Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Александров, А. В. Платонов, Об устойчивости по нелинейному неоднородному приближению, *Матем. заметки*, 2011, том 90, выпуск 6, 803–820

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm6609>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 12:49:05

Об устойчивости по нелинейному неоднородному приближению

А. Ю. Александров, А. В. Платонов

Исследуется асимптотическая устойчивость нулевого решения существенно нелинейных систем дифференциальных уравнений по неоднородному приближению треугольного вида. С помощью прямого метода Ляпунова определяют условия, при выполнении которых возмущения не нарушают асимптотической устойчивости нулевого решения. Критерии устойчивости формулируются в виде неравенств, устанавливающих связь между порядками возмущений и порядками однородности функций, входящих в систему нелинейного приближения.

Библиография: 23 названия.

1. Введение. Одним из основных путей решения задачи устойчивости решений нелинейных систем является следующий [1; с. 96]: вместо данной системы уравнений строят вспомогательную, упрощенную систему, для которой доказывают устойчивость, асимптотическую устойчивость или неустойчивость. Затем показывают, что соответствующее свойство сохраняется и при переходе к первоначальной системе. Ляпунов определил условия, при выполнении которых об устойчивости нулевого решения нелинейной системы можно судить по линейному приближению [2]. Случаи, когда для анализа устойчивости необходимо исследование нелинейных членов, были названы им *сомнительными* или *критическими*.

Для получения условий устойчивости в сомнительных случаях довольно часто приходится рассматривать системы, у которых разложение правых частей в ряды по степеням искомым функций вообще не содержит линейных членов. Таким образом, возникает задача исследования устойчивости по нелинейному приближению. Теоремы об устойчивости по нелинейному приближению были доказаны в работах Малкина, Красовского, Зубова [1], [3], [4]. При этом в качестве первого приближения рассматривались системы с однородными правыми частями.

Однако следует заметить, что изучение многих критических случаев приводит к проблеме анализа устойчивости решений существенно неоднородных систем [5]–[9]. Для таких систем Зубовым установлены критерии устойчивости по обобщенно-однородному приближению [6]. Кроме того, он сформулировал задачу об устойчивости

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-08-92208ГФЕН_а).

по первому, в широком смысле, приближению [10]. Ряд условий устойчивости по неоднородному приближению получен также в работах [6], [8], [9], [11]–[14].

В настоящей статье рассматриваются системы нелинейного приближения специального вида. Предполагается, что в правых частях изучаемых уравнений кроме однородных функций заданного порядка присутствуют дополнительные члены меньшего порядка. При этом основное внимание уделяется случаю, когда система нелинейного приближения является треугольной. С помощью прямого метода Ляпунова определяются условия, при выполнении которых возмущения не нарушают устойчивости нулевого решения. Критерии устойчивости по нелинейному приближению формулируются в виде неравенств, устанавливающих связь между порядками возмущений и порядками однородности функций, входящих в систему нелинейного приближения. В работе показывается также, что для некоторых классов систем условия полученных критериев можно ослабить.

2. Постановка задачи. Пусть задана система дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (1)$$

где $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^*$, а компоненты вектора $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ являются непрерывно дифференцируемыми при всех $\mathbf{x} \in \mathbb{E}^n$ однородными функциями порядка $\mu > 1$. Таким образом, система (1) имеет нулевое решение.

Наряду с системой (1) рассмотрим возмущенную систему

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{r}(t, \mathbf{x}). \quad (2)$$

Будем считать, что векторная функция $\mathbf{r}(t, \mathbf{x})$ непрерывна в области

$$t \geq 0, \quad \|\mathbf{x}\| < H, \quad (3)$$

причем в указанной области справедлива оценка $\|\mathbf{r}(t, \mathbf{x})\| \leq L\|\mathbf{x}\|^\sigma$. Здесь H , L , σ – положительные постоянные, $\|\cdot\|$ – евклидова норма вектора.

Пусть нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво. В соответствии с известными критериями устойчивости по нелинейному приближению [1]–[4] получаем, что при выполнении неравенства $\sigma > \mu$ нулевое решение системы (2) также асимптотически устойчиво. Следовательно, возмущения не нарушают асимптотической устойчивости, если их порядок превышает порядок однородности функции $\mathbf{f}(\mathbf{x})$.

Предположим теперь, что в правых частях уравнений нелинейного приближения кроме однородных членов порядка μ присутствуют слагаемые меньшего порядка, т.е. вместо системы (1) рассмотрим систему

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{q}(\mathbf{x}). \quad (4)$$

Здесь векторная функция $\mathbf{q}(\mathbf{x})$ непрерывна при $\|\mathbf{x}\| < H$ и удовлетворяет неравенству

$$\|\mathbf{q}(\mathbf{x})\| \leq M\|\mathbf{x}\|^\lambda, \quad M > 0, \quad 0 < \lambda < \mu.$$

Снова считаем, что нулевое решение рассматриваемой системы асимптотически устойчиво. Возникает вопрос: для возмущений какого порядка малости можно

гарантировать сохранение асимптотической устойчивости? Оказывается, что выполнения прежнего условия $\sigma > \mu$ уже, вообще говоря, недостаточно.

Заметим, что данный вопрос был сформулирован в работе [9] для случая $\mu = 3$, $\lambda = 2$. Предполагалось, что компоненты векторов $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ и $\mathbf{q}(\mathbf{x})$ представляют собой однородные формы третьей и второй степени соответственно. Предлагалось проверить гипотезу о том, что из асимптотической устойчивости нулевого решения системы (4) следует асимптотическая устойчивость нулевого решения возмущенной системы

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{q}(\mathbf{x}) + \mathbf{r}(\mathbf{x}),$$

где $\mathbf{r}(\mathbf{x}) = O(\|\mathbf{x}\|^4)$ при $\|\mathbf{x}\| \rightarrow 0$.

Приведем пример, показывающий, что эта гипотеза, вообще говоря, неверна.

ПРИМЕР 1. Пусть система (4) имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1^\mu + x_1^\alpha x_2^\beta, \\ \dot{x}_2 &= -x_2^\mu.\end{aligned}\tag{5}$$

Здесь μ – рациональное число с нечетными числителем и знаменателем, $\mu > 1$, α и β – рациональные числа с нечетными знаменателями, $\alpha \geq 0$, $\beta > 0$, $\alpha + \beta < \mu$.

С помощью функции Ляпунова $V(x_1, x_2) = x_1^{\gamma_1} + x_2^{\gamma_2}$, где γ_1, γ_2 – рациональные числа с нечетными знаменателями и четными числителями,

$$\gamma_1 > 1, \quad \gamma_2 > 1, \quad \beta(\gamma_1 + \mu - 1) > (\mu - \alpha)(\gamma_2 + \mu - 1),$$

несложно убедиться, что нулевое решение системы (5) асимптотически устойчиво.

Рассмотрим теперь возмущенную систему

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1^\mu + x_1^\alpha x_2^\beta, \\ \dot{x}_2 &= -x_2^\mu + x_1^\sigma.\end{aligned}\tag{6}$$

Здесь σ – положительное рациональное число с нечетным знаменателем. Заметим, что система (6) является системой Важевского [15].

Если

$$\sigma \leq \frac{\mu(\mu - \alpha)}{\beta},\tag{7}$$

то для любого $\delta > 0$ найдутся числа θ_1 и θ_2 , $0 < \theta_1 < \delta$, $0 < \theta_2 < \delta$, такие, что

$$-\theta_1^\mu + \theta_1^\alpha \theta_2^\beta \geq 0, \quad -\theta_2^\mu + \theta_1^\sigma \geq 0.$$

Используя свойства автономных систем Важевского [15], получаем, что при выполнении неравенства (7) нулевое решение системы (6) не может быть асимптотически устойчивым.

В частности, если $\mu = 3$, $\alpha = \beta = 1$, то условие (7) принимает вид $\sigma \leq 6$. Значит, при $\sigma = 4$ нулевое решение системы (6) не является асимптотически устойчивым. Таким образом, сформулированная в работе [9] гипотеза неверна.

Более того, если $\beta \rightarrow 0$, то точная нижняя граница значений параметра σ , при которых имеет место асимптотическая устойчивость, стремится к бесконечности.

Рассмотренный пример показывает, что без конкретизации вида правой части системы (4) нельзя указать оценку на порядок возмущений, зависящую только от значений μ и λ и гарантирующую сохранение асимптотической устойчивости нулевого решения. В настоящей статье будем предполагать, что система нелинейного приближения (4) является треугольной. Определим условия асимптотической устойчивости нулевого решения для возмущенных систем, а также рассмотрим классы систем, для которых возможно уточнение этих условий.

3. Устойчивость по нелинейному треугольному приближению. Пусть система (4) имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1) + \mathbf{q}_1(\mathbf{x}), \\ \dot{\mathbf{x}}_2 &= \mathbf{f}_2(\mathbf{x}_2).\end{aligned}\tag{8}$$

Здесь $\mathbf{x}_1 \in \mathbb{E}^{n_1}$, $\mathbf{x}_2 \in \mathbb{E}^{n_2}$, $n_1 + n_2 = n$, $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1^*, \mathbf{x}_2^*)^*$; элементы векторов $\mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1)$ и $\mathbf{f}_2(\mathbf{x}_2)$ – непрерывно дифференцируемые однородные функции порядка $\mu > 1$; векторная функция $\mathbf{q}_1(\mathbf{x})$ непрерывна в области $\|\mathbf{x}\| < H$ и удовлетворяет неравенству

$$\|\mathbf{q}_1(\mathbf{x})\| \leq M \|\mathbf{x}_1\|^\alpha \|\mathbf{x}_2\|^\beta,\tag{9}$$

где $H > 0$, $M > 0$, $\alpha \geq 0$, $\beta > 0$, $\alpha + \beta < \mu$.

Система (8) относится к классу так называемых треугольных систем [16]. Проблема анализа устойчивости решений треугольных систем дифференциальных уравнений исследовалась во многих работах (см., например, [16]–[20]). В [16] изучалось воздействие на треугольные системы асимптотически исчезающих возмущений.

Будем считать, что нулевые решения изолированных подсистем

$$\dot{\mathbf{x}}_s = \mathbf{f}_s(\mathbf{x}_s), \quad s = 1, 2,\tag{10}$$

асимптотически устойчивы. Тогда нулевое решение треугольной системы (8) также асимптотически устойчиво [11].

Рассмотрим теперь возмущенную систему

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1) + \mathbf{q}_1(\mathbf{x}) + \mathbf{r}_1(t, \mathbf{x}), \\ \dot{\mathbf{x}}_2 &= \mathbf{f}_2(\mathbf{x}_2) + \mathbf{r}_2(t, \mathbf{x}).\end{aligned}\tag{11}$$

Здесь векторные функции $\mathbf{r}_1(t, \mathbf{x})$ и $\mathbf{r}_2(t, \mathbf{x})$ непрерывны в области (3) и удовлетворяют неравенствам

$$\|\mathbf{r}_s(t, \mathbf{x})\| \leq L_s \|\mathbf{x}\|^\sigma,\tag{12}$$

$\sigma > 0$, $L_s \geq 0$, $s = 1, 2$.

Для получения условий устойчивости нулевого решения системы (11) воспользуемся подходом, предложенным в [11]. В указанной работе рассматривались сложные системы, описывающие взаимодействие подсистем с однородными правыми частями. Для каждой изолированной подсистемы выбиралась своя функция Ляпунова, из которых затем конструировалась общая векторная функция Ляпунова для всей сложной системы. Однако, в отличие от [11], в настоящей статье для исследуемой системы будем строить скалярную функцию Ляпунова.

ТЕОРЕМА 1. Если выполнено неравенство

$$\sigma > \frac{\mu(\mu - \alpha)}{\beta}, \quad (13)$$

то нулевое решение системы (11) асимптотически устойчиво.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно [4; с. 115–123], что из асимптотической устойчивости нулевых решений изолированных подсистем (10) следует существование непрерывно дифференцируемых однородных порядка $\gamma_1 - \mu + 1$ и $\gamma_2 - \mu + 1$ соответственно функций Ляпунова $V_1(\mathbf{x}_1)$ и $V_2(\mathbf{x}_2)$, удовлетворяющих требованиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости. При этом в качестве γ_1 и γ_2 можно выбирать любые достаточно большие рациональные числа с четными числителями и нечетными знаменателями.

Для системы (11) функцию Ляпунова строим в виде $V(\mathbf{x}) = V_1(\mathbf{x}_1) + V_2(\mathbf{x}_2)$. При $t \geq 0$, $\|\mathbf{x}\| < H$ получаем

$$\begin{aligned} \dot{V}|_{(11)} \leq & -c_1(\|\mathbf{x}_1\|^{\gamma_1} + \|\mathbf{x}_2\|^{\gamma_2}) \\ & + c_2(\|\mathbf{x}_1\|^{\gamma_1 - \mu + \alpha} \|\mathbf{x}_2\|^{\beta} + \|\mathbf{x}_1\|^{\gamma_1 - \mu + \sigma} \\ & + \|\mathbf{x}_1\|^{\gamma_1 - \mu} \|\mathbf{x}_2\|^{\sigma} + \|\mathbf{x}_1\|^{\sigma} \|\mathbf{x}_2\|^{\gamma_2 - \mu} + \|\mathbf{x}_2\|^{\gamma_2 - \mu + \sigma}), \end{aligned}$$

где c_1, c_2 – положительные постоянные.

Пусть выполнено неравенство (13). Выберем γ_1 и γ_2 так, чтобы имели место соотношения $(\mu - \alpha)/\beta < \gamma_1/\gamma_2 < \sigma/\mu$. Тогда в достаточно малой окрестности точки $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ и при всех $t \geq 0$ будет справедлива оценка

$$\dot{V}|_{(11)} \leq -\frac{c_1}{2}(\|\mathbf{x}_1\|^{\gamma_1} + \|\mathbf{x}_2\|^{\gamma_2}).$$

Таким образом, функция $V(\mathbf{x})$ удовлетворяет требованиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости [2; с. 64–65]. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Пример 1 показывает, что сформулированное в теореме 1 достаточное условие асимптотической устойчивости в определенном смысле является и необходимым. Действительно, если при рассматриваемых значениях параметров μ, α, β и σ неравенство (13) не выполнено, то можно построить систему вида (11), нулевое решение которой не будет асимптотически устойчивым.

ПРИМЕР 2. Пусть задано твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной точки O , расположенной в его центре инерции. Свяжем с телом оси координат $Oxyz$, которые являются главными центральными осями этого тела. Уравнения вращательного движения тела под действием управляющего момента $\mathbf{M}$ имеют вид

$$\Theta \dot{\omega} + \omega \times \Theta \omega = \mathbf{M},$$

где $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^*$ – вектор угловой скорости, $\Theta = \text{diag}\{A_1, A_2, A_3\}$ – тензор инерции тела, A_1, A_2, A_3 – главные центральные моменты инерции [21; с. 413–419].

Будем считать, что первые два главных центральных момента инерции тела равны друг другу ($A_1 = A_2$), а управляющий момент определяется по формуле $\mathbf{M} = (-\omega_1^3 + \omega_2^3, -\omega_1^3 - \omega_2^3, -\omega_3^3)^*$. Таким образом, получаем систему

$$A_1 \dot{\omega}_1 + (A_3 - A_1) \omega_2 \omega_3 = -\omega_1^3 + \omega_2^3,$$

$$\begin{aligned} A_1 \dot{\omega}_2 + (A_1 - A_3) \omega_1 \omega_3 &= -\omega_1^3 - \omega_2^3, \\ A_3 \dot{\omega}_3 &= -\omega_3^3. \end{aligned}$$

Эта система представляет собой частный случай системы (8) (здесь $\mu = 3$, $\alpha = \beta = 1$), причем ее положение равновесия $\omega = \mathbf{0}$ асимптотически устойчиво.

Рассмотрим теперь возмущенную систему

$$\begin{aligned} A_1 \dot{\omega}_1 + (A_3 - A_1) \omega_2 \omega_3 &= -\omega_1^3 + \omega_2^3 + r_1(t, \omega), \\ A_1 \dot{\omega}_2 + (A_1 - A_3) \omega_1 \omega_3 &= -\omega_1^3 - \omega_2^3 + r_2(t, \omega), \\ A_3 \dot{\omega}_3 &= -\omega_3^3 + r_3(t, \omega), \end{aligned}$$

где функции $r_i(t, \omega)$ непрерывны при $t \geq 0$, $\|\omega\| < H$ ($H = \text{const} > 0$) и удовлетворяют условиям

$$|r_i(t, \omega)| \leq N_i \|\omega\|^\sigma, \quad \sigma > 0, \quad N_i > 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Применяя теорему 1, получаем, что если $\sigma > 6$, то положение равновесия $\omega = \mathbf{0}$ возмущенной системы асимптотически устойчиво.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Теорема 1 задает достаточные условия асимптотической устойчивости нулевого решения системы (11) в случае, когда возмущения удовлетворяют степенным оценкам порядка σ (см. неравенства (12)). При этом вклад каждой из переменных $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$ в указанный общий порядок может быть любым. Если же этот вклад задан конкретным образом, то условия асимптотической устойчивости можно уточнить.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть векторные функции $\mathbf{r}_1(t, \mathbf{x})$ и $\mathbf{r}_2(t, \mathbf{x})$ непрерывны в области (3) и удовлетворяют неравенствам

$$\|\mathbf{r}_s(t, \mathbf{x})\| \leq L_s \|\mathbf{x}_1\|^{\delta_{s1}} \|\mathbf{x}_2\|^{\delta_{s2}},$$

где $L_s > 0$, $\delta_{s1} \geq 0$, $\delta_{s2} \geq 0$, $\delta_{s1} + \delta_{s2} = \sigma > 0$, $s = 1, 2$. Тогда при

$$\sigma > \frac{\mu(\mu - \alpha) - \delta_{22}(\mu - \alpha - \beta)}{\beta} \quad (14)$$

нулевое решение системы (11) асимптотически устойчиво.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Отметим, что условие (14) не зависит от конкретных значений δ_{11} и δ_{12} .

Покажем теперь, что предложенный способ анализа устойчивости по неоднородному треугольному приближению можно использовать и в случае, когда изолированные подсистемы (10) имеют разные порядки однородности.

Пусть в системе (11) компоненты векторов $\mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1)$ и $\mathbf{f}_2(\mathbf{x}_2)$ являются непрерывно дифференцируемыми однородными функциями порядка μ_1 и μ_2 соответственно, $\mu_1 \geq 1$, $\mu_2 \geq 1$, для непрерывной векторной функции $\mathbf{q}_1(\mathbf{x})$ при $\|\mathbf{x}\| < H$ справедлива оценка (9), где $H > 0$, $M > 0$, $\alpha \geq 0$, $\beta > 0$, а векторная функция $\mathbf{r}_2(t, \mathbf{x})$ непрерывна в области (3) и удовлетворяет неравенству

$$\|\mathbf{r}_2(t, \mathbf{x})\| \leq L_2 \|\mathbf{x}_1\|^{\delta_{21}} \|\mathbf{x}_2\|^{\delta_{22}}, \quad L_2 > 0, \quad \delta_{21} > 0, \quad \delta_{22} \geq 0.$$

Для простоты будем считать, что $\mathbf{r}_1(t, \mathbf{x}) \equiv \mathbf{0}$.

Заметим, что если $\alpha \geq \mu_1$, то нулевое решение исследуемой системы асимптотически устойчиво. Поэтому предположим, что $\alpha < \mu_1$.

ТЕОРЕМА 2. *При выполнении неравенства*

$$\beta\delta_{21} > (\mu_1 - \alpha)(\mu_2 - \delta_{22})$$

нулевое решение системы (11) асимптотически устойчиво.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 1.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Полученные в данном пункте результаты можно распространить и на системы более общего вида. Например, на случай, когда в области $\|\mathbf{x}\| < H$ для вектора $\mathbf{q}_1(\mathbf{x})$ справедлива оценка

$$\|\mathbf{q}_1(\mathbf{x})\| \leq \sum_{i=1}^k M_i \|\mathbf{x}_1\|^{\alpha_i} \|\mathbf{x}_2\|^{\beta_i}, \quad \text{где } M_i > 0, \quad \alpha_i \geq 0, \quad \beta_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, k,$$

или на случай систем нелинейного приближения каскадного типа [17], [19].

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Предложенный подход можно также использовать для нахождения условий неустойчивости и равномерной диссипативности по нелинейному треугольному приближению.

Далее в настоящей статье рассмотрим классы систем, для которых удастся ослабить условия полученных критериев устойчивости по нелинейному приближению.

4. Устойчивость по нелинейному нестационарному треугольному приближению. Заметим, что теорема 1 будет справедлива и в случае, когда в системе (11) векторная функция $\mathbf{q}_1$ зависит не только от $\mathbf{x}$, но и от времени ($\mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_1(t, \mathbf{x})$), непрерывна в области (3) и удовлетворяет неравенству

$$\|\mathbf{q}_1(t, \mathbf{x})\| \leq M \|\mathbf{x}_1\|^\alpha \|\mathbf{x}_2\|^\beta, \quad \text{где } M > 0, \quad \alpha \geq 0, \quad \beta > 0, \quad \alpha + \beta < \mu.$$

Покажем, что для некоторых типов функций $\mathbf{q}_1(t, \mathbf{x})$ асимптотическая устойчивость нулевого решения сохраняется при менее жестких ограничениях на порядок возмущений по сравнению с условием (13).

Пусть $\mathbf{q}_1(t, \mathbf{x}) = \mathbf{B}(t)\mathbf{g}(\mathbf{x}_2)$, а возмущенная система имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1) + \mathbf{B}(t)\mathbf{g}(\mathbf{x}_2) + \mathbf{r}_1(t, \mathbf{x}), \\ \dot{\mathbf{x}}_2 &= \mathbf{f}_2(\mathbf{x}_2) + \mathbf{r}_2(t, \mathbf{x}). \end{aligned} \tag{15}$$

Здесь компоненты векторов $\mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1)$ и $\mathbf{f}_2(\mathbf{x}_2)$ – непрерывно дифференцируемые однородные функции порядка $\mu > 1$; $\mathbf{r}_1(t, \mathbf{x})$ и $\mathbf{r}_2(t, \mathbf{x})$ – непрерывные в области (3) векторные функции, удовлетворяющие неравенствам (12); матрица $\mathbf{B}(t)$ непрерывна и ограничена при $t \geq 0$; компоненты вектора $\mathbf{g}(\mathbf{x}_2)$ являются непрерывно дифференцируемыми однородными функциями порядка β , $1 < \beta < \mu$. Снова считаем, что нулевые решения изолированных подсистем (10) асимптотически устойчивы.

В данном случае условие (13), при выполнении которого возмущения не нарушают асимптотическую устойчивость нулевого решения, принимает вид $\sigma > \mu^2/\beta$.

Предположим теперь, что интеграл $\int_0^t \mathbf{B}(\tau) d\tau$ ограничен на промежутке $[0, +\infty)$, а векторная функция $\mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1)$ дважды непрерывно дифференцируема при $\mathbf{x}_1 \in \mathbb{E}^{n_1}$. В частности, элементы матрицы $\mathbf{B}(t)$ могут описывать периодические колебания с нулевыми средними значениями. При этом на амплитуды указанных колебаний никаких дополнительных условий не накладывается.

Тогда полученное ограничение на порядок возмущений можно ослабить с помощью предложенного в [13], [22] способа построения неавтономных функций Ляпунова для существенно нелинейных систем.

ТЕОРЕМА 3. *При выполнении неравенства*

$$\sigma > \mu \max \left\{ 1; \frac{\mu + 1}{2\beta} \right\}$$

нулевое решение системы (15) асимптотически устойчиво.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $V_1(\mathbf{x}_1)$ и $V_2(\mathbf{x}_2)$ – непрерывно дифференцируемые однородные порядка $\gamma_1 - \mu + 1$ и $\gamma_2 - \mu + 1$ соответственно функции Ляпунова, построенные для изолированных подсистем (10) и удовлетворяющие требованиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости. Так как $\mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1)$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция, то можно считать [4; с. 119–123], что и функция $V_1(\mathbf{x}_1)$ является дважды непрерывно дифференцируемой.

Для возмущенной системы функцию Ляпунова выбираем в виде

$$\tilde{V}(t, \mathbf{x}) = V_1(\mathbf{x}_1) + V_2(\mathbf{x}_2) - \left(\frac{\partial V_1}{\partial \mathbf{x}_1} \right)^* \int_0^t \mathbf{B}(\tau) d\tau \mathbf{g}(\mathbf{x}_2).$$

Если для параметров γ_1 и γ_2 имеют место соотношения

$$\max \left\{ \frac{\mu + 1}{2\beta}; \frac{\mu}{\sigma} \right\} < \frac{\gamma_1}{\gamma_2} < \frac{\sigma}{\mu},$$

то найдутся положительные числа Δ , c_1 , c_2 , c_3 такие, что при $\|\mathbf{x}\| < \Delta$ и при всех $t \geq 0$ будут справедливы оценки

$$c_1(\|\mathbf{x}_1\|^{\gamma_1 - \mu + 1} + \|\mathbf{x}_2\|^{\gamma_2 - \mu + 1}) \leq \tilde{V}(t, \mathbf{x}) \leq c_2(\|\mathbf{x}_1\|^{\gamma_1 - \mu + 1} + \|\mathbf{x}_2\|^{\gamma_2 - \mu + 1}),$$

$$\dot{\tilde{V}}|_{(15)} \leq -c_3(\|\mathbf{x}_1\|^{\gamma_1} + \|\mathbf{x}_2\|^{\gamma_2}).$$

Таким образом, функция $\tilde{V}(t, \mathbf{x})$ удовлетворяет требованиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Из теоремы 3 следует, что если $\beta \geq (\mu + 1)/2$, то для асимптотической устойчивости нулевого решения системы (15) достаточно выполнения неравенства $\sigma > \mu$, т.е. в этом случае наличие в правой части системы нелинейного приближения слагаемого $\mathbf{B}(t)\mathbf{g}(\mathbf{x}_2)$ не приводит к дополнительным ограничениям на порядок возмущений по сравнению со случаем, когда система нелинейного приближения является однородной.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Аналогичным образом можно провести уточнение условий асимптотической устойчивости в случае, когда функции $\mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1)$ и $\mathbf{f}_2(\mathbf{x}_2)$ в системе (15) – однородные разных порядков.

5. Некоторые критерии положительной определенности функций. В предыдущих пунктах статьи было показано, что добавление к правым частям системы нелинейного приближения (1) слагаемого $\mathbf{q}(\mathbf{x})$, меньшего порядка малости по сравнению с $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, приводит, вообще говоря, к дополнительным ограничениям на порядок возмущений, не нарушающих асимптотической устойчивости нулевого решения. Однако для некоторых типов систем таких дополнительных ограничений не требуется. Один из подобных случаев был рассмотрен в п. 4 (см. замечание 6). Более того, возможны ситуации, когда наличие дополнительного слагаемого в правых частях системы нелинейного приближения позволяет ослабить оценки на порядок возмущений. Чтобы продемонстрировать это, нам понадобятся некоторые вспомогательные результаты, касающиеся условий положительной определенности функций.

Рассмотрим функцию

$$\varphi(\mathbf{x}) = \sum_{s=1}^n c_s x_s^{\gamma_s},$$

где γ_s – положительные рациональные числа с четными числителями и нечетными знаменателями, c_s – положительные постоянные. Функция $\varphi(\mathbf{x})$ положительно определена.

Пусть

$$g(\mathbf{x}) = -N|x_1|^{\sigma_1} \cdots |x_n|^{\sigma_n}. \quad (16)$$

Здесь $N > 0$, $\sigma_s \geq 0$, $s = 1, \dots, n$.

Справедливо следующее утверждение.

ЛЕММА 1 [13; с. 12]. *Для того, чтобы при любом значении коэффициента N функция $\varphi(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})$ была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство*

$$\sum_{s=1}^n \frac{\sigma_s}{\gamma_s} > 1.$$

Далее рассмотрим функцию

$$\widehat{\varphi}(x_1, x_2) = c_1 x_1^{\gamma_1} + c_2 x_2^{\gamma_2} + b x_1^{\delta_1} x_2^{\delta_2},$$

где $\gamma_1, \gamma_2, \delta_1, \delta_2$ – положительные рациональные числа с четными числителями и нечетными знаменателями, а c_1, c_2, b – положительные постоянные. Будем считать, что

$$\frac{\delta_1}{\gamma_1} + \frac{\delta_2}{\gamma_2} < 1. \quad (17)$$

Пусть

$$\widehat{g}(x_1, x_2) = -N|x_1|^{\sigma_1}|x_2|^{\sigma_2}, \quad \text{где } N > 0, \quad \sigma_1 \geq 0, \quad \sigma_2 \geq 0.$$

ЛЕММА 2 [13; с. 12–14]. *Для того, чтобы при любом значении коэффициента N функция $\widehat{\varphi}(x_1, x_2) + \widehat{g}(x_1, x_2)$ была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства*

$$\sigma_1 + \frac{\gamma_1 - \delta_1}{\delta_2} \sigma_2 > \gamma_1, \quad \frac{\gamma_2 - \delta_2}{\delta_1} \sigma_1 + \sigma_2 > \gamma_2.$$

Обобщим теперь лемму 2 на n -мерный случай.

Пусть задана функция

$$\tilde{\varphi}(\mathbf{x}) = \sum_{s=1}^n c_s x_s^{\gamma_s} + \sum_{j=1}^l b_j x_1^{\delta_{j1}} \cdots x_n^{\delta_{jn}},$$

где γ_s, δ_{js} – рациональные числа с четными числителями и нечетными знаменателями, $\gamma_s > 0, \delta_{js} \geq 0, \sum_{s=1}^n \delta_{js} > 0$; c_s и b_j – положительные постоянные. Будем считать, что имеют место соотношения

$$\sum_{s=1}^n \frac{\delta_{js}}{\gamma_s} < 1, \quad j = 1, \dots, l. \quad (18)$$

Рассмотрим в неотрицательном ортанте точки $M_1, \dots, M_{n+l}$ с радиус-векторами

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_1 &= (\gamma_1, 0, \dots, 0)^*, \\ &\dots\dots\dots, \\ \mathbf{m}_n &= (0, \dots, 0, \gamma_n)^*, \\ \mathbf{m}_{n+1} &= (\delta_{11}, \dots, \delta_{1n})^*, \\ &\dots\dots\dots, \\ \mathbf{m}_{n+l} &= (\delta_{l1}, \dots, \delta_{ln})^*. \end{aligned}$$

Выберем набор точек $M^{(1)}, \dots, M^{(n)}$ из совокупности $\{M_1, \dots, M_{n+l}\}$ так, чтобы их радиус-векторы

$$\mathbf{m}^{(1)} = (m_{11}, \dots, m_{1n})^*, \quad \dots, \quad \mathbf{m}^{(n)} = (m_{n1}, \dots, m_{nn})^*$$

были линейно независимы. Пусть $\mathbf{A} = (m_{sk})_{s,k=1}^n$, а через $\tilde{m}_{sk}$, $s, k = 1, \dots, n$, обозначим элементы матрицы $\mathbf{A}^{-1}$.

Построим гиперплоскость ν , проходящую через точки $M^{(1)}, \dots, M^{(n)}$. Имеем

$$\nu = \left\{ \xi \in \mathbb{E}^n : \sum_{s=1}^n \xi_s \sum_{k=1}^n \tilde{m}_{sk} = 1 \right\}.$$

Положим

$$\begin{aligned} K^0 &= \left\{ \xi \in \mathbb{E}^n : \xi = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{m}^{(i)}, \lambda_i \geq 0, i = 1, \dots, n \right\}, \\ K &= \left\{ \xi \in \mathbb{E}^n : \xi = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{m}^{(i)}, \lambda_i \geq 0, i = 1, \dots, n, \sum_{i=1}^n \lambda_i > 1 \right\}. \end{aligned}$$

Множество K^0 представляет собой n -мерный конус с вершиной в начале координат, порожденный точками $M^{(1)}, \dots, M^{(n)}$ [23; с. 30–31], а K – это часть конуса K^0 , отсекаемая от него гиперплоскостью ν .

Получаем, что точка $(\sigma_1, \dots, \sigma_n)^*$ принадлежит множеству K^0 тогда и только тогда, когда справедливы неравенства

$$\sum_{s=1}^n \sigma_s \tilde{m}_{sk} \geq 0, \quad k = 1, \dots, n, \quad (19)$$

а для принадлежности этой точки множеству K необходимо и достаточно, чтобы наряду с неравенствами (19) имело место соотношение

$$\sum_{s=1}^n \sigma_s \sum_{k=1}^n \tilde{m}_{sk} > 1. \quad (20)$$

Пусть функция $g(\mathbf{x})$ определяется по формуле (16), где $N > 0$, $\sigma_s \geq 0$, $s = 1, \dots, n$.

ЛЕММА 3. *Для того, чтобы при любом значении коэффициента N функция $\tilde{\varphi}(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})$ была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы нашелся хотя бы один набор точек $M^{(1)}, \dots, M^{(n)}$ из совокупности $\{M_1, \dots, M_{n+l}\}$ такой, что радиус-векторы этих точек*

$$\mathbf{m}^{(1)} = (m_{11}, \dots, m_{1n})^*, \quad \dots, \quad \mathbf{m}^{(n)} = (m_{n1}, \dots, m_{nn})^*$$

линейно независимы и выполнены условия (19), (20).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Достаточность.* Предположим, что требуемый набор точек $M^{(1)}, \dots, M^{(n)}$ существует. Тогда

$$\sigma_s = \sum_{i=1}^n \lambda_i m_{is}, \quad s = 1, \dots, n,$$

где $\lambda_i \geq 0$, причем $\sum_{i=1}^n \lambda_i > 1$.

При всех $\mathbf{x} \in \mathbb{E}^n$ имеем $\tilde{\varphi}(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) \geq \tilde{\varphi}(\mathbf{x})/2 + w(\mathbf{x})$. Здесь

$$w(\mathbf{x}) = \beta \sum_{s=1}^n |x_1|^{m_{s1}} \dots |x_n|^{m_{sn}} - N |x_1|^{\sigma_1} \dots |x_n|^{\sigma_n}, \quad \beta = \text{const} > 0.$$

Пусть

$$z_s = |x_1|^{m_{s1}} \dots |x_n|^{m_{sn}}, \quad s = 1, \dots, n.$$

Получим

$$w(\mathbf{x}) = \beta \sum_{s=1}^n z_s - N z_1^{\lambda_1} \dots z_n^{\lambda_n}.$$

Следовательно [6; с. 187–191], если $\|\mathbf{x}\|$ достаточно мала, то $w(\mathbf{x}) \geq 0$.

Значит, существует число $H > 0$ такое, что при $\|\mathbf{x}\| < H$ справедлива оценка $\tilde{\varphi}(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) \geq \tilde{\varphi}(\mathbf{x})/2$.

Необходимость. Предположим, что для любого набора точек $M^{(1)}, \dots, M^{(n)}$ из совокупности $\{M_1, \dots, M_{n+l}\}$ с линейно независимыми радиус-векторами нарушено хотя бы одно из соотношений (19), (20). Если $\sigma_1 = \dots = \sigma_n = 0$, то функция $\tilde{\varphi}(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})$ не является положительно определенной. Поэтому будем считать, что существует значение индекса $i \in \{1, \dots, n\}$, для которого выполняется неравенство $\sigma_i > 0$.

Рассмотрим выпуклый многогранник Q , порожденный точками $M_1, \dots, M_{n+l}$ [23; с. 29]. Получим

$$Q = \left\{ \xi \in \mathbb{E}^n : \xi = \sum_{i=1}^{n+l} \lambda_i \mathbf{m}_i, \lambda_i \geq 0, i = 1, \dots, n+l, \sum_{i=1}^{n+l} \lambda_i = 1 \right\}.$$

Известно [23; с. 187–188], что любой выпуклый многогранник может быть представлен как множество решений некоторой системы линейных неравенств. Нетрудно проверить, что система, задающая многогранник Q , имеет вид

$$\xi_1 \geq 0, \quad \dots, \quad \xi_n \geq 0, \quad \sum_{s=1}^n \frac{\xi_s}{\gamma_s} \leq 1, \quad (21)$$

$$\sum_{s=1}^n d_{is} \xi_s \geq 1, \quad i = 1, \dots, p. \quad (22)$$

Здесь p – натуральное число, d_{is} – постоянные коэффициенты. Не умаляя общности, будем считать, что в неотрицательном ортанте ни одно неравенство из совокупности (21), (22) не является следствием остальных неравенств, входящих в данную совокупность. Поскольку точки $M_1, \dots, M_n$ принадлежат многограннику Q , справедливы соотношения

$$d_{is} \geq \frac{1}{\gamma_s}, \quad i = 1, \dots, p, \quad s = 1, \dots, n.$$

Построим луч L , выходящий из начала координат и проходящий через точку $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)^*$. Получим $L = \{\xi \in \mathbb{E}^n : \xi = c\sigma, c \in [0, +\infty)\}$.

Выберем такое значение $r \in \{1, \dots, p\}$, что

$$\sum_{s=1}^n d_{rs} \sigma_s = \min_{i=1, \dots, p} \sum_{s=1}^n d_{is} \sigma_s.$$

Пусть Γ – множество точек $\xi \in \mathbb{E}^n$, координаты которых удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} \xi_1 \geq 0, \dots, \xi_n \geq 0, \quad \sum_{s=1}^n \frac{\xi_s}{\gamma_s} \leq 1, \\ \sum_{s=1}^n d_{is} \xi_s \geq 1, \quad i = 1, \dots, p, \quad i \neq r, \quad \sum_{s=1}^n d_{rs} \xi_s = 1. \end{aligned}$$

Множество Γ представляет собой одну из граней многогранника Q .

Если

$$\hat{c} = \left(\sum_{s=1}^n d_{rs} \sigma_s \right)^{-1}, \quad \hat{\sigma} = \hat{c} \sigma,$$

то $\hat{\sigma} \in \Gamma$. Геометрически точка $\hat{\sigma}$ является ближайшей к началу координат точкой пересечения луча L с многогранником Q .

Нетрудно показать [23; с. 171–172], что из совокупности $\{M_1, \dots, M_{n+l}\}$ можно выбрать набор точек $M^{(1)}, \dots, M^{(n)}$, принадлежащих грани Γ , с линейно независимыми радиус-векторами

$$\mathbf{m}^{(1)} = (m_{11}, \dots, m_{1n})^*, \quad \dots, \quad \mathbf{m}^{(n)} = (m_{n1}, \dots, m_{nn})^*$$

такой, что

$$\hat{\sigma} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{m}^{(i)}, \quad \lambda_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Пусть $\mathbf{A} = (m_{sk})_{s,k=1}^n$, а через $\tilde{m}_{sk}$, $s, k = 1, \dots, n$, обозначим элементы матрицы $\mathbf{A}^{-1}$. Получим

$$\sum_{s=1}^n \hat{\sigma}_s \tilde{m}_{sk} \geq 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

Значит, для точки σ справедливы соотношения (19). Но тогда по сделанному ранее предположению для этой точки не может выполняться неравенство (20). Следовательно,

$$\sum_{s=1}^n \sigma_s \sum_{k=1}^n \tilde{m}_{sk} \leq 1.$$

Точки $M^{(1)}, \dots, M^{(n)}$ принадлежат грани Γ . Поэтому

$$\sum_{k=1}^n \tilde{m}_{sk} = d_{rs}, \quad s = 1, \dots, n.$$

Пусть

$$\hat{x}_s = \tau^{d_{rs}}, \quad s = 1, \dots, n, \quad \hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)^*, \quad \tau = \text{const} > 0.$$

Имеем

$$\tilde{\varphi}(\hat{\mathbf{x}}) + g(\hat{\mathbf{x}}) = \sum_{s=1}^n c_s \tau^{\eta_s} + \sum_{j=1}^l b_j \tau^{\theta_j} - N \tau^{\omega}.$$

Здесь

$$\eta_s = \gamma_s d_{rs} \geq 1, \quad \theta_j = \sum_{s=1}^n \delta_{js} d_{rs} \geq 1, \quad \omega = \sum_{s=1}^n \sigma_s d_{rs} \leq 1.$$

Получаем, что при достаточно малых значениях τ и достаточно больших значениях N справедливо неравенство $\tilde{\varphi}(\hat{\mathbf{x}}) + g(\hat{\mathbf{x}}) < 0$. Следовательно, функция $\tilde{\varphi}(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})$ не является положительно определенной. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Условия (18) – это n -мерный аналог условия (17). Если для некоторых значений индекса j неравенства (18) не выполняются, то соответствующие слагаемые $b_j x_1^{\delta_{j1}} \dots x_n^{\delta_{jn}}$, входящие в выражение для функции $\tilde{\varphi}(\mathbf{x})$, не будут влиять на ограничения, получаемые для параметров $\sigma_1, \dots, \sigma_n$. В случае, когда неравенства (18) не выполняются ни при каких значениях $j \in \{1, \dots, l\}$, необходимое и достаточное условие положительной определенности функции $\tilde{\varphi}(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})$ совпадает с условием, указанным в лемме 1 для функции $\varphi(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})$.

ЗАМЕЧАНИЕ 9. Сформулированные в лемме 3 условия гарантируют, что функция $\tilde{\varphi}(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})$ будет положительно определенной при любом значении $N > 0$. Если же величина N достаточно мала, то положительная определенность имеет место и в случае, когда неравенство (20) обращается в равенство.

6. Уточнение условий устойчивости по нелинейному приближению.

В предыдущем пункте статьи было доказано, что если рассматриваемая функция представляет собой сумму, в которой имеются слагаемые, принимающие в достаточно малой окрестности начала координат неотрицательные значения, то при исследовании такой функции на положительную определенность указанные слагаемые

можно не только отбросить, но и использовать для ослабления ограничений, получающихся для других слагаемых. Покажем теперь, что для некоторых классов систем применение данного подхода позволяет уточнить установленные в п. 3 условия асимптотической устойчивости по нелинейному треугольному приближению.

Снова рассмотрим систему (11). Будем считать, что элементы векторов $\mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1)$ и $\mathbf{f}_2(\mathbf{x}_2)$ – непрерывно дифференцируемые при $\mathbf{x}_1 \in \mathbb{E}^{n_1}$, $\mathbf{x}_2 \in \mathbb{E}^{n_2}$ однородные функции порядка $\mu > 1$; вектор-функция $\mathbf{q}_1(\mathbf{x})$ непрерывна при $\|\mathbf{x}\| < H$; возмущения $\mathbf{r}_1(t, \mathbf{x})$ и $\mathbf{r}_2(t, \mathbf{x})$ непрерывны в области (3) и удовлетворяют неравенствам

$$\|\mathbf{r}_1(t, \mathbf{x})\| \leq L_1 \|\mathbf{x}_2\|^{\sigma_1}, \quad \|\mathbf{r}_2(t, \mathbf{x})\| \leq L_2 \|\mathbf{x}_1\|^{\sigma_2},$$

$L_1, L_2, \sigma_1, \sigma_2$ – положительные постоянные.

Пусть нулевые решения изолированных подсистем (10) асимптотически устойчивы. Функцию Ляпунова для системы (11) строим в виде

$$V(\mathbf{x}) = V_1(\mathbf{x}_1) + V_2(\mathbf{x}_2), \quad (23)$$

где $V_1(\mathbf{x}_1)$ и $V_2(\mathbf{x}_2)$ – найденные для изолированных подсистем непрерывно дифференцируемые однородные порядка $\gamma_1 - \mu + 1$ и $\gamma_2 - \mu + 1$ соответственно функции, для которых выполнены требования теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости.

Предположим, что функцию $V_1(\mathbf{x}_1)$ можно выбрать так, чтобы при $\|\mathbf{x}\| < H$ имела место оценка

$$\left(\frac{\partial V_1}{\partial \mathbf{x}_1}\right)^* \mathbf{q}_1(\mathbf{x}) \leq -a_1 \sum_{i=1}^l \|\mathbf{x}_1\|^{\gamma_1 - \mu + \alpha_i} \|\mathbf{x}_2\|^{\beta_i} + a_2 \sum_{i=l+1}^{l+k} \|\mathbf{x}_1\|^{\gamma_1 - \mu + \alpha_i} \|\mathbf{x}_2\|^{\beta_i}.$$

Здесь l и k – натуральные числа; $a_1 > 0$, $a_2 \geq 0$; $\alpha_i \geq 0$, $\beta_i > 0$, $i = 1, \dots, l+k$. Тогда в области (3) справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \dot{V}|_{(11)} &\leq -c_1(\|\mathbf{x}_1\|^{\gamma_1} + \|\mathbf{x}_2\|^{\gamma_2}) - a_1 \sum_{i=1}^l \|\mathbf{x}_1\|^{\gamma_1 - \mu + \alpha_i} \|\mathbf{x}_2\|^{\beta_i} \\ &\quad + a_2 \sum_{i=l+1}^{l+k} \|\mathbf{x}_1\|^{\gamma_1 - \mu + \alpha_i} \|\mathbf{x}_2\|^{\beta_i} + c_2(\|\mathbf{x}_1\|^{\gamma_1 - \mu} \|\mathbf{x}_2\|^{\sigma_1} + \|\mathbf{x}_1\|^{\sigma_2} \|\mathbf{x}_2\|^{\gamma_2 - \mu}), \end{aligned} \quad (24)$$

где $c_1, c_2 = \text{const} > 0$.

Выражение $-a_1 \sum_{i=1}^l \|\mathbf{x}_1\|^{\gamma_1 - \mu + \alpha_i} \|\mathbf{x}_2\|^{\beta_i}$ неположительно. Поэтому при нахождении условий отрицательной определенности $\dot{V}|_{(11)}$ его можно не учитывать. Однако если для некоторых значений $i \in \{1, \dots, l\}$ выполняется соотношение

$$\frac{\gamma_1 - \mu + \alpha_i}{\gamma_1} + \frac{\beta_i}{\gamma_2} < 1,$$

то учет соответствующих слагаемых и применение леммы 3 позволяют точнее оценить область значений параметров σ_1 и σ_2 , при которых функция $\dot{V}|_{(11)}$ отрицательно определена.

Рассмотрим более подробно случай, когда для первой изолированной подсистемы существует непрерывно дифференцируемая однородная порядка $m > 1$ функция Ляпунова $\tilde{V}(\mathbf{x}_1)$, удовлетворяющая требованиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости, такая, что при $\|\mathbf{x}\| < H$ имеет место неравенство

$$\left(\frac{\partial \tilde{V}}{\partial \mathbf{x}_1}\right)^* \mathbf{q}_1(\mathbf{x}) \leq -\tilde{a}\|\mathbf{x}_1\|^{m+\alpha-1}\|\mathbf{x}_2\|^\beta.$$

Здесь $\tilde{a}$, α , β – положительные постоянные, причем $\alpha + \beta < \mu$. В частности, для существования указанной функции достаточно [4; с. 112], чтобы вектор $\mathbf{q}_1(\mathbf{x})$ был представим в виде $\mathbf{q}_1(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x})\mathbf{x}_1$, где $\psi(\mathbf{x})$ – скалярная функция, для которой в области $\|\mathbf{x}\| < H$ справедлива оценка

$$\psi(\mathbf{x}) \leq -a\|\mathbf{x}_1\|^{\alpha-1}\|\mathbf{x}_2\|^\beta, \quad a = \text{const} > 0.$$

Тогда при построении для системы (11) функции Ляпунова по формуле (23) в качестве $V_1(\mathbf{x}_1)$ можно выбрать функцию

$$V_1(\mathbf{x}_1) = \tilde{V}^{(\gamma_1 - \mu + 1)/m}(\mathbf{x}_1), \quad \gamma_1 > m + \mu - 1.$$

В данном случае соотношение (24) принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{V}|_{(11)} &\leq -c_1(\|\mathbf{x}_1\|^{\gamma_1} + \|\mathbf{x}_2\|^{\gamma_2}) - \tilde{c}\|\mathbf{x}_1\|^{\gamma_1 - \mu + \alpha}\|\mathbf{x}_2\|^\beta \\ &\quad + c_2(\|\mathbf{x}_1\|^{\gamma_1 - \mu}\|\mathbf{x}_2\|^{\sigma_1} + \|\mathbf{x}_1\|^{\sigma_2}\|\mathbf{x}_2\|^{\gamma_2 - \mu}), \quad \tilde{c} = \text{const} > 0. \end{aligned}$$

Если при исследовании условий отрицательной определенности $\dot{V}|_{(11)}$ слагаемое $-\tilde{c}\|\mathbf{x}_1\|^{\gamma_1 - \mu + \alpha}\|\mathbf{x}_2\|^\beta$ просто отбросить, то получим, что при выполнении неравенства $\sigma_2 > \mu^2/\sigma_1$ нулевое решение системы (11) асимптотически устойчиво.

Предположим теперь, что $\sigma_1 > \mu\beta/(\mu - \alpha)$. Тогда учет указанного слагаемого позволяет ослабить найденное ограничение на значения параметра σ_2 . С помощью леммы 2 нетрудно показать, что в данном случае асимптотическая устойчивость имеет место при $\sigma_2 > \alpha\mu/(\sigma_1 - \beta)$.

Таким образом, справедлива следующая

ТЕОРЕМА 4. *Для асимптотической устойчивости нулевого решения системы (11) достаточно, чтобы при $\sigma_1 \leq \mu\beta/(\mu - \alpha)$ выполнялось неравенство $\sigma_2 > \mu^2/\sigma_1$, а при $\sigma_1 > \mu\beta/(\mu - \alpha)$ – неравенство $\sigma_2 > \alpha\mu/(\sigma_1 - \beta)$.*

СЛЕДСТВИЕ 2. *Пусть возмущения $\mathbf{r}_1(t, \mathbf{x})$ и $\mathbf{r}_2(t, \mathbf{x})$ в области (3) удовлетворяют условиям*

$$\|\mathbf{r}_1(t, \mathbf{x})\| \leq L_1\|\mathbf{x}_2\|^\sigma, \quad \|\mathbf{r}_2(t, \mathbf{x})\| \leq L_2\|\mathbf{x}_1\|^\sigma, \quad \text{где } L_1, L_2, \sigma = \text{const} > 0.$$

Тогда при выполнении неравенства $\sigma(\sigma - \beta) > \alpha\mu$ нулевое решение системы (11) асимптотически устойчиво.

Следствие 2 утверждает, что для возмущенной системы сохранение асимптотической устойчивости нулевого решения может иметь место и в случае, когда порядок возмущений меньше порядка однородности функций $\mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1)$ и $\mathbf{f}_2(\mathbf{x}_2)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 10. Рассмотренный в настоящем пункте способ уточнения условий асимптотической устойчивости по нелинейному неоднородному приближению применим и при более общих предположениях относительно правых частей системы (11). Например, векторные функции $\mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1)$ и $\mathbf{f}_2(\mathbf{x}_2)$ могут быть однородными разного порядка или обобщенно-однородными, а возмущения могут удовлетворять условиям

$$\|\mathbf{r}_1(t, \mathbf{x})\| \leq L_1 \|\mathbf{x}_1\|^{\delta_{11}} \|\mathbf{x}_2\|^{\delta_{12}}, \quad \|\mathbf{r}_2(t, \mathbf{x})\| \leq L_2 \|\mathbf{x}_1\|^{\delta_{21}} \|\mathbf{x}_2\|^{\delta_{22}},$$

где $L_i > 0$, $\delta_{ij} \geq 0$, $\delta_{i1} + \delta_{i2} > 0$, $i, j = 1, 2$.

ПРИМЕР 3. Пусть движение механической системы с двумя степенями свободы описывается уравнениями

$$\ddot{\mathbf{x}} + \frac{\partial W}{\partial \dot{\mathbf{x}}} + \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Здесь $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^*$. Будем предполагать, что функция W , характеризующая действие диссипативных сил, имеет вид

$$W = \frac{1}{2} x_2^2 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{6} (\dot{x}_1^6 + \dot{x}_2^6).$$

Таким образом, получаем систему

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \dot{x}_1^5 + x_2^2 \dot{x}_1 + x_1 &= 0, \\ \ddot{x}_2 + \dot{x}_2^5 + x_2 &= 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Система (25) является треугольной, причем ее положение равновесия $\mathbf{x} = \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ асимптотически устойчиво [1; с. 80–82].

Далее рассмотрим возмущенные уравнения

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \dot{x}_1^5 + x_2^2 \dot{x}_1 + x_1 &= r_1(t, \mathbf{x}), \\ \ddot{x}_2 + \dot{x}_2^5 + x_2 &= r_2(t, \mathbf{x}), \end{aligned} \quad (26)$$

в которых функции $r_1(t, \mathbf{x})$ и $r_2(t, \mathbf{x})$ непрерывны при $t \geq 0$, $\|\mathbf{x}\| < H$ ($H = \text{const} > 0$) и удовлетворяют неравенствам

$$|r_1(t, \mathbf{x})| \leq L_1 |x_2|^{\sigma_1}, \quad |r_2(t, \mathbf{x})| \leq L_2 |x_1|^{\sigma_2}.$$

Здесь $L_1, L_2, \sigma_1, \sigma_2$ – положительные постоянные.

Функцию Ляпунова для системы (26) строим в виде

$$V(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = V_1^{\gamma_1+1}(x_1, \dot{x}_1) + V_2^{\gamma_2+1}(x_2, \dot{x}_2),$$

где γ_1, γ_2 – неотрицательные рациональные числа с нечетными знаменателями, а функции $V_1(x_1, \dot{x}_1)$ и $V_2(x_2, \dot{x}_2)$ определяются по формулам

$$V_i(x_i, \dot{x}_i) = x_i^2 + \dot{x}_i^2 + c_i x_i^5 \dot{x}_i, \quad c_i = \text{const} > 0, \quad i = 1, 2.$$

Дифференцируя функцию $V(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ в силу системы (26), получим, что положительные числа $\Delta, a_1, a_2, c_1, c_2$ можно выбрать так, чтобы при всех $t \geq 0$, $\|\mathbf{x}\| < \Delta$ имела место оценка

$$\begin{aligned} \dot{V}|_{(26)} &\leq -a_1 (x_1^{2\gamma_1+6} + \dot{x}_1^{2\gamma_1+6} + x_2^{2\gamma_2+6} + \dot{x}_2^{2\gamma_2+6} + x_1^{2\gamma_1} x_2^2 \dot{x}_1^2 + x_2^2 \dot{x}_1^{2\gamma_1+2}) \\ &\quad + a_2 ((x_1^{2\gamma_1} + \dot{x}_1^{2\gamma_1})(|x_1|^5 + |\dot{x}_1|)|x_2|^{\sigma_1} + (x_2^{2\gamma_2} + \dot{x}_2^{2\gamma_2})(|x_2|^5 + |\dot{x}_2|)|x_1|^{\sigma_2}). \end{aligned}$$

Заметим, что слагаемые $-a_1 x_1^{2\gamma_1} x_2^2 \dot{x}_1^2$ и $-a_1 x_2^2 \dot{x}_1^{2\gamma_1+2}$ неотрицательны. Если эти слагаемые отбросить, не учитывая их при нахождении условий отрицательной определенности функции $\dot{V}|_{(26)}$, то нетрудно показать, что при выполнении неравенства $\sigma_1 \sigma_2 > 25$ существуют значения γ_1 и γ_2 , при которых функция $V(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ удовлетворяет требованиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости. Если же учитывать указанные слагаемые, то с помощью леммы 3 получим, что за счет выбора величин γ_1 и γ_2 отрицательную определенность функции $\dot{V}|_{(26)}$ можно обеспечить и в случае, когда имеют место неравенства $\sigma_1 > 5/2$, $\sigma_2(\sigma_1 - 1) > 15$.

Таким образом, применение леммы 3 позволяет уточнить оценку области значений параметров σ_1 и σ_2 , при которых положение равновесия $\mathbf{x} = \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ системы (26) асимптотически устойчиво.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Н. Н. Красовский, *Некоторые задачи теории устойчивости движения*, Физматгиз, М., 1959.
- [2] А. М. Ляпунов, *Общая задача об устойчивости движения*, ОНТИ, М., 1935.
- [3] И. Г. Малкин, “Теорема об устойчивости по первому приближению”, *Докл. АН СССР*, **76:6** (1951), 783–784.
- [4] В. И. Zubov, *Устойчивость движения. Методы Ляпунова и их применение*, Высшая школа, М., 1973.
- [5] Г. В. Каменков, *Избранные труды*, т. 1: *Устойчивость движения. Колебания. Аэродинамика*, Наука, М., 1971.
- [6] В. И. Zubov, *Математические методы исследования систем автоматического регулирования*, Судпромгиз, Л., 1959.
- [7] В. В. Козлов, “Тензорные инварианты квазиоднородных систем дифференциальных уравнений и асимптотический метод Ковалевской–Ляпунова”, *Матем. заметки*, **51:2** (1992), 46–52.
- [8] В. Г. Веретенников, *Устойчивость и колебания нелинейных систем*, Наука, М., 1984.
- [9] Г. Г. Хазина, Л. Г. Хазин, “Существенно неоднородные системы в задачах устойчивости”, *Устойчивость движения*, ред. В. М. Матросова, В. Д. Иртегова, Наука, Новосибирск, 1985, 187–191.
- [10] В. И. Zubov, “Асимптотическая устойчивость по первому, в широком смысле, приближению”, *Докл. РАН*, **346:3** (1996), 295–296.
- [11] А. А. Косов, “Об устойчивости сложных систем по нелинейному приближению”, *Дифференц. уравнения*, **33:10** (1997), 1432–1434.
- [12] В. В. Абрамов, “Устойчивость тривиального решения системы дифференциальных уравнений с нулевым линейным приближением”, *Дифференц. уравнения*, **35:11** (1999), 1575.
- [13] А. Ю. Александров, *Устойчивость движений неавтономных динамических систем*, Изд-во С.-Петерб. ун-та, СПб., 2004.
- [14] A. Yu. Aleksandrov, A. V. Platonov, “Aggregation and stability analysis of nonlinear complex systems”, *J. Math. Anal. Appl.*, **342:2** (2008), 989–1002.
- [15] А. А. Мартынюк, А. Ю. Оболенский, “Об устойчивости автономных систем Важевского”, *Дифференц. уравнения*, **16:8** (1980), 1392–1407.
- [16] Б. С. Калигин, “О принципе сведения для асимптотически треугольных дифференциальных систем”, *Прикл. матем., мех.*, **71:3** (2007), 389–400.
- [17] P. Seibert, R. Suárez, “Global stabilization of nonlinear cascaded systems”, *Systems Control Lett.*, **14:4** (1990), 347–352.
- [18] П. Сейберт, “Принцип сведения в теории устойчивости динамических и полудинамических систем”, *Матем. заметки*, **56:3** (1994), 134–143.

- [19] E. Panteley, A. Loria, “Growth rate conditions for stability of cascaded time-varying systems”, *Automatica J. IFAC*, **37**:3 (2001), 453–460.
- [20] С. А. Алексеева, В. И. Воротников, В. А. Феофанова, “К проблемам частичной устойчивости и детектируемости динамических систем”, *Прикл. матем., мех.*, **71**:6 (2007), 964–975.
- [21] А. И. Лурье, *Аналитическая механика*, Физматгиз, М., 1961.
- [22] А. Ю. Александров, “Об устойчивости решений нелинейных систем с неограниченными возмущениями”, *Матем. заметки*, **63**:1 (1998), 3–8.
- [23] Р. Рокафеллар, *Выпуклый анализ*, Мир, М., 1973.

А. Ю. Александров

Санкт-Петербургский государственный университет

E-mail: alex43102006@yandex.ru

Поступило

08.12.2008

Исправленный вариант

18.11.2010

А. В. Платонов

Санкт-Петербургский государственный университет

E-mail: al-platon1@yandex.ru