4} |f^{(r)}(x)| dx \\ &= c(\alpha, \beta) k^{1/2} \int_{-1}^1 (1-x)^{\alpha/2-1/4-a/p} (1+x)^{\beta/2-1/4-b/p} \{\rho(x)\}^{1/p} |f^{(r)}(x)| dx \\ &\leq c(\alpha, \beta) k^{1/2} \left(\int_{-1}^1 (1-x)^{(\alpha/2-1/4-a/p)p'} (1+x)^{(\beta/2-1/4-b/p)p'} dx \right)^{1/p'} \\ &\quad \times \left(\int_{-1}^1 \rho(x) |f^{(r)}(x)|^p dx \right)^{1/p}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Первый из интегралов сходится, если

$$\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4} - \frac{a}{p}\right)p' > -1, \quad \left(\frac{\beta}{2} - \frac{1}{4} - \frac{b}{p}\right)p' > -1,$$

или

$$\frac{\alpha + 1}{2} - \frac{a + 1}{p} > -\frac{1}{4}, \quad \frac{\beta + 1}{2} - \frac{b + 1}{p} > -\frac{1}{4}.$$

Но эти неравенства вытекают из (4.2), поэтому из (4.6) находим

$$|f_{r,k}^{\alpha,\beta}| \leq c(\alpha, \beta) k^{1/2} \|f^{(r)}\|_{\mathcal{L}_p^p}.$$

Из этой оценки следует абсолютная сходимость рядов (3.15) и (3.21) при $\beta < 1/2$.

Перейдем к доказательству равномерной сходимости на $[-1, 1]$ рядов (3.13), (3.23). С этой целью докажем сначала равномерную сходимость ряда (3.5). Пусть

$$S_n^{\alpha,\beta}(f^{(r)}) = S_n^{\alpha,\beta}(f^{(r)}, x) = \sum_{k=0}^n f_{r,k}^{\alpha,\beta} P_k^{\alpha,\beta}(x) \quad (4.7)$$

– частичная сумма ряда Фурье–Якоби функции $f^{(r)}(x)$. Имеем

$$\begin{aligned} & \left| \int_{-1}^x (x-t)^{r-1} f^{(r)}(t) dt - \int_{-1}^x (x-t)^{r-1} S_n^{\alpha,\beta}(f^{(r)}, t) dt \right| \\ & \leq 2^{r-1} \int_{-1}^1 |f^{(r)}(t) - S_n^{\alpha,\beta}(f^{(r)}, t)| dt \\ & = 2^{r-1} \int_{-1}^1 \{\rho(t)\}^{-1/p} \{\rho(t)\}^{1/p} |f^{(r)}(t) - S_{r,n}^{\alpha,\beta}(f^{(r)}, t)| dt \\ & \leq 2^{r-1} \left(\int_{-1}^1 \{\rho(t)\}^{-p'/p} dt \right)^{1/p'} \left(\int_{-1}^1 |f^{(r)}(t) - S_n^{\alpha,\beta}(f^{(r)}, t)| \rho(t) dt \right)^{1/p}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

С другой стороны,

$$\int_{-1}^1 \{\rho(t)\}^{-p'/p} dt = \int_{-1}^1 (1-t)^{-a/(p-1)} (1+t)^{-b/(p-1)} dt \leq c(a, b, p), \quad (4.9)$$

так как из условия (4.2) при $-1 < \alpha < 1/2$ следует, что

$$\frac{a}{p-1} < 1, \quad \frac{b}{p-1} < 1.$$

В самом деле, если $-1 < \alpha < -1/2$, то из (4.2) имеем

$$\frac{a+1}{p} - \frac{\alpha+1}{2} < \frac{\alpha+1}{2},$$

отсюда $a < p(\alpha+1) - 1 < p-1$; а если $-1/2 \leq \alpha \leq 1/2$, то

$$\frac{a+1}{p} - \frac{\alpha+1}{2} < \frac{1}{4}$$

и отсюда

$$a < \left(\frac{1}{4} + \frac{\alpha+1}{2} \right) p - 1 < p-1.$$

Таким образом, в обоих случаях $a/(p-1) < 1$. Совершенно аналогично $b/(p-1) < 1$. Далее, если соблюдены условия (4.2), то из упомянутой в п. 2 теоремы М следует, что

$$\|f^{(r)} - S_n^{\alpha,\beta}(f^{(r)})\|_{\mathcal{L}_p^p(-1,1)} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (4.10)$$

Обозначим через $J_n(x)$ частичную сумму ряда (3.5) вида

$$\begin{aligned} J_n(x) &= Q_{r-1}(f, x) + \frac{1}{(r-1)!} \sum_{k=0}^n f_{r,k}^{\alpha,\beta} \int_{-1}^x (x-t)^{r-1} P_k^{\alpha,\beta}(t) dt \\ &= Q_{r-1}(f, x) + \frac{1}{(r-1)!} \int_{-1}^x (x-t)^{r-1} \sum_{k=0}^n f_{r,k}^{\alpha,\beta} P_k^{\alpha,\beta}(t) dt \\ &= Q_{r-1}(f, x) + \frac{1}{(r-1)!} \int_{-1}^x (x-t)^{r-1} S_n^{\alpha,\beta}(f^{(r)}, t) dt. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Из (3.4), (4.11) и (4.8) имеем при $-1 \leq x \leq 1$

$$|f(x) - J_n(x)| \leq \frac{2^{r-1}}{(r-1)!} \left(\int_{-1}^1 \rho^{-p'/p}(t) dt \right)^{1/p} \|f^{(r)} - S_n^{\alpha,\beta}(f^{(r)})\|_{\mathcal{L}_{\rho(-1,1)}^p}. \quad (4.12)$$

Сопоставляя (4.9), (4.10) и (4.12), убеждаемся в том, что ряд, фигурирующий в правой части (3.5), равномерно сходится и сумма его равна $f(x) - Q_{r-1}(f, x)$ и, тем самым, имеет место и само равенство (3.5).

Вернемся теперь к смешанным рядам (3.13) и (3.23), остановившись для определенности на ряде (3.13). Сопоставляя (3.13) и (3.12), замечаем, что разность их k -х общих членов равна

$$r_k(x) = \frac{f_{r,k}^{\alpha,\beta} 2^r}{(k+\lambda)^{[r]}} \sum_{\nu=0}^{r-1} \frac{A_{\nu,k}}{\nu!} (1+x)^\nu, \quad k = 0, 1, \dots,$$

а поскольку числовой ряд (3.15) при выполнении условий теоремы 1, как было отмечено выше, абсолютно сходится, то ряд $\sum_{k=0}^{\infty} r_k(x)$ сходится равномерно на $[-1, 1]$. Но тогда ряд (3.13) сходится равномерно на $[-1, 1]$, как сумма двух равномерно сходящихся рядов. Совершенно аналогично доказывается, что смешанный ряд (3.23) также сходится равномерно на $[-1, 1]$ и имеет место само равенство (3.23). Теорема 1 полностью доказана.

5. Операторы $\mathcal{Y}_{n+2r}^{\alpha,\beta}(f)$. Пусть $-1 < \alpha, \beta < 1/2$, $a, b \in \mathbb{R}$ удовлетворяют условиям теоремы 1, $\rho(x) = (1-x)^a(1+x)^b$, $f \in W_{\mathcal{L}_\rho^p}^r(-1, 1)$. Тогда мы можем записать

$$f(x) = p^{\alpha,\beta}(f, x) + \mathcal{F}_r^{\alpha,\beta}(f, x) = p^{\alpha,\beta}(f, x) + \sum_{k=\bar{r}}^{\infty} \frac{2^r f_{r,k}^{\alpha,\beta}}{(k+\lambda)^{[r]}} P_{k+r}^{\alpha,\beta}(x), \quad (5.1)$$

где $\lambda = \alpha + \beta$,

$$\bar{r} = \begin{cases} r - \lambda, & \lambda \in \{-1, 0\}, \\ 0, & \lambda \notin \{-1, 0\}, \end{cases}$$

$p^{\alpha,\beta}(x)$ – некоторый алгебраический полином степени не выше, чем $2r$; более точно

$$p^{\alpha,\beta}(f, x) = \begin{cases} \overline{D}_{2r-1-\lambda}^{\alpha,\beta}(x), & \text{если } \lambda \in \{-1, 0\}, \\ D_{r-1}^{\alpha,\beta}(x), & \text{если } \lambda \notin \{-1, 0\} \end{cases}$$

(см. (3.14) и (3.22)). Причем ряд $\mathcal{F}_r^{\alpha,\beta}(f, x)$, фигурирующий в (5.1), сходится равномерно относительно $x \in [-1, 1]$ (теорема 1).

Через $\mathcal{Y}_{n+2r}^{\alpha,\beta}(f) = \mathcal{Y}_{n+2r}^{\alpha,\beta}(f, x)$ мы обозначим частичные суммы ряда (5.1) следующего вида:

$$\mathcal{Y}_{n+2r}^{\alpha,\beta}(f, x) = p^{\alpha,\beta}(x) + \sum_{k=\bar{r}}^{n+r} \frac{2^r f_{r,k}^{\alpha,\beta}}{(k+\lambda)^{[r]}} P_{k+r}^{\alpha-r, \beta-r}(x). \quad (5.2)$$

Это алгебраический полином степени $n+2r$. Мы заметим, что если $f \in W_{\mathcal{L}_\rho^p}^r(-1, 1)$, где p и $\rho(x)$ удовлетворяют условиям теоремы 1, то разность

$$R_{r,n}^{\alpha,\beta}(f, x) = f(x) - \mathcal{Y}_{n+2r}^{\alpha,\beta}(f, x),$$

как это вытекает из (5.1) и (5.2), можно представить следующим образом:

$$R_{r,n}^{\alpha,\beta}(f, x) = f(x) - \mathcal{Y}_{n+2r}^{\alpha,\beta}(f, x) = \sum_{k=n+r+1}^{\infty} \frac{2^r f_{r,k}^{\alpha,\beta}}{(k+\lambda)^{[r]}} P_{k+r}^{\alpha-r, \beta-r}(x). \quad (5.3)$$

Отсюда в силу (2.4) и очевидного равенства $f^{(r)}(x) = (f^{(\nu)}(x))^{(r-\nu)}$ следует, что

$$\begin{aligned} f^{(\nu)}(x) - \frac{d^\nu}{dx^\nu} \mathcal{Y}_{n+2r}^{\alpha,\beta}(f, x) &= f^{(\nu)}(x) - \mathcal{Y}_{n+\nu+2(r-\nu)}^{\alpha,\beta}(f^{(\nu)}, x) = R_{r-\nu, n+\nu}^{\alpha,\beta}(f^{(\nu)}, x) \\ &= \sum_{k=n+r+1}^{\infty} \frac{2^{r-\nu} f_{r,k}^{\alpha,\beta}}{(k+\lambda)^{[r-\nu]}} P_{k+r-\nu}^{\alpha-r+\nu, \beta-r+\nu}(x). \end{aligned} \quad (5.4)$$

Это свойство в сочетании с весовой оценкой (2.9) для полиномов Якоби $P_n^{a,b}(x)$ с произвольными $a, b \in \mathbb{R}$ (в том числе для $a, b < -1$) показывает, что операторы $\mathcal{Y}_{n+2r}^{\alpha,\beta}(f) = \mathcal{Y}_{n+2r}^{\alpha,\beta}(f, x)$ успешно могут быть использованы для решения задачи об одновременном приближении дифференцируемой функции $f(x)$ и нескольких ее производных $f^{(\nu)}$, в то время как суммы Фурье–Якоби для этой цели не подходят. Подробное доказательство этого утверждения для различных классов гладких и аналитических функций в случае $\alpha = \beta$ (случай ультрасферических полиномов) было дано в работе [2]. Ниже нам понадобится следующее свойство операторов $\mathcal{Y}_{n+r}^{\alpha}(f, x) = \mathcal{Y}_{n+2r}^{\alpha,\alpha}(f, x)$, установленное в [2]. Пусть $r \geq 1$, $\alpha, \beta > -1$, $\rho = \rho(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$, $f \in W_{\mathcal{L}_\rho^2}^r(-1, 1)$,

$$f_k^{\alpha,\beta} = \frac{1}{h_k^{\alpha,\beta}} \int_{-1}^1 f(t) P_k^{\alpha,\beta}(t) \rho(t) dt, \quad f_k^\alpha = f_k^{\alpha,\alpha}, \quad k = 0, 1, \dots,$$

– коэффициенты Фурье–Якоби функции f ,

$$S_n^{\alpha,\beta}(f, x) = \sum_{k=0}^n f_k^{\alpha,\beta} P_k^{\alpha,\beta}(x) \quad (5.5)$$

– частичная сумма Фурье–Якоби для f . Тогда для $S_n^\alpha(f, x) = S_n^{\alpha,\alpha}(f, x)$ при $\alpha \leq 1/2$ имеет место следующее равенство:

$$\mathcal{Y}_{n+2r}^\alpha(f, x) = S_n^\alpha(f, x) + \Psi_{r,n}^\alpha(f, x), \quad (5.6)$$

где

$$\Psi_{r,n}^\alpha(f, x) = \sum_{k=n-r+1}^{n+r} \frac{2^r f_{r,k}^\alpha}{(k+2\alpha)^{[r]}} \sum_{j=0}^{[(k+r-n-1)/2]} \lambda_j^\alpha P_{k+r-2j}^{\alpha,\alpha}(x), \quad (5.7)$$

$$\lambda_j^\alpha = \lambda_j^\alpha(r, k) = \frac{(-1)^j (k-r+2\alpha+1)_{k+r-2j} (1/2)_j r^{[j]} (\alpha+k)^{[j]}}{(k+r-2j+2\alpha+1)_{k+r-2j} (k+r-2j+\alpha+3/2)_j (2j)!}, \quad (5.8)$$

$[a]$ – целая часть числа a . С другой стороны, если $f(x) \in W_{\mathcal{L}_\rho^1}^r$, то, очевидно, найдется такая последовательность $\{g_m(x)\} \subset W_{\mathcal{L}_\rho^2}^r$, что при $m \rightarrow \infty$

$$(g_m)_{r,k}^\alpha \rightarrow f_{r,k}^\alpha, \quad (g_m)_k^\alpha \rightarrow f_k^\alpha, \quad 0 \leq k \leq n+r.$$

Поэтому равенство (5.6) справедливо для произвольной функции $f \in W_{\mathcal{L}_\rho^1}^r(-1, 1)$.

6. Операторы $\mathcal{Y}_{n+2r}(f) = \mathcal{Y}_{n+2r}^{-1/2}(f)$. В случае $\alpha = -1/2$ равенство (5.6) приобретает следующий вид:

$$\mathcal{Y}_{n+2r}(f, x) = \mathcal{Y}_{n+2r}^{-1/2}(f, x) = S_n^{-1/2}(f, x) + \Psi_{r,n}^{-1/2}(f, x), \quad (6.1)$$

а числа $\lambda_j^{-1/2}$, фигурирующие в равенстве (5.6) и (5.7), принимают вид

$$\begin{aligned} \lambda_j^{-1/2} &= \frac{(-1)^j (k-r)_{k-r+2j} (1/2)_j r^{[j]} (k-1/2)^{[j]}}{(k+r-2j)_{k+r-2j} (k+r-2j+1)_j (2j)!} \\ &= (-1)^j \frac{((k+r-2j)!)^2 2^{2k+2r-4j}}{(2(k+r-2j))!} \frac{(2k)!}{(k!)^2 2^{2k+2r}} \frac{r^{[j]}}{j!} \frac{k^{[r+1]}}{(k+r-j)^{[r+1]}}. \end{aligned} \quad (6.2)$$

С другой стороны, в силу (2.2) имеем

$$P_{k+r-2j}^{-1/2, -1/2}(x) = \frac{(2(k+r-2j))!}{(2^{k+r-2j} (k+r-2j)!)^2} T_{k+r-2j}(x). \quad (6.3)$$

Сопоставляя (6.2) и (6.3), имеем

$$\lambda_j^{-1/2} P_{k+r-2j}^{-1/2, -1/2}(x) = (-1)^j \frac{(2k)!}{(k!)^2 2^{2k+2r}} \frac{r^{[j]}}{j!} \frac{k^{[r+1]}}{(k+r-j)^{[r+1]}} T_{k+r-2j}(x). \quad (6.4)$$

Далее, пусть

$$a_0(g) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{g(t) dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad a_k(g) = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{g(t) T_k(t) dt}{\sqrt{1-t^2}}. \quad (6.5)$$

Тогда, поскольку в силу (2.3)

$$h_0^{-1/2, -1/2} = \pi, \quad h_k^{-1/2, -1/2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\Gamma(k+1/2)}{\Gamma(k+1)} \right)^2 = \frac{\pi}{2} \left(\frac{(2k)!}{(2^k k!)^2} \right)^2, \quad k \geq 1, \quad (6.6)$$

из (3.2) и (6.5) находим

$$f_{r,k}^{-1/2, -1/2} = \frac{(2^k k!)^2}{(2k)!} a_k(f^{(r)}), \quad k \geq 1. \quad (6.7)$$

Теперь из (5.7), (6.4) и (6.7) получаем

$$\Psi_{r,n}^{-1/2}(f, x) = \sum_{k=n-r+1}^{n+r} a_k(f^{(r)}) \sum_{j=0}^{[(k+r-n-1)/2]} (-1)^j \binom{r}{j} \frac{k T_{k+r-2j}(x)}{2^r (k+r-j)^{[r+1]}}. \quad (6.8)$$

Частичные суммы $S_n^{-1/2}(f, x)$ и $\mathcal{Y}_{n+2r}^{-1/2}(f, x)$ в силу (5.5), (5.6), (2.2), (6.5), (6.6) и (6.1) принимают следующий вид:

$$S_n^{-1/2}(f, x) = \sum_{k=0}^n a_k(f) T_k(x), \quad (6.9)$$

$$\mathcal{Y}_{n+2r}^{-1/2}(f, x) = \sum_{k=0}^n a_k(f) T_k(x) + \Psi_{r,n}^{-1/2}(f, x). \quad (6.10)$$

7. Дискретизация операторов $\mathcal{Y}_{n+2r}^{-1/2}(f)$. Мы остановимся более подробно на операторе $\mathcal{Y}_{n+2r}^{-1/2}(f) = \mathcal{Y}_{n+2r}^{-1/2}(f, x)$, представляющем собой частичную сумму смешанного ряда по полиномам Чебышева $T_n(x)$, определяемого равенствами (6.8)–(6.10). С целью упрощения записи выражения (6.8) введем обозначение

$$V_k(x) = V_{r,n,k}(x) = \sum_{j=0}^{[(k+r-n-1)/2]} (-1)^j \binom{r}{j} \frac{k T_{k+r-2j}(x)}{2^r (k+r-j)^{[r+1]}}. \quad (7.1)$$

Тогда (6.8) принимает вид

$$\Psi_{r,n}^{-1/2}(f, x) = \sum_{k=n-r+1}^{n+r} a_k(f^{(r)}) V_k(x) \quad (7.2)$$

и, соответственно, (6.10) перепишем так:

$$\mathcal{Y}_{n+2r}^{-1/2}(f, x) = \sum_{k=0}^n a_k(f) T_k(x) + \sum_{k=n-r+1}^{n+r} a_k(f^{(r)}) V_k(x). \quad (7.3)$$

Дискретизацией оператора $\mathcal{Y}_{n+2r}^{-1/2}(f) = \mathcal{Y}_{n+2r}^{-1/2}(f, x)$ будем называть оператор

$$\mathcal{Y}_{n+2r,N}(f, x) = \sum_{k=0}^n a_{k,N}(f) T_k(x) + \sum_{k=n-r+1}^{n+r} a_{k,N}(f^{(r)}) V_k(x), \quad (7.4)$$

в котором

$$\begin{aligned} a_{0,N}(f) &= \frac{1}{2N} \sum_{j=0}^{2N-1} f\left(\cos \frac{\pi j}{N}\right), \\ a_{k,N}(f) &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{2N-1} f\left(\cos \frac{\pi j}{N}\right) T_k\left(\cos \frac{\pi j}{N}\right) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{2N-1} f\left(\cos \frac{\pi j}{N}\right) \cos \frac{\pi k j}{N}, \quad N - k \geq 1, \\ a_{N,N}(f) &= \frac{1}{2N} \sum_{j=0}^{2N-1} f\left(\cos \frac{\pi j}{N}\right) T_N\left(\cos \frac{\pi j}{N}\right) = \frac{1}{2N} \sum_{j=0}^{2N-1} f\left(\cos \frac{\pi j}{N}\right) \cos(\pi j), \end{aligned} \quad (7.5)$$

$$\begin{aligned}
a_{0,N}(f^{(r)}) &= \frac{1}{2N} \sum_{j=0}^{2N-1} f^{(r)}\left(\cos \frac{\pi j}{N}\right), \\
a_{k,N}(f^{(r)}) &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{2N-1} f^{(r)}\left(\cos \frac{\pi j}{N}\right) T_k\left(\cos \frac{\pi j}{N}\right) \\
&= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{2N-1} f^{(r)}\left(\cos \frac{\pi j}{N}\right) \cos \frac{\pi k j}{N}, \quad N - k \geq 1, \\
a_{N,N}(f^{(r)}) &= \frac{1}{2N} \sum_{j=0}^{2N-1} f^{(r)}\left(\cos \frac{\pi j}{N}\right) T_N\left(\cos \frac{\pi j}{N}\right) = \frac{1}{2N} \sum_{j=0}^{2N-1} f^{(r)}\left(\cos \frac{\pi j}{N}\right) \cos(\pi j).
\end{aligned} \tag{7.6}$$

Заметим, что

$$\cos \frac{\pi j}{N} = \cos \frac{\pi(2N-j)}{N}, \quad 0 \leq j \leq N,$$

поэтому для вычисления коэффициентов $a_{k,N}(f)$ и $a_{k,N}(f^{(r)})$ по формулам (7.5), (7.6) нам достаточно задать значения

$$f\left(\cos \frac{\pi j}{N}\right), \quad f^{(r)}\left(\cos \frac{\pi j}{N}\right), \quad j = 0, \dots, N. \tag{7.7}$$

Положим

$$S_{n,N}(f) = S_{n,N}(f, x) = \sum_{k=0}^n a_{k,N} T_n(x), \tag{7.8}$$

$$\Psi_{r,n,N}(f, x) = \sum_{k=n-r+1}^{n+r} a_{k,N}(f^{(r)}) V_k(x), \quad r-1 \leq n. \tag{7.9}$$

Тогда равенство (7.4) приобретает следующий вид:

$$\mathcal{Y}_{n+2r,N}(f, x) = S_{n,N}(f, x) + \Psi_{r,n,N}(f, x). \tag{7.10}$$

Рассмотрим некоторые свойства операторов $S_{n,N}(f) = S_{n,N}(f, x)$ и $\mathcal{Y}_{n+2r,N}(f) = \mathcal{Y}_{n+2r,N}(f, x)$. Будем рассматривать $S_{n,N}$ как линейный оператор, действующий в пространстве $C[-1, 1]: f \rightarrow S_{n,N}(f)$. Пусть $t_j^N = \cos(\pi j/N)$, $0 \leq j \leq N$, $\Omega_N = \{t_j^N\}_{j=0}^N$, l_2^{N+1} – пространство дискретных функций $f: \Omega_N \rightarrow \mathbb{R}$, в котором определено скалярное произведение

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2N} \sum_{j=0}^{2N-1} f(t_j^N) g(t_j^N) = \frac{1}{2N} \sum_{j=0}^{2N-1} f\left(\cos \frac{\pi j}{N}\right) g\left(\cos \frac{\pi j}{N}\right), \tag{7.11}$$

где $t_{2N-j}^N = t_j^N$, $1 \leq j \leq N$; в частности,

$$-1 = t_N^N < t_{N-1}^N < \dots < t_1^N < t_0^N = 1.$$

Нетрудно проверить, что для $0 \leq k, n \leq N$ имеет место следующее свойство ортогональности:

$$\langle T_k, T_n \rangle = \begin{cases} 0, & n \neq k, \\ 1, & n = k = 0, \quad n = k = N, \\ \frac{1}{2}, & 0 < n = k < N. \end{cases}$$

Это означает, что полиномы $T_0(x), \sqrt{2}T_1(x), \dots, \sqrt{2}T_{N-1}(x), T_N(x)$ образуют полную ортонормированную систему в l_2^{N+1} . Следовательно, в силу (7.5), (7.11) и (7.8)

$$\begin{aligned} f(x) &= \langle T_0, f \rangle T_0(x) + 2\langle T_1, f \rangle T_1(x) + \dots + 2\langle T_{N-1}, f \rangle T_{N-1}(x) + \langle T_N, f \rangle T_N(x) \\ &= \sum_{k=0}^N a_{k,N} T_k(x) = S_{N,N}(f, x), \quad x \in \Omega_N. \end{aligned} \quad (7.12)$$

Другими словами, $S_{N,N}(f, x)$ представляет собой интерполяционный полином степени N , интерполирующий функцию $f(x)$ в узлах сетки $\Omega_N = \{t_j^N\}$, $S_{n,N}(f, x)$ – частичная сумма порядка n конечного ряда Фурье (7.12) и как таковая является алгебраическим полиномом наилучшего среднеквадратического приближения на Ω_N :

$$\sum_{j=0}^{2N-1} [f(t_j^N) - S_{n,N}(t_j^N)]^2 = \inf_{p_n} \sum_{j=0}^{2N-1} [f(t_j^N) - p_n(t_j^N)]^2, \quad (7.13)$$

где нижняя граница берется по всем алгебраическим полиномам p_n степени $n \leq N$. Ввиду того, что $t_{2N-j}^N = t_j^N$, свойство (7.13) означает, что минимум выражения

$$(f(1) - p_n(1))^2 + (f(-1) - p_n(-1))^2 + 2 \sum_{j=1}^{N-1} (f(t_j^N) - p_n(t_j^N))^2$$

среди всех алгебраических полиномов $p_n(x)$ степени $n \leq N$ достигается при $p_n(x) = S_{n,N}(f, x)$.

Рассмотрим дальнейшие свойства оператора $S_{n,N}(f, x)$. С этой целью введем в рассмотрение пространство $C_{2\pi}$, состоящее из 2π -периодических непрерывных функций $F(\theta)$. Пусть $F \in C_{2\pi}$,

$$\gamma_\nu = \gamma_\nu(F) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\varphi) e^{-i\nu\varphi} d\varphi, \quad \nu \in \mathbb{Z}, \quad (7.14)$$

– коэффициенты Фурье функции $F(\theta)$,

$$c_\nu^N(F) = \frac{1}{2N} \sum_{j=0}^{2N-1} F(\tau_j) e^{-i\nu\tau_j}, \quad -N+1 \leq \nu \leq N, \quad (7.15)$$

– дискретные коэффициенты Фурье функции F , где

$$\tau_j = \tau_j^N = \frac{2\pi j}{2N}, \quad j \in \mathbb{Z}. \quad (7.16)$$

Если при $\theta = \tau_j$, $j \in \mathbb{Z}$, имеет место разложение

$$F(\theta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \gamma_k e^{ik\theta}, \quad (7.17)$$

то, как показано в [20; гл. 10], справедливо равенство

$$c_\nu^N(F) = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \gamma_{\nu+2\mu N}, \quad -N+1 \leq \nu \leq N. \quad (7.18)$$

Заметим, что если $F(\theta)$ – четная действительная функция, то из (7.14), (7.15) имеем

$$\gamma_\nu(F) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\gamma) \cos \nu \varphi d\varphi, \quad (7.19)$$

$$c_\nu^N = \frac{1}{2N} \sum_{j=0}^{N-1} F(\tau_j) \cos \nu \tau_j, \quad 0 \leq \nu \leq N, \quad (7.20)$$

а ряд (7.17) принимает вид (так как $\gamma_{-k} = \bar{\gamma}_k$)

$$F(\theta) = \gamma_0(F) + 2 \sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_\nu(F) \cos \nu \theta. \quad (7.21)$$

Для функции $F(\theta) = f(\cos \theta)$, сопоставляя (6.5) с (7.19), а (7.5) с (7.20), находим

$$a_0(f) = \gamma_0(F), \quad a_\nu(f) = 2\gamma_\nu(F), \quad \nu = 1, 2, \dots, \quad (7.22)$$

$$a_{N,N}(f) = c_N^N(F), \quad a_{0,N}(f) = c_0^N(F), \quad a_{\nu,N}(f) = 2c_\nu^N(F), \quad 1 \leq \nu \leq N-1. \quad (7.23)$$

Из (7.18) и (7.23) имеем

$$\begin{aligned} a_{0,N}(f) &= \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \gamma_{2\mu N}(F), & a_{N,N}(f) &= \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \gamma_{N(2\mu+1)}(F), \\ a_{\nu,N}(f) &= 2 \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \gamma_{\nu+2\mu N}(F), & 1 \leq \nu \leq N-1. \end{aligned} \quad (7.24)$$

Из (7.22) и (7.24), в свою очередь, получаем

$$\begin{aligned} a_{0,N}(f) &= a_0(f) + \sum_{\mu=1}^{\infty} a_{2\mu N}(f), & a_{N,N}(f) &= a_N(f) + \sum_{\mu=1}^{\infty} a_{(2\mu+1)N}(f), \\ a_{\nu,N}(f) &= a_\nu(f) + \sum_{\mu=1}^{\infty} [a_{2\mu N-\nu}(f) + a_{2\mu N+\nu}(f)], & 1 \leq \nu \leq N-1. \end{aligned} \quad (7.25)$$

Если в (7.25) заменить $f(x)$ функцией $f^{(r)}(x)$, то получим

$$\begin{aligned} a_{0,N}(f^{(r)}) &= a_0(f^{(r)}) + \sum_{\mu=1}^{\infty} a_{2\mu N}(f^{(r)}), & a_{N,N}(f^{(r)}) &= a_N(f^{(r)}) + \sum_{\mu=1}^{\infty} a_{(2\mu+1)N}(f^{(r)}), \\ a_{\nu,N}(f^{(r)}) &= a_\nu(f^{(r)}) + \sum_{\mu=1}^{\infty} [a_{2\mu N-\nu}(f^{(r)}) + a_{2\mu N+\nu}(f^{(r)})], & 1 \leq \nu \leq N-1. \end{aligned} \quad (7.26)$$

Положим

$$\begin{aligned} b_0^N(g) &= \sum_{\mu=1}^{\infty} a_{2\mu N}(g), & b_N^N(g) &= \sum_{\mu=1}^{\infty} a_{(2\mu+1)N}(g) \\ b_\nu^N(g) &= \sum_{\mu=1}^{\infty} [a_{2\mu N-\nu}(g) + a_{2\mu N+\nu}(g)], & 1 \leq \nu \leq N-1. \end{aligned} \quad (7.27)$$

Тогда с учетом (7.3), (7.8) и (7.9) формула (7.10) может быть представлена так:

$$\mathcal{Y}_{n+2r,N}(f, x) = \mathcal{Y}_{n+2r}^{-1/2}(f, x) + \mathcal{X}_{r,n,N}(f, x), \quad (7.28)$$

где

$$\mathcal{X}_{r,n,N}(f, x) = \sum_{k=0}^n b_k^N(f) T_k(x) + \sum_{k=n-r+1}^{n+r} b_k^N(f^{(r)}) V_k(x). \quad (7.29)$$

Равенство (7.28) сводит задачу об аппроксимативных свойствах $\mathcal{Y}_{n+2r,N}(f)$ к аналогичной задаче для операторов $\mathcal{Y}_{n+2r}^{-1/2}(f)$ и к задаче об оценке выражения $\mathcal{X}_{r,n,N}(f, x)$. Но поскольку первая из этих задач подробно рассмотрена в работе [2], здесь мы сосредоточим свое внимание на второй из указанных задач, ограничившись к тому же рассмотрением случая аналитической функции f .

8. Аппроксимативные свойства операторов $\mathcal{Y}_{n+2r,N}(f)$ на классах $A_q(B)$.

Пусть $0 < q < 1$, $\mathcal{E}_q$ – эллипс с фокусами в точках -1 и 1 , сумма полуосей которого равна $1/q$. Через $A_q(B)$ обозначим класс функций $g = g(z)$, принимающих действительные значения на $[-1, 1]$, аналитических внутри эллипса $\mathcal{E}_q$ и ограниченных там по модулю числом B . Хорошо известно [9; п. 3.7.3], что если $g \in A_q(B)$, то для коэффициентов Фурье–Чебышева $a_k(g)$ этой функции имеет место оценка

$$|a_k(g)| < \sqrt{2\pi} B q^k. \quad (8.1)$$

ЛЕММА 8.1. Пусть $r \geq 2$, $0 < q < 1$, $f^{(r-1)} \in A_q(B)$. Тогда функция $f(z)$ представима в виде

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{r-2} \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!} z^\nu + g(z), \quad (8.2)$$

где

$$g(z) \in A_q\left(\frac{q^{1-r}}{(r-1)!} B\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользовавшись формулой Тейлора, запишем при $z \in \mathcal{E}_q$

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{r-2} \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!} z^\nu + g(z),$$

где

$$g(z) = \frac{1}{(r-2)!} \int_0^z (z-\xi)^{r-2} f^{(r-1)}(\xi) d\xi.$$

Поскольку $f^{(r-1)} \in A_q(B)$, для $z \in \mathcal{E}_q$ отсюда имеем

$$|g(z)| \leq \frac{1}{(r-2)!} \int_0^1 |z|^{r-1} (1-t)^{r-2} |f^{(r-1)}(tz)| dt \leq \frac{q^{1-r}}{(r-1)!} B.$$

Лемма 8.1 доказана.

ЛЕММА 8.2. Пусть $f \in A_q(B)$. Тогда

$$a_k(f') = 2 \sum_{j=0}^{\infty} (k+2j+1) a_{k+2j+1}(f).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В работе [2] доказано (лемма 6.2), что

$$f_{1,k}^{-1/2,-1/2} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \sum_{j=0}^{\infty} a_{k+2j+1}(f) \frac{(k+2j+1)\Gamma(2k+2j+2)(1/2)_j(1)_j}{(k)_k(3/2)_k(k+3/2)_j(k+1)_j(2j)!}.$$

Сопоставляя это равенство с (6.7), приходим к утверждению леммы 8.2. (Утверждение леммы 8.2 другим способом доказано в [16; с. 127]).

ЛЕММА 8.3. Пусть $f^{(r-1)} \in A_q(B)$. Тогда

$$|a_k(f)| \leq \frac{\sqrt{2\pi}B}{(r-1)!} q^{k+1-r}, \quad k \geq r-1, \quad (8.3)$$

$$|a_k(f^{(r)})| \leq \frac{2\sqrt{2\pi}B}{1-q^2} \left(k+1 + \frac{2q^2}{1-q^2}\right) q^{k+1}, \quad k \geq 0. \quad (8.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $f^{(r-1)} \in A_q(B)$, то в силу леммы 8.1 имеем $f(z) = p_{r-2}(z) + g(z)$, где $p_{r-2}(z)$ – алгебраический полином степени не выше $r-2$, $g \in A_q(q^{1-r}B/(r-1)!)$, поэтому, если $k \geq r-1$, то $a_k(f) = a_k(g)$, причем ввиду (8.1)

$$|a_k(g)| \leq \sqrt{2\pi} \frac{q^{1-r}}{(r-1)!} B q^k, \quad k \geq 0.$$

Тем самым, оценка (8.3) доказана. Чтобы доказать (8.4) обратимся к лемме 8.2. Тогда в силу (8.1) имеем

$$\begin{aligned} |a_k(f^{(r)})| &\leq 2 \sum_{j=0}^{\infty} (k+2j+1) |a_{k+2j+1}(f^{(r-1)})| \\ &\leq 2 \sum_{j=0}^{\infty} (k+2j+1) \sqrt{2\pi} B q^{k+2j+1} = 2\sqrt{2\pi} B q^{k+1} \sum_{j=0}^{\infty} (k+2j+1) q^{2j}. \end{aligned} \quad (8.5)$$

Далее,

$$\sum_{j=0}^{\infty} (k+2j+1) q^{2j} = (k+1) \sum_{j=0}^{\infty} q^{2j} + 2 \sum_{j=1}^{\infty} j q^{2j} = \frac{k+1}{1-q^2} + \frac{2q^2}{(1-q^2)^2}. \quad (8.6)$$

Сопоставляя (8.5) и (8.6), приходим к оценке (8.4). Лемма 8.3 доказана.

ЛЕММА 8.4. Пусть $f^{(r-1)} \in A_q(B)$. Тогда справедливы следующие оценки при $N \geq r - 1$:

$$\begin{aligned}
 |b_0^N(f)| &\leq \frac{\sqrt{2\pi} B}{(r-1)!} \frac{q^{2N+1-r}}{1-q^{2N}}, \\
 |b_\nu^N(f)| &\leq \frac{\sqrt{2\pi} B}{(r-1)!} \frac{1+q^{2\nu}}{1-q^{2N}} q^{2N+1-r-\nu}, \quad 1 \leq \nu \leq N-1, \\
 |b_N^N(f)| &\leq \frac{\sqrt{2\pi} B}{(r-1)!} \frac{q^{3N+1-r}}{1-q^{2N}}, \\
 |b_0^N(f^{(r)})| &\leq \frac{2\sqrt{2\pi} B}{1-q^2} \left[\frac{2}{1-q^2} + \frac{2N+1-q^{2N}}{(1-q^{2N})^2} \right] q^{2N+1}, \\
 |b_\nu^N(f^{(r)})| &\leq \frac{2\sqrt{2\pi} B q^{2N+1-\nu}}{(1-q^2)(1-q^{2N})} \\
 &\quad \times \left[\frac{2q^2(1+q^{2\nu})}{1-q^2} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2N-\nu+1+(\nu-1)q^{2N}+q^{2\nu}(2N+\nu+1-(\nu+1)q^{2N})}{1-q^{2N}} \right], \\
 |b_N^N(f^{(r)})| &\leq \frac{2\sqrt{2\pi} B q^{3N+1}}{(1-q^2)(1-q^{2N})} \left[\frac{2}{1-q^2} + \frac{3N+1-(N+1)q^{2N}}{1-q^{2N}} \right].
 \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем, например, второе утверждение. Будем исходить из (7.27) и леммы 8.3. Тогда из (8.3) имеем

$$\begin{aligned}
 |b_\nu^N(f)| &\leq \sum_{\mu=0}^{\infty} (|a_{2\mu N-\nu}(f)| + |a_{2\mu N+\nu}|) \leq \frac{\sqrt{2\pi} B q^{1-r}}{(r-1)!} \sum_{\mu=1}^{\infty} (q^{2\mu N-\nu} + q^{2\mu N+\nu}) \\
 &= \frac{\sqrt{2\pi} B q^{1-r}}{(r-1)!} \frac{q^{2N-\nu} + q^{2N+\nu}}{1-q^{2N}} = \frac{\sqrt{2\pi} B q^{2N-\nu+1-r}(1+q^{2\nu})}{(r-1)!(1-q^{2N})}
 \end{aligned}$$

и, тем самым, второе утверждение леммы 8.4 доказано. Остальные утверждения леммы доказываются аналогично.

ЛЕММА 8.5. Если $0 \leq l \leq k$, то имеет место оценка

$$|T_k^{(l)}(x)| \leq c(l)(k+1)^l \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{k+1} \right)^{-l}, \quad -1 \leq x \leq 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этой леммы непосредственно вытекает из равенства (2.2) и весовой оценки (2.9).

ЛЕММА 8.6. Пусть $r \geq 1$, $0 \leq l \leq r-1$, $0 < q < 1$, $n \leq N$, $f^{(r-1)} \in A_q(B)$. Тогда имеет место оценка при $-1 \leq x \leq 1$

$$\left| \sum_{k=0}^n b_k^N(f) T_k^{(l)}(x) \right| \leq c(r, l, q) B n^l q^{2N-n} \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n+1} \right)^{-l}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся леммами 8.4 и 8.5. Тогда

$$\begin{aligned}
 \left| \sum_{k=0}^n b_k^N T_k^{(l)}(x) \right| &\leq c(r, l, q) B q^{2N-n} \sum_{k=l}^n q^{n-k} k^l \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{k+1} \right)^{-l} \\
 &\leq c(r, l, q) B q^{2N-n} \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n+1} \right)^{-l} \sum_{k=l}^n k^l q^{n-k} \\
 &\leq c(r, l, q) B q^{2N-n} \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n+1} \right)^{-l} n^l \sum_{k=0}^n q^{n-k} \\
 &\leq c(r, l, q) B n^l q^{2N-n} \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n+1} \right)^{-l}.
 \end{aligned}$$

ЛЕММА 8.7. Пусть $n - r \leq k \leq n + r$ и выражение $V_k(f, x)$ определено равенством (7.1). Тогда справедлива оценка

$$|V_k^{(l)}(x)| \leq \frac{c(r, l)}{k^{r-l}} \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{k+1} \right)^{-l}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этой леммы непосредственно вытекает из леммы 8.5 и равенства (7.1).

ЛЕММА 8.8. Пусть $r \geq 1$, $0 \leq l \leq r - 1$, $0 < q < 1$, $f^{(r-1)} \in A_q(B)$. Тогда при $n \leq N$ имеет место оценка

$$\left| \sum_{k=n-r+1}^{n+r} b_k^N(f^{(r)}) V_k^{(l)}(x) \right| \leq c(r, q) B \frac{N q^{2N-n}}{n^{r-l}} \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n+1} \right)^{-l}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этой леммы немедленно следует из лемм 8.7 и 8.4.

Из лемм 8.6 и 8.8 непосредственно вытекает

ЛЕММА 8.9. Пусть $r \geq 1$, $0 \leq l \leq r - 1$, $0 < q < 1$, $2r \leq n \leq N$, $f^{(r-1)} \in A_q(B)$, $\mathcal{X}_{r,n,N}(f, x)$ определено равенством (7.29). Тогда при $-1 \leq x \leq 1$

$$|\mathcal{X}_{r,n,N}^{(l)}(f, x)| \leq c(r, q) B \left(n^l + \frac{N}{n^{r-l}} \right) q^{2N-n} \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n+1} \right)^{-l}.$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $r \geq 1$, $0 \leq l \leq r - 1$, $0 < q < 1$, $2r \leq n \leq N$, $f^{(r-1)} \in A_q(B)$. Тогда при $-1 \leq x \leq 1$ имеет место оценка

$$\begin{aligned}
 &\left| f^{(l)}(x) - \frac{d^l}{dx^l} \mathcal{Y}_{n+2r,N}(f, x) \right| \\
 &\leq c(r, q) B \left[\frac{q^n}{n^{r-l-1}} \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n} \right)^{r-l} + \left(n^l + \frac{N}{n^{r-l}} \right) \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n} \right)^{-l} q^{2N-n} \right].
 \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В работе [2] доказано, что если $f^{(r-1)} \in A_q(B)$, то

$$\left| f^{(l)}(x) - \frac{d^l}{dx^l} \mathcal{Y}_{n+2r}^{-1/2}(f, x) \right| \leq c(r, q) B \frac{q^n}{n^{r-l-1}} \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n} \right)^{r-l}. \quad (8.7)$$

С другой стороны, из равенства (7.28) имеем

$$\left| f^{(l)}(x) - \frac{d^l}{dx^l} \mathcal{Y}_{n+2r,N}(f, x) \right| \leq \left| f^{(l)}(x) - \frac{d^l}{dx^l} \mathcal{Y}_{n+2r}^{-1/2}(f, x) \right| + |\mathcal{X}_{r,n,N}^{(l)}(f, x)|.$$

Сопоставляя это неравенство с оценкой (8.7) и леммой 8.9, убеждаемся в справедливости утверждения теоремы 2.

9. Об одном методе численной реализации операторов $\mathcal{Y}_{n+2r,N}(f)$. Мы будем исходить из того, что нам заданы значения

$$f\left(\cos \frac{\pi j}{N}\right), \quad j = 0, 1, \dots, N. \quad (9.1)$$

Тогда коэффициенты $a_{k,N}(f)$, определяемые формулами (7.5), могут быть успешно реализованы численно путем быстрого дискретного преобразования Фурье. Но для полной численной реализации оператора $\mathcal{Y}_{n+2r,N}$, определенного равенством (7.4), требуется еще знание численных значений коэффициентов $a_{k,N}(f^{(r)})$, $n - r + 1 \leq k \leq k + r$, заданных равенствами (7.6). Мы здесь рассмотрим один метод, позволяющий приближенно найти эти значения, исходя из дискретной информации (9.1) и получим некоторые оценки погрешности этого метода. Собственно говоря, речь идет о равенстве (7.12), которое справедливо при $x \in \Omega_N = \{\cos(\pi j/N)\}_{j=0}^N$. Дифференцируя обе части этого равенства r раз, мы получим приближенные значения

$$f^{(r)}(t_j^N) \approx S_{N,N}^{(r)}(f, t_j), \quad 0 \leq j \leq N. \quad (9.2)$$

Теперь для численной реализации коэффициентов $a_{k,N}(f^{(r)})$ снова можно использовать быстрое преобразование Фурье. Но одновременно возникает задача об оценке погрешностей, проистекающих в результате замены $f^{(r)}(t_j^N)$ их приближенными значениями $S_{N,N}^{(r)}(f, t_j^N)$, $j = 0, \dots, N$.

Пусть $f^{(r-1)} \in A_q(B)$. Тогда

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(f) T_k(x) = S_N(f, x) + \sum_{k=N+1}^{\infty} a_k(f) T_k(x). \quad (9.3)$$

С другой стороны, в силу (7.8)

$$S_{N,N}(f, x) = S_N(f, x) + \sum_{k=0}^N b_k^N(f) T_k(x). \quad (9.4)$$

Сопоставляя (9.3) и (9.4), имеем

$$f(x) - S_{N,N}(f, x) = \sum_{k=N+1}^{\infty} a_k(f) T_k(f) - \sum_{k=0}^N b_k^N(f) T_k(x). \quad (9.5)$$

Отсюда

$$f^{(r)}(x) - S_{N,N}^{(r)}(f, x) = \sum_{k=N+1}^{\infty} a_k(f) T_k^{(r)} - \sum_{k=0}^N b_k^N(f) T_k^{(r)}(x) = R_1(x) + R_2(x). \quad (9.6)$$

Оценим $R_1(x)$ при $-1 \leq x \leq 1$. В силу (8.3) и леммы 8.5 имеем

$$\begin{aligned}
 |R_1(x)| &\leq \sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k(f)| |T_k^{(r)}(x)| \\
 &\leq c(r) \frac{\sqrt{2\pi}B}{(r-1)!} \sum_{k=N+1}^{\infty} q^{k+1-r} (k+1)^r \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{k+1} \right)^{-r} \\
 &\leq c(r) B q^{N+2-r} \sum_{k=N+1}^{\infty} q^{k-N-1} \left(\frac{(k+1)^2}{(k+1)\sqrt{1-x^2}+1} \right)^r \\
 &\leq c(r, q) B q^N \left(\frac{N^2}{N\sqrt{1-x^2}+1} \right)^r.
 \end{aligned} \tag{9.7}$$

Чтобы оценить $|R_2(x)|$ обратимся к леммам 8.4 и 8.5. Тогда

$$\begin{aligned}
 |R_2(x)| &\leq c(r, q) B \sum_{k=0}^N q^{2N-k} \left(\frac{(k+1)^2}{(k+1)\sqrt{1-x^2}+1} \right)^r \\
 &\leq c(r, q) B q^N \left(\frac{(N+1)^2}{(N+1)\sqrt{1-x^2}+1} \right)^r.
 \end{aligned} \tag{9.8}$$

Сопоставляя (9.6) и (9.8), имеем при $f \in A_q(B)$, $-1 \leq x \leq 1$

$$|f^{(r)} - S_{N,N}^{(r)}(f, x)| \leq c(r, q) B q^N \left(\frac{N^2}{N\sqrt{1-x^2}+1} \right)^r. \tag{9.9}$$

Это и есть искомая оценка погрешности, возникающей в результате замены $f^{(r)}(t_j^N)$ их приближенными значениями $S_{N,N}^{(r)}(f, t_j^N)$, $j = 0, \dots, N$. Как следствие этой оценки мы можем получить оценку ошибки, возникающей в результате замены в выражениях (7.6) производных $f^{(r)}(\cos(\pi j/N))$ их приближенными значениями $S_{N,N}^{(r)}(f, t_j^N)$. Через

$$\bar{a}_{k,N}(f^{(r)}) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{2N-1} S_{N,N}^{(r)}(f, t_j^N) \cos \frac{\pi k j}{N}, \quad 1 \leq k \leq N-1, \tag{9.10}$$

обозначим приближенные значения коэффициентов $a_{k,N}(f^{(r)})$, полученные в результате замены $f^{(r)}(t_j^N)$ значением $S_{N,N}^{(r)}(f, t_j^N)$, $j = 0, \dots, 2N-1$. Тогда из (9.10) и (7.6) имеем

$$|a_{k,N}(f^{(r)}) - \bar{a}_{k,N}(f^{(r)})| \leq \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{2N-1} |f^{(r)}(t_j^N) - S_{N,N}^{(r)}(f, t_j^N)|. \tag{9.11}$$

Теперь воспользовавшись оценкой (9.9), из (9.11) выводим

$$\begin{aligned}
 |a_{k,N}(f^{(r)}) - \bar{a}_{k,N}(f^{(r)})| &\leq c(r, q) B q^N N^{2r-1} \sum_{j=0}^{2N-1} \frac{1}{(N|\sin(\pi j/N)| + 1)^r} \\
 &\leq c(r, q) B q^N N^{2r-1} \sum_{j=0}^N (j+1)^{-r}.
 \end{aligned} \tag{9.12}$$

Если в равенстве (7.4) мы заменим $a_{k,N}(f^{(r)})$ их приближенными значениями $\bar{a}_{k,N}$, то вместо $\mathcal{Y}_{n+2r,N}(f, x)$ будем иметь

$$\overline{\mathcal{Y}}_{n+2r,N}(f, x) = \sum_{k=0}^n a_{k,N}(f) T_k(x) + \sum_{k=n-r+1}^{n+r} \bar{a}_{k,N}(f^{(r)}) V_k(x). \quad (9.13)$$

Сопоставляя равенство (9.13) с (7.4), замечаем, что погрешность замены оператора $\mathcal{Y}_{n+2r,N}^{(\nu)}(f, x)$ на $\overline{\mathcal{Y}}_{n+2r,N}^{(\nu)}(f, x)$ равна

$$\mathcal{Y}_{n+2r,N}^{(\nu)}(f, x) - \overline{\mathcal{Y}}_{n+2r,N}^{(\nu)}(f, x) = \sum_{k=n-r+1}^{n+r} (a_{k,N}(f^{(r)}) - \bar{a}_{k,N}(f^{(r)})) V_k^{(\nu)}(x). \quad (9.14)$$

Воспользовавшись леммой 8.6, из (9.12) и (9.14), выводим следующую оценку этой погрешности:

$$|\mathcal{Y}_{n+2r,N}^{(\nu)}(f, x) - \overline{\mathcal{Y}}_{n+2r,N}^{(\nu)}(f, x)| \leq c(r, q) B q^N \frac{N^{2r-1}}{n^{r-\nu}} \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n} \right)^{-\nu} \sum_{j=1}^N j^{-r}. \quad (9.15)$$

В заключение авторы выражают признательность рецензенту за полезные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] И. И. Шарапудинов, “Приближение функций с переменной гладкостью суммами Фурье–Лежандра”, *Матем. сб.*, **191**:5 (2000), 143–160.
- [2] И. И. Шарапудинов, “Смешанные ряды по ультрасферическим полиномам и их аппроксимативные свойства”, *Матем. сб.*, **194**:3 (2003), 115–148.
- [3] И. И. Шарапудинов, “Аппроксимативные свойства операторов $\mathcal{Y}_{n+2r}(f)$ и их дискретных аналогов”, *Матем. заметки*, **72**:5 (2002), 765–795.
- [4] И. И. Шарапудинов, *Смешанные ряды по ортогональным полиномам. Теория и приложения*, ДНЦ РАН, Махачкала, 2004.
- [5] И. И. Шарапудинов, “Аппроксимативные свойства средних типа Валле-Пуссена частичных сумм смешанного ряда по полиномам Лежандра”, *Матем. заметки*, **84**:3 (2008), 452–471.
- [6] Г. Сегё, *Ортогональные многочлены*, Физматгиз, М., 1962.
- [7] С. А. Агаханов, Г. И. Натансон, “Функция Лебега сумм Фурье–Якоби”, *Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. матем., мех., астрон.*, 1968, № 1, 11–23.
- [8] В. М. Бадков, “Оценки функции Лебега и остатка ряда Фурье–Якоби”, *Сиб. матем. журн.*, **9**:6 (1968), 1263–1283.
- [9] А. Ф. Тиман, *Теория приближения функций действительного переменного*, Физматгиз, М., 1960.
- [10] И. И. Шарапудинов, “О наилучшем приближении и суммах Фурье–Якоби”, *Матем. заметки*, **34**:5 (1983), 651–661.
- [11] С. А. Теляковский, “Две теоремы о приближении функций алгебраическими многочленами”, *Матем. сб.*, **70**:2 (1966), 252–265.
- [12] И. Е. Гопенгауз, “К теореме А. Ф. Тимана о приближении функций многочленами на конечном отрезке”, *Матем. заметки*, **1**:2 (1967), 163–172.

- [13] И. И. Шарапудинов, “Одновременное приближение функций и производных, алгебро-тригонометрические полиномы и смешанные ряды по ортогональным полиномам”, *Материалы конференции Воронежской зимней математической школы “Современные методы теории функций и смежные проблемы”*, Изд.-полиграф. центр Воронежск. гос. ун-та, Воронеж, 2009, 189.
- [14] И. И. Шарапудинов, “О базисности системы полиномов Лежандра в пространстве Лебега $L^{p(x)}(-1, 1)$ с переменным показателем $p(x)$ ”, *Матем. сб.*, **200**:1 (2009), 137–160.
- [15] И. К. Даугавет, *Теория приближенных методов. Линейные уравнения*, БВХ-Петербург, СПб, 2006.
- [16] С. Пашковский, *Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева*, Наука, М., 1983.
- [17] R. Haverkamp, “Approximationsfehler der Ableitungen von Interpolationspolynomen”, *J. Approx. Theory*, **30**:3 (1980), 180–196.
- [18] T. W. Tee, L. N. Trefethen, “A rational spectral collocation method with adaptively transformed Chebyshev grid points”, *SIAM J. Sci. Comput.*, **28**:5 (2006), 1798–1811.
- [19] B. Muckenhoupt, “Mean convergence of Jacobi series”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **23**:2 (1969), 306–310.
- [20] А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды*. т. 1, 2, М., 1965.

И. И. Шарапудинов

Дагестанский научный центр РАН

E-mail: sharapud@iwt.ru

Поступило

02.10.2008

Исправленный вариант

05.02.2010

Т. И. Шарапудинов

Владикавказский научный центр РАН